СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. УСЛОВИЯ ДИАГОНАЛИЗИРУЕМОСТИ ОПЕРАТОРА

Собственные значения и собственные векторы линейных операторов

Пусть A – линейный оператор, а I – тождественный оператор из $L(V, V)$.

Число λ называется собственным значением (*числом*) оператора А*,* если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ такой, что

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}. \tag{1}$$

При этом вектор $\boldsymbol{x}$ называется собственным вектором оператора А*,* отвечающим собственному значению λ.

Множество всех собственных значений оператора A называется его *спектром* и обозначается $\operatorname{Spec} A$.

Многочлен относительно λ

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{2}$$

называется характеристическим многочленом оператора A, а уравнение

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{3}$$

называется характеристическим.

Теорема 1 Для того чтобы число λ было собственным значением оператора А*,* необходимо и достаточно, чтобы это число было корнем характеристического уравнения (3) оператора А.

Доказательство. Пусть λ – собственное значение оператора A и $\boldsymbol{x}$ – собственный вектор, отвечающий этому λ ($\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$). Перепишем соотношение (1) в следующей форме:

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Так как $\boldsymbol{x}$ – ненулевой вектор, то из последнего равенства следует, что $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$, т.е.

$$defect(A - \lambda I) \geq 1. \tag{4}$$

Поскольку

$$rang(A - \lambda I) + defect(A - \lambda I) = n,$$

то из этого равенства и неравенства (4) получаем

$$rang(A - \lambda I) \leq n - 1. \tag{5}$$

По определению $rang(A - \lambda I)$ равняется рангу оператора $A - \lambda I$. Поэтому из неравенства (5) следует

$$rang(A - \lambda I) < n.$$

Таким образом, если λ – собственное значение, то ранг матрицы $\widetilde{A} - \lambda E$ оператора $A - \lambda I$ меньше n, т.е. $\det(A - \lambda I) = 0$ и, следовательно, λ – корень характеристического уравнения.

Пусть теперь λ – корень характеристического уравнения (3). Тогда справедливо неравенство (5), а следовательно, и неравенство (4), из которого вытекает существование для числа λ такого ненулевого вектора $\boldsymbol{x}$, что $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Последнее соотношение эквивалентно соотношению (1). Поэтому λ – собственное значение. *Теорема доказана*.

Следствие. Каждый линейный оператор имеет собственное значение.

Доказательство. Действительно, характеристическое уравнение всегда имеет корень (в силу основной теоремы алгебры).

Пусть в пространстве V задан базис $\{\boldsymbol{e}_k\}$ и $\widetilde{A} = (a_{ik})$ – матрица оператора A в этом базисе. Тогда, согласно (2), характеристический многочлен (3) оператора A запишется следующим образом:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\widetilde{A} - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

$\chi_A(\lambda)$ не зависит от выбора базиса: если $\widetilde{A}'$ – матрица оператора A в другом базисе, то $\widetilde{A}' = T^{-1}\widetilde{A}T$ и

$$\det\left(\widetilde{A}' - \lambda E\right) = \det\left(T^{-1}\widetilde{A}T - \lambda E\right) = \det\left(T^{-1}\widetilde{A}T - \lambda T^{-1}ET\right) = \det\left(T^{-1}\left(\widetilde{A} - \lambda E\right)T\right) =$$
$$\det T^{-1} \det\left(\widetilde{A} - \lambda E\right) \det T = \det\left(\widetilde{A} - \lambda E\right).$$

Замечание 1 Так как значение определителя $\det(A - \lambda I)$ не зависит от выбора базиса, то коэффициенты характеристического многочлена в правой части (3) также не зависят от выбора базиса. Таким образом, коэффициенты характеристического многочлена оператора A представляют собой инварианты – величины, значения которых не зависят от выбора базиса.

В частности, коэффициент, равный $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$, является инвариантом. Этот инвариант называется *следом оператора A* и обозначается символом trA:

$$trA = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Алгебраической кратностью собственного значения λ называется кратность корня λ характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$.

Пусть теперь λ – собственное значение линейного оператора A. Тогда, по определению, ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ будет собственным, если $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ или, что равносильно, $A - \lambda I = 0$. Отсюда получаем, что подпространство $\ker(A - \lambda I)$ состоит из всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ, и нулевого вектора. Это подпространство называется *собственным*. Его размерность называется *геометрической кратностью* собственного значения λ. Таким образом, для нахождения геометрической кратности собственного значения λ нужно найти размерность ядра линейного оператора $A - \lambda I$. Часто удобнее находить равную последней размерность подпространства решений однородной системы уравнений $\left(\widetilde{A} - \lambda E\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Если найдена фундаментальная система решений этой однородной системы уравнений (заметим, что фундаментальная система решений состоит из собственных векторов), то число векторов в ней равно геометрической кратности собственного значения λ. Однако, находить специально фундаментальную систему решений нерационально, так как размерность подпространства решений однородной системы уравнений $\left(\widetilde{A} - \lambda E\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, а, следовательно, и геометрическая кратность собственного значения λ, равна $n - r$, где число r равно рангу матрицы $\left(\widetilde{A} - \lambda E\right)$. Очевидно, что алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения больше нуля и не превосходят размерности линейного пространства. Кроме того, геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.

Все введенные понятия (собственное значение, собственный вектор, спектр, характеристический многочлен) переносятся с линейного оператора на его матрицу. Отметим также, что определение собственного значения и собственного вектора для операторов, действующих в бесконечномерных линейных пространствах, остается таким же, как и в конечномерном случае. Однако спектр линейного оператора в бесконечномерном случае определяется несколько иначе. Он включает в себя все собственные значения, но может содержать и другие значения.

Теорема 2 *Геометрическая кратность λ не превосходит алгебраической.*

Пример 1 Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни (собственные значения):

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-14=0.$$

Собственные значения: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=7$. Найдем собственные векторы.

$\underline{\lambda=-2}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая систему, получим

$$\begin{cases} x_1=-0{,}8x_2; \\ x_2=x_2. \end{cases}$$

Тогда, собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda=-2$, будет $X_1=(-0{,}8;1)$.

$\underline{\lambda=7}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая систему, получим

$$\begin{cases} x_1=x_2; \\ x_2=x_2. \end{cases}$$

Тогда, собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda=7$, будет $X_2=(1;1)$.

Умови діагоналізуємості оператора

Теорема 3 Для того чтобы матрица $\widetilde{A}$ линейного оператора A в данном базисе была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы базисные векторы $\boldsymbol{e}_k$ были собственными векторами этого оператора. Линейные операторы, имеющие в некотором базисе диагональную матрицу, называются *операторами простой структуры*.

Доказательство. Пусть базисные векторы $\boldsymbol{e}_k$ являются собственными векторами оператора A. Тогда

$$A\boldsymbol{e}_k=\lambda\boldsymbol{e}_k \tag{6}$$

и поэтому матрица $\widetilde{A}$ оператора A имеет вид

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}, \tag{7}$$

т.е. является диагональной.

Пусть матрица $\widetilde{A}$ линейного оператора A в данном базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$ диагональная, т.е. имеет вид (7). Тогда соотношения (1) примут вид (6), а это означает, что $\boldsymbol{e}_k$ – собственные векторы оператора A. *Теорема доказана*.

Теорема 4

1. Диагональная форма квадратной диагонализируемой матрицы определена однозначно с точностью до перестановки диагональных элементов.
2. Если $\chi_A(\lambda)$ раскладывается на линейные множители и не имеет кратных корней, тогда матрица $\widetilde{A}$ является диагонализируемой.
3. Линейный оператор A имеет в некотором базисе диагональную матрицу тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена принадлежат данному полю и их геометрические кратности равны алгебраическим.

Теорема 5 Пусть собственные значения $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_p$ оператора A различны. Тогда отвечающие им собственные векторы $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_p$ линейно независимы.

Следствие. Если характеристический многочлен оператора А имеет n различных корней, то в некотором базисе матрица оператора А имеет диагональный вид.

Действительно, в рассматриваемом случае, согласно только что сформулированной теореме собственные векторы линейно независимы и поэтому могут быть выбраны в качестве базисных. Но тогда по теореме 3 в этом базисе матрица оператора A будет диагональной.

Алгоритм приведения матрицы $\widetilde{A}$ к диагональному виду

1. Сначала проверим матрицу $\widetilde{A}$ на диагонализируемость. Для этого вычислим характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)$ матрицы $\widetilde{A}$ и попробуем разложить его на линейные множители. Если это невозможно, то делаем вывод, что матрица $\widetilde{A}$ не является диагонализируемой. Для каждого собственного значения λ_i, кратность которого больше 1, найти дефект матрицы $\widetilde{A}-\lambda_i E$. Если для каждого такого собственного значения полученный дефект совпадает с кратностью λ_i в $\chi_A(\lambda)$, матрица $\widetilde{A}$ является диагонализируемой. Если хотя бы для одного λ_i полученный дефект будет меньше кратности λ_i в $\chi_A(\lambda)$, матрица $\widetilde{A}$ не является диагонализируемой.
2. Если матрица является диагонализируемой, то найти все ее собственные векторы.
3. Диагональная форма $\widetilde{A}_d$ матрицы $\widetilde{A}$ и матрица перехода T записываем таким образом: начиная с левого верхнего угла по диагонали в матрицу $\widetilde{A}_d$ записывается первое собственное число столько раз, какова его кратность. Одновременно, начиная слева, в матрицу T по столбцам записываются координаты найденных векторов, являющиеся базисом собственного подпространства матрицы $\widetilde{A}$ (собственные векторы), соответствующие первому собственному числу. И так далее для второго, … собственных чисел.

Пример 2 Приведите к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен матрицы: $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$. Разложение этого многочлена на линейные множители зависит от выбора поля. Если рассматривать поле действительных чисел, то квадратный делитель $\lambda^2 - 4\lambda + 13$ многочлена $\chi_A(\lambda)$ не имеет действительных корней, а значит многочлен $\chi_A(\lambda)$ не раскладывается над полем действительных чисел на линейные множители, откуда следует, что матрица A не является диагонализируемой над полем действительных чисел.

Теперь рассмотрим случай поля комплексных чисел. Тогда $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = (1-\lambda)(\lambda - (2+3i))(\lambda - (2-3i))$. Многочлен разложился на простые множители, из чего следует, что матрица A является диагонализируемой над полем комплексных чисел.

Собственные числа и соответствующие собственные векторы имеют вид:

$$\lambda_1 = 1,\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = 2+3i,\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_3 = 2-3i,\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 3+3i \\ 5+3i \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Итак, диагональная форма A_d матрицы A и матрица перехода T будут иметь вид:

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 3-3i & 3+3i \\ 2 & 5-3i & 5+3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$A \in L(V, V)$ – оператор с простым спектром, если $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)..(\lambda - \lambda_n)$,

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ различны.

Каждый собственный вектор связан со своим собственным значением. Действительно, если $A\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}$ и $A\boldsymbol{x} = \lambda_2 \boldsymbol{x}$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $\lambda_1 \boldsymbol{x} = \lambda_2 \boldsymbol{x} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, но нулевой вектор не может быть собственным вектором (по определению).

Множество всех собственных векторов, отвечающих данному собственному значению линейного оператора, не является подпространством, так как не содержит нулевого вектора.