# ПОЛОЖИТЕЛЬНООПРЕДЕЛЕННЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

## Закон инерции квадратичных форм. Классификация квадратичных форм

**Закон инерции квадратичных форм**. Мы уже отмечали выше, что ранг квадратичной формы равен числу отличных от нуля канонических коэффициентов. Таким образом, число отличных от нуля канонических коэффициентов не зависит от выбора невырожденного преобразования, с помощью которого форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ приводится к каноническому виду. На самом деле при любом способе приведения формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ к каноническому виду не меняется число положительных и отрицательных канонических коэффициентов. Это свойство называется *законом инерции* квадратичных форм.

Прежде чем перейти к обоснованию закона инерции, сделаем некоторые замечания.

Пусть форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ в базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ определяется матрицей $A(e) = (a_{ij})$:

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j , \tag{1}$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Допустим, что эта форма с помощью невырожденного преобразования координат приведена к каноническому виду

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_k y_k^2 , \tag{2}$$

причем $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ – отличные от нуля канонические коэффициенты, занумерованные так, что первые $p$ из этих коэффициентов положительные, а следующие коэффициенты – отрицательные:

$$\lambda_1 > 0 ,\ \lambda_2 > 0 ,\ \dots,\ \lambda_p > 0,\ \lambda_{p+1} < 0,\ \dots,\ \lambda_k < 0 .$$

Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат $y_i$:

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} y_1, z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}} y_2, ..., z_p = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_p}} y_p , \\ z_{p+1} = \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} y_{p+1}, ..., z_k = \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} y_k , \\ z_{k+1} = y_{k+1},\ ...,\ z_n = y_n . \end{cases} \tag{3}$$

В результате этого преобразования форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ примет вид

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = z_1^2 + z_2^2 + ... + z_p^2 - z_{p+1}^2 - ... - z_k^2 , \tag{4}$$

называемый *нормальным видом* квадратичной формы.

Итак, с помощью некоторого невырожденного преобразования координат $x_1, x_2, ..., x_n$ вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$

$$z_i = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + ... + \alpha_{in} x_n ,\ i = \overline{1, n},\ \det(\alpha_{ij}) \neq 0 \tag{5}$$

(это преобразование представляет собой произведение преобразований $x$ в $y$ и $y$ в $z$ по формулам (3)) квадратичная форма может быть приведена к нормальному виду (4).

Докажем следующее утверждение:

**Теорема 1 (закон инерции квадратичных форм)** Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами в нормальном виде квадратичной формы не зависит от способа приведения формы к этому виду.

*Доказательство*. Пусть форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ с помощью невырожденного преобразования координат (5) приведена к нормальному виду (4) и с помощью другого невырожденного преобразования координат приведена к нормальному виду

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2 - y_{m+1}^2 - \ldots - y_k^2. \tag{6}$$

Очевидно, для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости равенства $m = p$.

Пусть $m > p$. Убедимся, что в этом случае имеется ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ такой, что по отношению к базисам, в которых форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ имеет вид (4) и (6) координаты $z_1, z_2, \ldots, z_p$ и $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n$ этого вектора равны нулю:

$$z_1 = 0,\ z_2 = 0,\ \ldots,\ z_p = 0,\ y_{m+1} = 0,\ \ldots,\ y_n = 0. \tag{7}$$

Так как координаты $z_i$ получены путем невырожденного преобразования (5) координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а координаты $y_j$ – с помощью аналогичного невырожденного преобразования этих же координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то соотношения (7) можно рассматривать как систему линейных однородных уравнений относительно координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ искомого вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Так как $m > p$, то число однородных уравнений (7) меньше $n$, и поэтому система (7) имеет ненулевое решение относительно координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ искомого вектора $\boldsymbol{x}$. Следовательно, если $m > p$, то существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$, для которого выполняются соотношения (7).

Подсчитаем значение формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ для этого вектора $\boldsymbol{x}$. Обращаясь к соотношениям (4) и (6), получим

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -z_{p+1}^2 - \ldots - z_k^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2.$$

Последнее равенство может иметь место лишь в случае $z_{p+1} = \ldots = z_k = 0$ и $y_1 = \ldots = y_m = 0$. Таким образом, в некотором базисе все координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ненулевого вектора $\boldsymbol{x}$ равны нулю, т.е. вектор $\boldsymbol{x}$ равен нулю. Следовательно, предположение $m > p$ ведет к противоречию. По аналогичным соображениям ведет к противоречию и предположение $m < p$.

Итак, $m = p$. Теорема доказана.

**Следствие.** Формы $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ и $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $rangA = rangB$, положительные и отрицательные индексы инерции совпадают.

**Классификация квадратичных форм.** В этом пункте с помощью понятий индекса инерции, положительного и отрицательного индексов инерции квадратичной формы мы укажем, каким образом можно выяснить принадлежность квадратичной формы к тому или иному из перечисленных выше типов (положительно определенной, отрицательно определенной, знакопеременной и квазизнакоопределенной). При этом *индексом инерции* квадратичной формы мы будем называть число отличных от нуля канонических коэффициентов этой формы (т.е. ее ранг), *положительным индексом инерции* – число положительных канонических коэффициентов, *отрицательным индексом инерции* – число отрицательных канонических коэффициентов. Ясно, что сумма положительного и отрицательного индексов инерции равна индексу инерции. Пара $(p, m)$ называется *сигнатурой* квадратичной формы.

Итак, пусть индекс инерции, положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ соответственно равны $k$, $p$ и $m$ ($k = p + m$). В предыдущем пункте было доказано, что в любом каноническом базисе $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n\}$ эта форма может быть приведена к следующему нормальному виду:

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = z_1^2 + z_2^2 + ... + z_p^2 - z_{p+1}^2 - ... - z_k^2, \tag{8}$$

где $z_1, z_2, ..., z_p$ – координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{f}$.

**Пример 1** Найти нормальный вид и сигнатуру квадратичной формы

$$g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Канонический вид этой формы имеет вид: $g = 2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{-17}{2}y_3^2$. Положим $\sqrt{2}y_1 = z_1$, $\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 = z_2$, $\sqrt{\frac{17}{2}}y_3 = z_3$. Тогда $g = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$. Это нормальный вид квадратичной формы. Положительный индекс инерции: $p = i_+ = 2$, отрицательный индекс инерции $m = i_- = 1$. Следовательно сигнатура квадратичной формы $(2, 1)$.

Справедливо следующее утверждение:

**Теорема 2 (необходимое и достаточное условие знакоопределенности квадратичной формы)** Для того чтобы квадратичная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, заданная в $n$-мерном линейном пространстве $L$, была знакоопределенной, необходимо и достаточно, чтобы либо положительный индекс инерции $p$, либо отрицательный индекс инерции $m$ был равен размерности $n$ пространства $L$. При этом, если $p = n$, то форма положительно определенная, если же $m = n$, то форма отрицательно определенная.

*Доказательство*. Так как случаи положительно определенной формы и отрицательно определенной формы рассматриваются аналогично, то доказательство утверждения проведем для положительно определенных форм.

*Необходимость*. Пусть форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ положительно определена. Тогда выражение (8) примет вид

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = z_1^2 + z_2^2 + ... + z_p^2.$$

Если при этом $p < n$, то из последнего выражения следует, что для ненулевого вектора $\boldsymbol{x}$ с координатами $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, …, $z_p = 0$, $z_{p+1} \neq 0$, …, $z_n \neq 0$ форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ обращается в нуль, а это противоречит определению положительно определенной квадратичной формы. Следовательно, $p = n$.

*Достаточность*. Пусть $p = n$. Тогда соотношение (8) имеет вид $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2$. Ясно, что $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$, причем, если $B = 0$, то $y_1 = y_2 = ... = y_n = 0$, т.е. вектор $\boldsymbol{x}$ нулевой. Следовательно, $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ – положительно определенная форма.

**Замечание**. Для выяснения вопроса о знакоопределенности квадратичной формы с помощью указанного признака мы должны привести эту форму к каноническому виду.

**Теорема 3 (необходимое и достаточное условие знакопеременности квадратичной формы)** Для того чтобы квадратичная форма была знакопеременной, необходимо и достаточно, чтобы как положительный, так и отрицательный индексы инерции этой формы были отличны от нуля.

*Доказательство*.

*Необходимость.* Так как знакопеременная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения, то ее представление (8) в нормальном виде должно содержать как положительные, так и отрицательные слагаемые (в противном случае эта форма принимала бы либо неотрицательные, либо неположительные значения). Следовательно, как положительный, так и отрицательный индексы инерции отличны от нуля.

*Достаточность.* Пусть $p \neq 0$ и $m \neq 0$. Тогда для вектора $\boldsymbol{x}_1$ с координатами $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, …, $z_p \neq 0$, $z_{p+1} = 0$, …, $z_n = 0$ имеем $B(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) > 0$, а для вектора $\boldsymbol{x}_2$ с координатами $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, …, $z_p = 0$, $z_{p+1} \neq 0$, …, $z_n \neq 0$ имеем $B(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) < 0$. Следовательно, форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ является знакопеременной.

**Теорема 4 (необходимое и достаточное условие квазизнакоопределенности квадратичной формы***)* *Для* того чтобы форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ была квазизнакоопределенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения: либо $p < n$, $m = 0$, либо $p = 0$, $m < n$.

*Доказательство.* Мы рассмотрим случай положительно квазизнакоопределенной формы. Случай отрицательно квазизнакоопределенной формы рассматривается аналогично.

*Необходимость.* Пусть форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ положительно квазизнакоопределенная. Тогда, очевидно, $m = 0$ и $p < n$ (если бы $p = n$, то форма была бы положительно определенной).

*Достаточность.* Если $p < n$, $m = 0$, то $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ и для ненулевого вектора $\boldsymbol{x}$ с координатами $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, …, $z_p = 0$, $z_{p+1} \neq 0$, …, $z_n \neq 0$ имеем $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, т.е. $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ – положительно квазизнакоопределенная форма.

**Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы**. **Пусть форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ в базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ определяется матрицей $B(\boldsymbol{e}) = (a_{ij})$:**
$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ и пусть $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, …, $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$ – угловые (главные) миноры и определитель матрицы $(a_{ij})$. Справедливо следующее утверждение:

**Теорема 5 (критерий Сильвестра)** Для того чтобы квадратичная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, …, $\Delta_n > 0$.

*Для* того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, причем $\Delta_1 < 0$.

*Доказательство.*

*Необходимость.* Докажем сначала, что из условия знакоопределенности квадратичной формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ следует $\Delta_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$.

Убедимся, что предположение $\Delta_k = 0$ ведет к противоречию – при этом предположении существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$, для которого $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, что противоречит знакоопределенности формы.

Итак, пусть $\Delta_k = 0$. Рассмотрим следующую квадратную однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k = 0, \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kk}x_k = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Так как $\Delta_k$ – определитель этой системы и $\Delta_k = 0$, то система (9) имеет ненулевое решение $x_1, x_2, ..., x_k$ (не все $x_i$, равны нулю). Умножим первое из уравнений (9) на $x_1$, второе на $x_2$, ..., последнее на $x_k$ и сложим полученные соотношения. В результате получим равенство $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = 0$, левая часть которого представляет собой значение квадратичной формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ для ненулевого вектора $\boldsymbol{x}$ с координатами $(x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0)$. Это значение равно нулю, что противоречит знакоопределенности формы.

Итак, мы убедились, что $\Delta_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$. Поэтому мы можем применить метод Якоби приведения формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ к сумме квадратов и воспользоваться формулами Якоби для канонических коэффициентов $\lambda_i$. Если $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ – положительно определенная форма, то все канонические коэффициенты положительны. Но тогда из соотношений Якоби следует, что $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$. Если же $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ – отрицательно определенная форма, то все канонические коэффициенты отрицательны. Но тогда из формул Якоби следует, что знаки угловых миноров чередуются, причем $\Delta_1 < 0$.

*Достаточность*. Пусть выполнены условия, наложенные на угловые миноры $\Delta_i$ в формулировке теоремы. Так как $\Delta_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, то форму $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ можно привести к сумме квадратов методом Якоби, причем канонические коэффициенты $\lambda_i$ могут быть найдены по формулам Якоби. Если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, …, $\Delta_n > 0$, то из соотношений Якоби следует, что все $\lambda_i > 0$, т.е. форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ положительно определенная. Если же знаки $\Delta_i$ чередуются и $\Delta_1 < 0$, то из соотношений Якоби следует, что форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ отрицательно определенная. Теорема доказана.

**Пример 2** Исследовать на положительную определенность квадратичную форму

$$g(x_1, x_2, x_3) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Матрица квадратичной формы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$. Тогда главные миноры: $\Delta_1 = 17 > 0$, $\Delta_2 = 234 > 0$, $\Delta_3 = 2916 > 0$. Все главные миноры положительны. По критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определена.