ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. МАТРИЦА ОПЕРАТОРА

Понятие линейного оператора, действия над ними. Основные свойства

Пусть V и W – линейные пространства, размерности которых равны соответственно n и k. Мы будем называть *оператором* A, действующим из V в W, отображение вида $A: V \to W$, сопоставляющее каждому элементу $\boldsymbol{x}$ пространства V некоторый элемент $\boldsymbol{y}$ пространства W. При этом будем использовать обозначение $\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x})$ или $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$.

Оператор A, *действующий из* V *в* W, *называется* линейным, *если для любых элементов* $\boldsymbol{x}_1$ *и* $\boldsymbol{x}_2$ *пространства* V *и любого комплексного числа* λ *выполняются соотношения:*

1°. $A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2$ (свойство аддитивности оператора).

2°. $A(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda A\boldsymbol{x}$ (свойство однородности оператора).

Замечание 1 Если пространство W представляет собой комплексную плоскость, то линейный оператор A, действующий из V в W, называется *линейной формой* или *линейным функционалом*.

Замечание 2 Если пространство W совпадает с пространством V, то линейный оператор, действующий в этом случае из V в V, называют также *линейным преобразованием* пространства V.

В множестве всех линейных операторов, действующих из V в W, определим операции суммы таких операторов и умножения оператора на скаляр.

Пусть A и B – два линейных оператора, действующих из V в W. *Суммой* этих операторов назовем линейный оператор $A + B$, определяемый равенством

$$(A + B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x}. \tag{1}$$

Произведением линейного оператора A на скаляр λ назовем линейный оператор λA, определяемый равенством

$$(\lambda A)\boldsymbol{x} = \lambda(A\boldsymbol{x}). \tag{2}$$

Назовем *нулевым* оператор, обозначаемый символом θ и отображающий все элементы пространства V в нулевой элемент пространства W. Иными словами, оператор θ действует по правилу $\theta\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Для каждого оператора A определим противоположный оператор $-A$ посредством соотношения $-A = (-1)A$.

Легко проверить справедливость следующего **утверждения**.

Множество $L(V, W)$ всех линейных операторов, действующих из V в W, с указанными выше операциями суммы и умножения на скаляр и выбранными нулевым оператором и противоположным оператором образует *линейное пространство*.

Исследуем подробнее линейные операторы, действующие из V в V, т.е. изучим подробнее множество $L(V, V)$.

Пример 1 Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $A\boldsymbol{x} = (x_1 + 1; x_2; x_3)$. Определить, является ли оператор A линейным.

Решение. Пусть $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $A\boldsymbol{y} = (y_1 + 1; y_2; y_3)$.

$$A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = (x_1 + 1 + y_1 + 1; x_2 + y_2; x_3 + y_3);$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3), \qquad A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (x_1 + y_1 + 1; x_2 + y_2; x_3 + y_3).$$

Видим, что $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \neq A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$, поэтому оператор A не является линейным.

Назовем *тождественным* (или *единичным*) оператором линейный оператор I, действующий по правилу $I\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ (здесь $\boldsymbol{x}$ – любой элемент V).

Введем понятие произведения линейных операторов из множества $L(V,V)$.

Произведением операторов A и B из $L(V,V)$ называется оператор AB, действующий по правилу

$$(AB)\boldsymbol{x}=A(B\boldsymbol{x}). \tag{3}$$

Отметим, что, вообще говоря, $AB\neq BA$.

Справедливы следующие *свойства* линейных операторов из $L(V,V)$:

1°. $\lambda(AB)=(\lambda A)B$.

2°. $(A+B)C=AC+BC$.

3°. $A(B+C)=AB+AC$.

4°. $(AB)C=A(BC)$. (4)

Первое из свойств (4) следует из определения произведения линейного оператора на скаляр (2) и определения произведения операторов (3).

Перейдем к обоснованию свойства 2°. Имеем, согласно (1), (2) и (3):

$$((A+B)C)\boldsymbol{x}=(A+B)(C\boldsymbol{x})=A(C\boldsymbol{x})+B(C\boldsymbol{x})=(AC)\boldsymbol{x}+(BC)\boldsymbol{x}=(AC+BC)\boldsymbol{x}.$$

Сравнивая левую и правую части последних соотношений, мы получаем искомое равенство.

Свойство 2° установлено.

Совершенно аналогично доказывается свойство 3°.

Свойство 4° справедливо, поскольку, согласно определению (3), произведение линейных операторов заключается в их последовательном действии, и поэтому линейные операторы $(AB)C$ и $A(BC)$ совпадают и, следовательно, тождественны.

Замечание 1 Свойство 4° позволяет определить произведение любого конечного числа операторов из $L(V,V)$ и, в частности, n-ю степень оператора A с помощью формулы

$$A^n=\underbrace{A\,A\,\ldots\,A}_{n\ \text{сомножителей}}.$$

Очевидно, справедливо соотношение $A^{n+m}=A^nA^m$.

Нам понадобится понятие обратного оператора для данного оператора A из $L(V,V)$.

Линейный оператор B из $L(V,V)$ называет*ся обратным* для оператора A из $L(V,V)$, если выполняется соотношение $AB=BA=I$. Обратный оператор для оператора A обычно обозначается символом A^{-1}.

Из определения обратного оператора A^{-1} следует, что для любого $\boldsymbol{x}\in V$ справедливо соотношение $A^{-1}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

Таким образом, если $A^{-1}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, т.е. если оператор A имеет обратный, то из условия $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ следует, что $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

Мы будем говорить, что линейный оператор A действует взаимно однозначно из V в V, если любым двум различным элементам $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ отвечают различные элементы $\boldsymbol{y}_1=A\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{y}_2=A\boldsymbol{x}_2$.

Если оператор A действует взаимно однозначно из V в V, то отображение $A:V\to V$ представляет собой отображение V на V, т.е. каждый элемент $\boldsymbol{y}\in V$ представляет собой образ некоторого элемента $\boldsymbol{x}\in V$: $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно, очевидно, доказать, что n линейно независимых элементов $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ пространства V

отображаются посредством оператора A в n линейно независимых элементов $A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, ..., A\boldsymbol{x}_n$ этого же пространства.

Теорема 1 Для того чтобы линейный оператор A из $L(V,V)$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы этот оператор действовал взаимно однозначно из V в V.

Необходимость. Пусть оператор A имеет обратный, но не действует взаимно однозначно из V в V. Это означает, что некоторым различным элементам $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ из V отвечает один и тот же элемент $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_2$. Но тогда $A(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0}$, и поскольку A имеет обратный, $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$. Но выше было отмечено, что $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия утверждения.

Достаточность. Допустим, что оператор A действует взаимно однозначно из V в V. Тогда каждому элементу $\boldsymbol{y} \in V$ отвечает элемент $\boldsymbol{x} \in V$ такой, что $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$. Поэтому имеется оператор A^{-1}, обладающий тем свойством; что $A^{-1}\boldsymbol{y} = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Легко убедиться, что оператор A^{-1} линейный. По определению A^{-1} – обратный оператор для оператора A. Достаточность условия утверждения также доказана.

Матричная запись линейных операторов

Фиксируем в линейном пространстве V базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$. Пусть $\boldsymbol{x}$ – произвольный элемент V и

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k \tag{5}$$

разложение $\boldsymbol{x}$ по данному базису.

Пусть A – линейный оператор из $L(V,V)$. Тогда из (5) получаем

$$A\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k A\boldsymbol{e}_k . \tag{6}$$

Полагая

$$A\boldsymbol{e}_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \boldsymbol{e}_j \tag{7}$$

перепишем (6) в следующей форме:

$$A\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \right) \boldsymbol{e}_j .$$

Таким образом, если $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ и элемент $\boldsymbol{y}$ имеет координаты $y_1, y_2, ..., y_n$, то

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k, \qquad j = \overline{1, n}. \tag{8}$$

Рассмотрим квадратную матрицу $\widetilde{A}$ с элементами a_{jk}: $\widetilde{A} = (a_{jk})$. Эта матрица называется *матрицей линейного оператора* в заданном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$.

Замечание 1 Если оператор A нулевой, то все элементы матрицы $\widetilde{A}$ этого оператора равны нулю в любом базисе, т.е. $\widetilde{A}$ – нулевая матрица.

Замечание 2 Если оператор A единичный, т.е. $A = I$, то матрица этого оператора будет единичной в любом базисе.

Пример 2 Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ в вектор $A\boldsymbol{x}=(x_1+x_2;x_2;2x_1-x_2+3x_3)$. Определить, является ли оператор A линейным. Если да, то записать его матрицу.

Решение. Пусть $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$, тогда $A\boldsymbol{y}=(y_1+y_2;y_2;2y_1-y_2+3y_3)$. Будем иметь

$$A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y}=(x_1+x_2+y_1+y_2;x_2+y_2;2x_1-x_2+3x_3+2y_1-y_2+3y_3),$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1;x_2+y_2;x_3+y_3),$$

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(x_1+x_2+y_1+y_2;x_2+y_2;2x_1-x_2+3x_3+2y_1-y_2+3y_3).$$

Видим, что $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y}$.

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3),$$

$$A(\alpha\boldsymbol{x})=(\alpha x_1+\alpha x_2;\alpha x_2;2\alpha x_1-\alpha x_2+3\alpha x_3)=(\alpha(x_1+x_2);\alpha x_2;\alpha(2x_1-x_2+3x_3))=\alpha(A\boldsymbol{x}),$$

т.е. $A(\boldsymbol{\alpha x})=\alpha(A\boldsymbol{x})$. Оба свойства выполнены, поэтому оператор A является линейным.

Для нахождения матрицы этого оператора вычислим координаты базисных векторов $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ под действием оператора A:

$$A\boldsymbol{e}_1=(1,0,2),\qquad A\boldsymbol{e}_2=(1,1,-1),\qquad A\boldsymbol{e}_3=(0,0,3).$$

Запишем полученные координаты в виде столбцов матрицы:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\2&-1&3\end{pmatrix}.$$

Пример 3 В пространстве матриц второго порядка с обычными операциями сложения матриц и умножения матриц на число действует линейный оператор по правилу $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Решение. Найдем образы базисных векторов под действием линейного оператора:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}=1E_1+2E_2+0E_3+0E_4=(1;\ 2;\ 0;\ 0),$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\0&0\end{pmatrix}=3E_1+4E_2+0E_3+0E_4=(3;\ 4;\ 0;\ 0),$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}=0E_1+0E_2+1E_3+2E_4=(0;\ 0;\ 1;\ 2),$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\3&4\end{pmatrix}=0E_1+0E_2+3E_3+4E_4=(0;\ 0;\ 3;\ 4).$$

Тогда матрица линейного оператора имеет вид: $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\2&4&0&0\\0&0&1&3\\0&0&2&4\end{pmatrix}$.

Мы выяснили, что каждому линейному оператору A из $L(V,V)$ при заданном базисе линейного пространства V отвечает матрица $\widetilde{A}$ этого оператора. Естественно возникает обратный вопрос – каждой ли данной матрице $\widetilde{A}$ при заданном базисе в V можно поставить в соответствие линейный оператор A, матрицей которого будет данная матрица. Важно также выяснить вопрос о единственности матрицы линейного оператора в заданном базисе.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 Пусть в линейном пространстве V задан базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$, и пусть $\widetilde{A} = (a_{jk})$ – квадратная матрица, содержащая n строк и n столбцов. Существует единственный линейный оператор A, матрицей которого в заданном базисе является матрица $\widetilde{A}$.

Доказательство. Докажем сначала существование оператора A. Для этой цели определим значения $A\boldsymbol{e}_k$ этого оператора на базисных векторах $\boldsymbol{e}_k$ с помощью соотношения (7), полагая в этом соотношении a_{jk}, равными соответствующим элементам заданной матрицы $\widetilde{A}$. Значение оператора A на произвольном векторе $\boldsymbol{x} \in V$, разложение которого по базисным векторам $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ дается формулой (5), определим по формуле (6).

Очевидно, построенный оператор линейный и матрицей этого оператора является матрица $\widetilde{A}$.

Единственность оператора A, матрицей которого в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ является матрица $\widetilde{A}$, следует из соотношений (1.7): с помощью этих соотношений единственным образом определяются значения оператора на базисных векторах.

Следствие Обратный оператор A^{-1} для оператора A существует только тогда, когда ранг матрицы $\widetilde{A}$ оператора A равен n, т.е. размерности пространства. Отметим, что в этом случае существует также и обратная матрица $\widetilde{A}^{-1}$ для матрицы $\widetilde{A}$.

Замечание Пусть A и B – квадратные матрицы порядка n, A и B – отвечающие им линейные операторы в заданном базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$ пространства V. Из доказательства теоремы 2 следует, что матрице $\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B}$, где λ – некоторое число, отвечает линейный оператор $A + \lambda B$ (напомним, что A, B и $A + \lambda B$ принадлежат $L(V, V)$).

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Пусть V – линейное пространство, A – линейный оператор из $L(V, V)$, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, ..., \boldsymbol{e}'_n$ – два базиса в V и

$$\boldsymbol{e}'_k = \sum_{i=1}^{n} t_{ik}\boldsymbol{e}_i, \qquad k = \overline{1, n} \tag{9}$$

– формулы перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_k\}$ к базису $\{\boldsymbol{e}'_k\}$. Обозначим через T матрицу (t_{ik}):

$$T = (t_{ik}).$$

Отметим, что $rang T = n$. Пусть

$$\widetilde{A} = (a_{jk}) \text{ и } \widetilde{A}' = (a'_{jk})$$

– матрицы оператора A в указанных базисах. Найдем связь между этими матрицами.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3 Матрицы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}'$ оператора A в базисах $\{\boldsymbol{e}_k\}$ и $\{\boldsymbol{e}'_k\}$ соответственно связаны соотношением

$$\widetilde{A}' = T^{-1}\widetilde{A}T, \qquad (10)$$

где T^{-1} – обратная матрица для матрицы T.

Пусть $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ и $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, ..., \boldsymbol{e}'_n\}$ – два базиса *V*, $\widetilde{A}$ – матрица *A* в базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$, $\widetilde{A}'$ – матрица *A* в базисе $\{\boldsymbol{e}'_k\}$. Пусть T – матрица переход а от $\{\boldsymbol{e}_k\}$ к $\{\boldsymbol{e}'_k\}$, т.е. $\boldsymbol{e}'_k = \sum_{i=1}^{n} t_{ik}\boldsymbol{e}_i$.

Посчитаем $A\boldsymbol{e}'_k$ двумя способами:

1) $A\boldsymbol{e}'_k = A\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ik}\boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_{ik}A\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ik}a_{ji}\boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}t_{ik}\right)\boldsymbol{e}_j$.

2) $A\boldsymbol{e}'_k = \sum_{i=1}^{n} a'_{ik}\boldsymbol{e}'_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a'_{ik}t_{ji}\boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ji}a'_{ik}\right)\boldsymbol{e}_j$.

Отсюда, $\sum_{i=1}^{n} t_{ji}a'_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}t_{ik}$, т.е. $T\widetilde{A}' = \widetilde{A}T$. Умножая обе части этого равенства слева на матрицу T^{-1}, получим требуемое соотношение $\widetilde{A}' = T^{-1}\widetilde{A}T$. *Теорема доказана.*

Пример 4 Дана матрица линейного оператора $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}'_1 = (5,3)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (2,1)$.

Запишем матрицу перехода, найдем к ней обратную:

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу $\widetilde{A}'$ по формуле (10):

$$\widetilde{A}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 16 \\ -102 & -38 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1 Обратимся к формуле $\widetilde{A}' = T^{-1}\widetilde{A}T$. Умножая обе части этого матричного равенства слева на матрицу T и справа на T^{-1}, получим соотношение

$$\widetilde{A} = T\widetilde{A}'T^{-1}, \qquad (11)$$

представляющее собой другую форму связи между матрицами $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}'$ линейного оператора *A* в разных базисах.

Замечание 2 Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ – квадратные матрицы порядка n, *A* и *B* – отвечающие им линейные операторы в заданном базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$. Как уже отмечалось выше, матрице $\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B}$ отвечает линейный оператор $A + \lambda B$. Выясним вид матрицы этого оператора в базисе $\{\boldsymbol{e}'_k\}$. Пусть $\widetilde{A}'$ и $\widetilde{B}'$ – матрицы операторов *A* и *B* в базисе $\{\boldsymbol{e}'_k\}$. Тогда, согласно (10), имеем

$$\widetilde{A}' = T^{-1}\widetilde{A}T, \qquad \widetilde{B}' = T^{-1}\widetilde{B}T.$$

Матрица линейного оператора $A + \lambda B$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_k\}$ имеет, согласно (10), следующий вид: $T^{-1}\left(\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B}\right)T$. Используя распределительное свойство умножения матриц, перепишем последнюю формулу следующим образом (напомним, что эта формула представляет собой матрицу линейного оператора $A + \lambda B$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_k\}$):

$$T^{1}\widetilde{A}T + \lambda\left(T^{-1}\widetilde{B}T\right) = \widetilde{A}' + \lambda\widetilde{B}'.$$

Утверждение $\det\widetilde{A} = \det\widetilde{A}'$.

Доказательство. Из соотношения $\widetilde{A} = T\widetilde{A}'T^{-1}$ и свойства определителя (определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц) следует, что

$$\det \widetilde{A} = \det T \det \widetilde{A}' \det T^{-1}. \qquad (12)$$

Поскольку $\det T \det T^{-1} = 1$, то из соотношения (12) получаем равенство $\det \widetilde{A} = \det \widetilde{A}'$. Таким образом, определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса. Поэтому можно ввести понятие *определителя линейного оператора A*, полагая

$$\det A = \det \widetilde{A}, \qquad (13)$$

где $\widetilde{A}$ –матрица линейного оператора A в любом базисе.