ОБРАЗ, РАНГ, ЯДРО, ДЕФЕКТ ОПЕРАТОРА. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТОРАНСТВА

Образ, ранг, ядро, дефект оператора

Ядром линейного оператора A называется множество всех тех элементов $\boldsymbol{x} \in V$, для которых $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Ядро линейного оператора A обозначается символом $\ker A$.

Если $\ker A = \{\boldsymbol{0}\}$, то оператор A действует взаимно однозначно из V в V. Действительно, в этом случае из условия $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ следует, что $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, а это означает, что различным $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ отвечают различные $\boldsymbol{y}_1 = A\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{y}_2 = A\boldsymbol{x}_2$ (если бы $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2$, то $A(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0}$, т.е. $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ и элементы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ не были бы различны).

Таким образом, согласно доказанному выше утверждению **условие** $\ker A = \{\boldsymbol{0}\}$ **является необходимым и достаточным для того, чтобы оператор** A **имел обратный.**

Образом линейного оператора A называется множество всех элементов $\boldsymbol{y} \in V$, представимых в виде $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$. Образ линейного оператора A обозначается символом $\operatorname{Im} A$.

Пример 1 Найти ядро линейного оператора A проектирования на плоскость $2x + 3y + 4z = 0$.

Решение. В данном случае ядро – множество точек, которые проектируются в начало координат (начало координат принадлежит плоскости), значит достаточно составить уравнение проектирующей прямой, проходящей через начало координат: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$.

Замечание 1 Отметим, что если $\ker A = \{\boldsymbol{0}\}$, то $\operatorname{Im} A = V$, и наоборот. Поэтому наряду с отмеченным выше условием $\ker A = \{\boldsymbol{0}\}$ **условие** $\operatorname{Im} A = V$ **также является необходимым и достаточным для того, чтобы оператор** A **имел обратный**.

Замечание 2 Очевидно, ядро $\ker A$ и образ $\operatorname{Im} A$ – линейные подпространства пространства V.

Доказательство. В самом деле в силу линейности оператора A имеем:

$$1)\quad \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_1 \in \ker A \Rightarrow A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}_2 \in \ker A \Rightarrow A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0} \end{array}\right| \Rightarrow A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in \ker A,$$

$A(\alpha\boldsymbol{x}_1) = \alpha A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \alpha\boldsymbol{x}_1 \in \ker A$. Значит $\ker A$ является подпространством пространства V.

$$2)\quad \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{y}_1 \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \exists \boldsymbol{x}_1 \in V : \boldsymbol{y}_1 = A\boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \exists \boldsymbol{x}_2 \in V : \boldsymbol{y}_2 = A\boldsymbol{x}_2 \end{array}\right| \Rightarrow \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$$

и т.к. $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in V$, то $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in \operatorname{Im} A$,

$\alpha\boldsymbol{y}_1 = \alpha A\boldsymbol{x}_1 = A(\alpha\boldsymbol{x}_1)$ и т.к. $\alpha\boldsymbol{x}_1 \in V$, то $\alpha\boldsymbol{y}_1 \in \operatorname{Im} A$. Значит $\operatorname{Im} A$ является подпространством пространства V.

Вследствие замечания 2 можно рассматривать размерности $\dim(\ker A)$ и $\dim(\operatorname{Im} A)$ этих подпространств.

Назовем *рангом* линейного оператора A число, обозначаемое символом $rangA$ и равное $rangA = \dim(\operatorname{Im} A)$. Назовем *дефектом* линейного оператора A число, обозначаемое символом $defect\, A$ и равное $defect\, A = \dim(\ker A)$.

Пример 2 Пусть V – n-мерное комплексное или вещественное линейное пространство.

1) Тождественный оператор $A = I : V \to V$, при этом $A\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, тогда $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} I = V$, $\ker A = \ker I = \{\boldsymbol{0}\}$ (ядро состоит из единственного нулевого элемента), значит $rangI = \dim(\operatorname{Im} I) = n$.

2) Нулевой оператор $A = \theta : V \to \{\boldsymbol{0}\}$, тогда $\operatorname{Im}\theta = \{\boldsymbol{0}\}$, $\ker\theta = V$, $rang\theta = \dim(\operatorname{Im}\theta) = 0$, $defect\theta = \dim(\ker\theta) = n$.

3) Рассмотрим оператор дифференцирования $A = \dfrac{d}{dt}$ на пространстве $\{P_k(t)\}_{k \le n}$ многочленов степени не выше n, тогда $\operatorname{Im} A = \{P_k(t)\}_{k \le n-1}$, $\ker A = \{P_0(t)\}$ (т.к. $\dfrac{d}{dt}P_0(t) = 0$), отсюда $rangA = \dim(\operatorname{Im} A) = n - 1$, $defectA = \dim(\ker A) = 1$.

Пример 3 Найти образ, ядро, ранг и дефект оператора $A : R^3 \to R^3$, $A\boldsymbol{x} = [[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{j}], \boldsymbol{k}]$ (оператор двойного векторного умножения).

Решение. Будем считать, что мы уже убедились в линейности оператора A.

Вычисление образа и ранга. Возьмем стандартный базис пространства $R^3 : \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. Находим

$$\left.\begin{aligned} A\boldsymbol{i} &= [[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}], \boldsymbol{k}] = [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}] = \boldsymbol{0},\\ A\boldsymbol{j} &= [[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}], \boldsymbol{k}] = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{k}] = \boldsymbol{0},\\ A\boldsymbol{k} &= [[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}], \boldsymbol{k}] = [-\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}] = \boldsymbol{j}, \end{aligned}\right| \Rightarrow \operatorname{Im} A = L(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{j}) = L(\boldsymbol{j}),\ rangA = \dim L(\boldsymbol{j}) = 1.$$

Вычисление ядра и дефекта. Пусть $\boldsymbol{x} = \alpha\,\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{x} \in \ker A$. Это означает, что $A\boldsymbol{x} = [[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{j}], \boldsymbol{k}] = \boldsymbol{0}$ или $A\boldsymbol{x} = [[\alpha\,\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}], \boldsymbol{k}] = \alpha\,\boldsymbol{0} + \beta\boldsymbol{0} + \gamma\boldsymbol{j}$. Отсюда $\boldsymbol{x} \in \ker A \Leftrightarrow \gamma = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \alpha\,\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}$, где $\alpha, \beta \in R$. Другими словами $\ker A = L(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, а дефект $defectA = \dim L(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = 2$.

В нашем примере $\operatorname{Im} A \subset \ker A$, но это не общее правило. Можно было воспользоваться формулой для двойного векторного произведения. Но решение вряд ли упростилось бы от этого.

Как правило, нахождение ядра в конце концов сводится к решению системы линейных однородных уравнений относительно координат произвольного вектора ядра. В рассмотренном нами примере эта система оказалась очень простой $0 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 1 \cdot \gamma = 0$, что позволило нам сразу записать общее решение $(\alpha, \beta, 0)$.

Теорема 1 Пусть размерность $\dim V$ пространства V равна n, и пусть А – линейный оператор из $L(V, V)$. Тогда $rangA + defectA = n$.

Имеет место также следующая теорема, в определенном отношении обратная теореме 1.2.

Теорема 2 Пусть V_1 и V_2 – два таких подпространства *n*-мерного пространства *V*, что $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$. Тогда существует такой линейный оператор *A* из $L(V, V)$, что $V_1 = \operatorname{Im} A$ и $V_2 = \ker A$.

Следствие из теоремы 1 Для того чтобы оператор А из $L(V, V)$ имел обратный A^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы $rangA = \dim V = n$.

Пусть *A* и *B* – линейные операторы из $L(V, V)$**.** Справедлива следующая теорема.

Теорема 3 Имеют место следующие соотношения:
$$rangAB \le rangA, \qquad rangAB \le rangB.$$

Доказательство. Докажем сначала первое из отмеченных соотношений. Очевидно, $\operatorname{Im} AB \subseteq \operatorname{Im} A$. Поэтому $rangAB \le rangA$.

Для доказательства второго соотношения воспользуемся следующим очевидным включением: $\ker B \subseteq \ker AB$ (т.к. AB и BA различны и включение $\operatorname{Im} AB \subseteq \operatorname{Im} B$ требует специальных рассуждений).

Из этого включения следует, что $defectB \le defectAB$. Из последнего неравенства в свою очередь следует неравенство $\dim V - defectAB \le \dim V - defectB$, а из него, согласно теореме 1, получаем $rangAB \le rangB$. Теорема доказана.

Теорема 4 Пусть A и B – линейные операторы из $L(V,V)$ и n – размерность V. Тогда
$$rangAB \ge rangA + rangB - n.$$

Следствие из теорем 3 и 4. Если $rangA = \dim V = n$, то $rangAB = rangBA = rangB$. Указанное следствие вытекает из неравенств

$rangAB \le rangB$ (теорема 3),

$rangAB \ge rangB$ (теорема 4 при $rangA = n$).

Из этих неравенств получим, что $rangAB = rangB$. Аналогично доказывается соотношение $rangBA = rangB$.

Теорема 5 Ранг линейного оператора A равен рангу матрицы $\widetilde{A}$ этого оператора: $rangA = rang\widetilde{A}$.

Пример 4 Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $A\boldsymbol{x} = (4x_1 + 3x_2 + x_3; -3x_1 - x_2; -x_1 - 2x_2 - x_3)$. Является ли оператор A линейным? Если да, то найти его ранг дефект, образ и ядро.

Решение. Несложно проверить, что заданный оператор является линейным.

Запишем матрицу этого оператора, для чего найдем образы базисных векторов $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$:
$$A\boldsymbol{e}_1 = (4;-3;-1), \qquad A\boldsymbol{e}_2 = (3;-1;-2), \qquad A\boldsymbol{e}_3 = (1;0;-1).$$

Будем иметь: $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Согласно теореме 1.7 $rangA = rang\widetilde{A}$, поэтому $rangA = rang\widetilde{A} = 2$ (ранг матрицы найти любым способом). Используя утверждение теоремы 1.2, получим $defectA = 3 - 2 = 1$.

Найдем векторы, принадлежащие ядру: $\boldsymbol{x} \in \ker A \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ или в матричной форме: $\widetilde{A}X = \theta$. Таким образом, имеем однородную систему линейных алгебраических уравнений, фундаментальным решением которой будет вектор $(1; -3; 5)$, т.е. $\ker A = \langle (1; -3; 5) \rangle$.

Найдем векторы, принадлежащие образу: $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} A : \exists \boldsymbol{x} \,\big|\, \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ или в матричной форме: $\widetilde{A}X = Y$. Полученная система линейных алгебраических уравнений должна иметь решение. Исследовав ее на совместность, результатом чего будет однородная система линейных алгебраических уравнений относительно переменных (y_1, y_2, y_3), получим фундаментальное решение: $(-1; 1; 0)$, $(-1; 0; 1)$, т.е. $\operatorname{Im} A = \langle (-1; 1; 0), (-1; 0; 1) \rangle$.

Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ – произвольные квадратные матрицы, содержащие n строк и n столбцов. Из теорем 3, 4, и 5 вытекают следующие следствия.

Следствие 1 Ранг произведения $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ удовлетворяет соотношениям

$$rang\widetilde{A}\widetilde{B} \le rang\widetilde{A}, \qquad rang\widetilde{A}\widetilde{B} \le rang\widetilde{B}, \qquad rang\widetilde{A}\widetilde{B} \ge rang\widetilde{A} + rang\widetilde{B} - n.$$

Инвариантные подпространства

Подпространство U пространства V называется *инвариантным подпространством* линейного оператора A, если $\forall \boldsymbol{y} \in U$ и вектор $A\boldsymbol{y} \in U$. Это значит, что линейный оператор A любой вектор инвариантного подпространства переводит в некоторый вектор этого же подпространства. Можно сказать, что все инвариантное подпространство линейным оператором A переводится в себя. Это обычно записывается формулой $A(U) \subset U$.

Нулевое подпространство и все пространство являются инвариантными для любого линейного оператора. Не всякое подпространство, инвариантное для одного линейного оператора, будет инвариантным и для другого. Если спектр линейного оператора не пуст, то линейная оболочка, порожденная любым собственным вектором, является инвариантным одномерным подпространством. И наоборот, любое одномерное инвариантное подпространство состоит из собственных векторов и нулевого вектора. Линейная оболочка $\ell(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_k)$ является инвариантным подпространством линейного оператора A тогда и только тогда, когда $\forall\ i = 1, 2, ..., k$ векторы $A\boldsymbol{f}_i \in \ell(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_k)$. Сумма и пересечение инвариантных подпространств являются инвариантными подпространствами этого линейного оператора. Любое подпространство, содержащееся в ядре $\ker A$, и любое подпространство, содержащее образ $\operatorname{Im} A$, являются инвариантными подпространствами линейного оператора A.

Пусть U является инвариантным подпространством линейного оператора A. Тогда линейный оператор $A_1 : U \to U$ называется *индуцированным*, если $\forall \boldsymbol{x} \in U \quad A_1\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$.