3.1 Унітарний (ортогональний) оператор

Лінійний оператор $U \in L(U, U)$ $(U \in L(E, E))$ називається *унітарним* (*ортогональним*) оператором, якщо $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ справедливе співвідношення

$$(U\mathbf{x}, U\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{3.16}$$

Надалі співвідношення (3. 16) назвемо *умовою унітарності оператора* .

Зауваження 1 З умови (3. 16) унітарності оператора випливає, що для будь-якого унітарного оператора U вірна рівність$\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

Зверніть увагу на наступне твердження.

Теорема 3.11 Якщо λ — власне значення унітарного оператора U, тоді$|\lambda| = 1$.

Доведення. Дійсно, якщо λ є власним значенням U, то існує такий елемент $\mathbf{e}$, що $\|\mathbf{e}\| = 1$ і $U\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$. Звідси і з зауваження 1 випливають співвідношення. $|\lambda| = \|\lambda\mathbf{e}\| = \|U\mathbf{e}\| = \|\mathbf{e}\| = 1$. *Теорема доведена*.

Теорема 3.12 Для того щоб лінійний оператор U, що діє в евклідовому просторі E, був унітарним, необхідно і достатньо, щоб було виконано співвідношення

$$U^* = U^{-1}. \tag{3.17}$$

Доведення. 1) *Необхідність*. Нехай оператор U є унітарним, тобто виконується умова (3. 16). Звернувшись до визначення спряженого оператора U^*, цю умову можна переписати в наступному вигляді:

$$\left(U^*U\mathbf{x}, \mathbf{y}\right) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Або, іншими словами, для будь-якого $\mathbf{x}$ і y виконується рівність $\left(\left(U^*U - I\right)\mathbf{x}, \mathbf{y}\right) = 0.$

Зафіксувавши будь-який елемент $\mathbf{x}$ в цій рівності і вважаючи $\mathbf{y}$ довільним, отримаємо, що лінійний оператор діє за правилом $U^*U - I\left(U^*U - I\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Тому, $U^*U = I$. Аналогічно, ви можете побачити, що $UU^* = I$

Таким чином, U і U^* є взаємно оберненими операторами, тобто співвідношення (3. 17) виконано.

2) *Достатність*. Нехай умова буде виконано (3. 17). Тоді, очевидно, $U^*U = UU^* = I$. Звернувшись до визначення спряженого оператора і використовуючи тільки що записані відносини, отримаємо при будь-якому $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ рівність

$$(\mathbf{x}, U\mathbf{y}) = \left(\mathbf{x}, U^*U\mathbf{y}\right) = (\mathbf{x}, I\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Таким чином, умова (3. 16) унітарності оператора виконується. Отже, оператор U є унітарним. *Теорема доведена*.

Зауваження 2 У процесі доведення теореми встановлено, що умова (3.16) унітарності оператора U і умова

$$U^*U = UU^* = I \tag{3.18}$$

еквівалентні. Таким чином, визначення унітарного оператора може бути засноване на умові (3. 18). Ця умова також може називатися *умовою унітарності оператора U*.

Матриця U називається *ортогональною*, якщо

$$U^tU = UU^t = E. \tag{3.19}$$

Якщо – $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ ортонормований базис в евклідовому просторі E, тоді оператор U є ортогональним тоді і тільки тоді, коли його матриця в базисі $\{\mathbf{e}_k\}$ ортогональна.

Властивості ортогональних матриць:

1. Дійсна квадратна матриця A є ортогональною тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з рівностей $A^tA = E\ AA^t = E$.
2. Одинична матриця ортогональна. Нульова матриця не є ортогональною.

3. Якщо матриця ортогональна A, то A^t також ортогональна.

4. Якщо матриці A ортогональні B, то AB ортогональнаі.

5. Визначником ортогональної матриці є 1 або -1.

6. Дійсна квадратна матриця A є ортогональною тоді і тільки тоді, коли всі її рядки (стовпці) утворюють ортонормований базис в E^n.

7. Матриця переходу від ортонормованого базису до ортонормованого базису ортогональна.

8. Якщо матриця переходу від одного базису до іншого ортогональна і один з цих базисів ортонормований, то другий базис є ортонормованим.

Безпосередньо з рівності (3. 19) випливає, що якщо матриця $U = (u_{ik})$ ортогональна, то

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^k u_i^l = \begin{cases} 1, k = l; \\ 0, k \neq l. \end{cases}$$

На закінчення розглянемо ортогональні перетворення в одновимірних і двовимірних просторах на прикладі.

В одновимірному випадку кожен вектор $\mathbf{x}$ має вигляд $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{e}$, де α - дійсне число, а $\mathbf{e}$ - вектор, який породжує даний простір. Тоді $U\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$, і оскільки , $(U\mathbf{e}, U\mathbf{e}) = \lambda^2(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = (\mathbf{e}, \mathbf{e})$, тоді $\lambda = \pm 1$

Таким чином, в одновимірному випадку існує два ортогональних перетворення: $U_+\mathbf{x} = \mathbf{x}$ і $U_-\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

У двовимірному випадку кожне ортогональне перетворення визначається в довільному ортогональному базисі ортогональною матрицею другого порядку, тобто матрицею $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Із умови (3.18) випливає

$$a^2 + b^2 = 1,\ a^2 = d^2,.\ b^2 = c^2, ac + db = 0, ab + cd = 0$$

Припускаючи $a = cos\,\phi$, $b = -\,sin\,\phi$, отримуємо, що кожна ортогональна матриця другого порядку має вигляд

$$Q_{\pm} = \begin{pmatrix} cos\,\phi & -\,sin\,\phi \\ \pm\,sin\,\phi & \pm\,cos\,\phi \end{pmatrix},$$

Причому в другому рядку в обох випадках слід взяти або знак +, або знак -.

Зверніть увагу, що $\det Q_{\pm} = \pm 1$. Ортогональна матриця називається власною матрицею Q_+, а ортогональна матриця Q_- називається *невласною матрицею*.

Оператор U_+ з матрицею Q_+ в ортонормованому базисі $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ здійснює поворот в площині $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ на кут φ.

Для того щоб дізнатися, як оператор працює U_- з матрицею Q_- , введемо матрицю $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, яка збігається з Q_- при $\varphi = 0$, і відзначимо, що $Q_- = QQ_+$. Матриці Q відповідає відображеня площини щодо осі $\mathbf{e}_1$, і тому дія оператора полягає в повороті на кут φ а потім відображенні.

У загальному випадку, коли ортогональний оператор U діє в n-вимірному евклідовому просторі, існує ортонормований базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, в якому матриця оператора Q має вигляд

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 & & & \\ & & & & & \sin\phi_1 & -\cos\phi_1 & & & \\ & & 0 & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \cos\phi_k & -\sin\phi_k \\ & & & & & & & & \sin\phi_k & -\cos\phi_k \end{pmatrix}.$$

У цій матриці всі елементи, крім виписаних, дорівнюють нулю.

Таким чином, в деякому ортонормованому базисі дія ортогонального оператора зводиться до послідовних обертань і відображень щодо осей координат.

3.2 Нормальний оператор

Лінійний оператор A називається *нормальним,* якщо має місце відношення

$$A^*A = AA^*. \tag{3.19}$$

Посилаючись на умову (3. 18) унітарність оператора і до умови (3. 19), ми бачимо, що будь-який унітарний оператор є нормальним оператором.

Лема. Нехай А — нормальний *оператор. Тоді оператор A* і оператор A^* мають спільний власний вектор $\boldsymbol{e}$ такий, що $\|\mathbf{e}\| = 1$, і справедливі співвідношення: $A\boldsymbol{e} = \lambda\boldsymbol{e}$ і $A^*\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$

Доведення. Нехай λ – власне значення *оператора A,* і нехай $R_\lambda = ker(A - \lambda I)$. Іншими словами, R_λ – множина всіх елементів **x** така, що$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Давайте тепер переконаємося, що якщо **x** належить R_λ , то і A^*x належить R_λ. Дійсно, якщо $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ (тобто $\mathbf{x} \in R_\lambda$), то, оскільки А є нормальним оператором, $A(A^*\mathbf{x}) = A^*(A\mathbf{x}) = A^*(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A^*\mathbf{x})$.

є власним вектором оператора A і відповідає власному значенню $\lambda A^*\mathbf{x}$, тобто належить . Іншими словами, вектор A^*x є власним вектором оператора A і відповідає власному значенню λ, тобто належить R_λ.

Розглядаючи далі оператор A^* як оператор, що діє з R_λ в R_λ, і використовуючи висновок, що кожен лінійний оператор має своє власне значення, можна стверджувати, що в R_λ існує елемент $\boldsymbol{e}$ такий, що $\|\mathbf{e}\| = 1$ і справедливі співвідношення $A^*\boldsymbol{e} = \mu\boldsymbol{e}$ і $A^*\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$. Використовуючи ці співвідношення і умову $\|\mathbf{e}\| = 1$, знаходимо

$$(A\mathbf{e}, \mathbf{e}) = (\lambda\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \lambda\|\mathbf{e}\|^2 = \lambda,. \qquad (\mathbf{e}, A^*\mathbf{e}) = (\mathbf{e}, \mu\mathbf{e}) = \bar{\mu}\|\mathbf{e}\|^2 = \bar{\mu}$$

Оскільки ,$(A\mathbf{e}, \mathbf{e}) = (\mathbf{e}, A^*\mathbf{e})$ то, очевидно,$\lambda = \mu$. *Лема доведена*.

Теорема 3.13 Нехай A – нормальний оператор. Тоді існує ортонормований базис $\{\mathbf{e}_k\}$, що складається з власних векторів операторів A і A^*

Наслідок 1 Нехай A – нормальний оператор. Існує базис, $\{\mathbf{e}_k\}$ в якому A має діагональну матрицю.

Наслідок 2 Унітарний оператор має повну ортонормовану систему власних векторів.

Наступна теорема є оберненою теоремі 3.13.

Теорема 3.14 Якщо оператор A, що діє в n-вимірному евклідовому просторі E, має n попарно ортогональних власних елементів $\mathbf{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2 ...,$, $\mathbf{e}_n$ тоді оператор A є нормальним.