3 ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ

3.1 Спряжений оператор

НехайE це буде евклідовий простір.

Лінійний оператор називається $A^*: E \to E$ *спряженим* лінійному оператору $A: E \to E$, якщо для будь-яких $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ з E виконується відношення

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y}). \tag{3,1}$$

Легко переконатися, що операторA^*, спряжений з лінійним оператором A, сам є лінійним оператором. Це випливає з очевидного взаємозв'язку

$$(A\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2) = \bar{\alpha}(A\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \bar{\beta}(A\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) = \bar{\alpha}(\mathbf{x}, A^*\mathbf{y}_1) + \bar{\beta}(\mathbf{x}, A^*\mathbf{y}_2) = \big(\mathbf{x}, A^*(\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2)\big),$$

справедливий для будь-яких елементів $\boldsymbol{x}$, і $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_1$ будь-яких комплексних чисел α і β.

Лема 3.1 Якщо квадратні матриці M і N порядку n такі, що для будь-яких векторних стовпців $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$ виконується співвідношення $\mathbf{x}^t M\mathbf{y} = \mathbf{x}^t N\mathbf{y}$, тоді$M = N$.

Теорема 3.1 Будь-якому лінійному оператору$A: E \to E$ відповідає один спряжений оператор A^*, а його матрицею в будь-якому *ортонормованому* базисі $\boldsymbol{e}$ є матриця $\tilde{A}^t$, транспонована матриці лінійного оператора $\tilde{A}$ A в тому ж базисі .$\boldsymbol{e}$

Доведення. Доказ теореми засноване на тому, що фіксований базис евклідового простору E дозволяє встановити взаємо однозначну відповідність між лінійними операторами з $L(E, E)$ і квадратними матрицями з дійсними елементами розміру $n = dim\,E$. Ця відповідність полягає в відображенні *лінійного оператора* її *матриці* на фіксованій основі.

Доведемо, що лінійний оператор з матрицею в базисі спряжений з лінійним оператором $B\,\tilde{B} = \tilde{A}^t\boldsymbol{e}A$. Для цього достатньо перевірити рівність

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{y}). \tag{3,2}$$

для будь-якої пари векторів .$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$

Нехай x, y– стовпці у координат векторів $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ в базисі $\boldsymbol{e}$. Тоді вектор $A\mathbf{x}$ має стовпчик координат стовпця $\tilde{A}x$, а ліва частина рівності (3.2) дорівнює $\big(\tilde{A}x\big)^t y$, що випливає з ортонормованості базису. Аналогічно, права частина цієї рівності дорівнює $x^t\big(\tilde{B}y\big)$. Тому значення (3.2) в координатних позначеннях має вигляд

$$\big(\tilde{A}x\big)^t y = x^t\big(\tilde{B}y\big). \tag{3,3}$$

Так як $\big(\tilde{A}x\big)^t = x^t\tilde{A}^t$ в силу властивостей матричних операцій рівність (3.3) рівнозначно рівності

$$x^t\tilde{A}^t y = x^t\tilde{B}y,(\qquad 3.4)$$

яка при $\tilde{B} = \tilde{A}^t$ перетворюється на тотожність.

Якщо деякий лінійний оператор B спряжений з лінійним оператором A, то для будь-яких векторів $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ рівність (3.2) задовольняється. Це означає, що для матриць цих операторів рівність (3.4) вірна для будь-яких стовпців x і .y. Згідно з лемою, $\tilde{B} = \tilde{A}^t$ Тому лінійний оператор визначається B однозначно, оскільки його матриця однозначно визначена.

Характеристичні многочлени (а отже, і спектри) лінійного оператора і його спряженого оператора збігаються.

У деяких випадках лінійний оператор, спряжений до даного лінійного оператора, може бути знайдений без обчислення матриць цього оператора.

Зверніть увагу на наступні властивості спряжених операторів:

1. .4. .$I^* = I$ — $(A^*)^* = A$
2. .5. .$(A+B)^* = A^* + B^*$ — $(AB)^* = B^*A^*$
3. .$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$

Доведення властивостей від 1 до 4 є елементарними. Ось доведення власності 5.

Згідно з визначенням добутку операторів, справедливе співвідношення $(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x})$. За допомогою цього рівності і визначення спряженого оператора отримаємо наступний ланцюжок відносин:

$$\big((AB)\mathbf{x}, \mathbf{y}\big) = (A(B)\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (B\mathbf{x}, A^*\mathbf{y}) = \big(\mathbf{x}, B^*(A^*\mathbf{y})\big) = (\mathbf{x}, (B^*A^*)\mathbf{y}).$$

Встановлено дійсність властивості 5.

Примітка. Поняття спряженого оператора для дійсного простору вводиться абсолютно аналогічним чином. Висновки з цього пункту і властивості спряжених операторів справедливі і для даного випадку (в даному випадку властивість 3 формулюється наступним чином: $(\lambda A)^* = \lambda A^*$).

3.2 Самоспряжений (симетричний) оператор

Лінійний оператор A, що діє в унітарному (евклідовому) просторі, називається *самоспряженим (симетричним* (*ермітовим*))), якщо $A^* = A$ або якщо для будь-яких векторів $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ вірна рівність

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}).$$

Лінійний оператор A, що діє в евклідовому просторі, називається *кососиметричним* (*косоермітовим*), якщо $A = -A^*$ або $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$.

Дійсно, якщо це відношення задовольняється, то, згідно з першим визначенням, лінійний *оператор A* є спряженим оператором сам по собі, тобто $A^* = A$

Теорема 3.2 Матриця самоспряженого оператора в будь-якому ортонормованому базисі симетрична (ермітова) $A = A^t$. Навпаки, якщо матриця лінійного оператора в деякому ортонормованому базисі симетрична (ермітова), то цей оператор самоспряжений.

Доведення. Згідно з визначенням, А є самоспряженим оператором, якщо $A^* = A$ ($A = -A^*$). Це рівнозначно тому, що матриця лінійного оператора ортонормованому базисі збігається з її транспонованою (ермітовою) (це матриця спряженого оператора). Такі матриці називаються *симетричними* (*ермітовими*) матрицями.

За допомогою самоспряжених операторів можна отримати спеціальне представлення довільних лінійних операторів. А саме, вірно наступне твердження.

Теорема 3.3 Нехай A – лінійний оператор, що діє в комплексному евклідовому просторі U . *Тоді вірно представлення* $A = A_R + iA_I$, де A_R, A_I – самоспряжені оператори, які називають, відповідно, дійсною і уявною частинами оператора А.

Доведення. За властивостями 2, 3 і 4 спряжених операторів (див. п. 3.1) оператори $A_R = \frac{A+A^*}{2}$ і $A_I = \frac{A-A^*}{2}$ самоспряжені. Очевидно, $A = A_R + iA_I$ *Теорема доведена*.

Говоримо, що оператори A і B *комутують*, якщо$AB = BA$.

Теорема 3.4 Для того, щоб добуток AB самоспряжених операторів A *і* B був самоспряженим оператором, необхідно і достатньо, щоб вони комутували.

Доведення. Оскільки A і B є самоспряженими операторами, то, згідно з властивістю 5 спряжених операторів (див. 3.1), справедливі співвідношення

$$(AB)^* = B^*A^* = BA. \tag{3.5}$$

Отже, якщо $AB = BA$, то $(AB)^* = AB$, тобто оператор AB є самоспряженим. Якщо AB є самоспряженим оператором, то $AB = (AB)^*$, а потім на основі (3.5) $AB = BA$. Теорема доведена.

У подальших теоремах встановлено ряд важливих властивостей самосуміжних операторів.

Теорема 3. 5 Якщо оператор A самоспряжений, то для будь-якого $\boldsymbol{x} \in U$ скалярний добуток $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ – дійсне число.

Доведення. Справедливість твердження теореми випливає з наступної властивості скалярного добутку в комплексному евклідовому просторі $(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x})}$ і визначення самоспряженого оператора $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$ (якщо комплексне число дорівнює його спряженому, то воно дійсне). *Теорема доведена*.

Теорема 3.6 Власні значення самоспряженого оператора дійсні.

Доведення. Нехай λ — власне значення самоспряженого оператора A. За визначенням власного значення оператора A, існує ненульовий вектор такий $\boldsymbol{x}$, що $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. З цього співвідношення випливає, що дійсний (в силу теореми 3.4) скалярний добуток $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ можна представити у вигляді

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda\|\boldsymbol{x}\|.$$

Оскільки є дійсними $\|\boldsymbol{x}\|$ і $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, очевидно, що λ також є дійсним числом. *Теорема доведена.*

Наслідок 1 Якщо матриця A симетрична, то всі корені її характеристичного рівняння $det(A - \lambda E) = 0$ дійсні.

Наслідок 2 Самоспряжений оператор, який діє в n *-вимірному* евклідовому просторі, має n власних значень, якщо кожне з них порахувати стільки разів, скільки його кратність.

Наслідок 3 Симетрична матриця порядку n має n власних значень, якщо кожне з них порахувати стільки разів, скільки їх кратність.

Теорема 3.6 Якщо A є самоспряженим оператором, то власні вектори, що відповідають різним власним значенням цього оператора, є ортогональними.

Доведення. Нехай і – різні власні значення $\lambda_1 \lambda_2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ самоспряженого оператора A, а $\boldsymbol{x}_1$ $\boldsymbol{x}_2$ – власні вектори, що їм відповідають. Тоді мають місце співвідношення $A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$. Тому скалярні добутки $(A\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2)$ і $(\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2)$ відповідно дорівнюють наступним виразам

$$(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2),.\ (\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$$

Оскільки оператор A є самоспряженим, скалярні добутки $(A\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2)$ і $(\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2)$ рівні, і тому з останніх відношень отримуємо рівність шляхом віднімання

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0.$$

Оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то з останньої рівності випливає рівність нулю скалярного добутку $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$, тобто ортогональність власних векторів $\boldsymbol{x}_1$ і $\boldsymbol{x}_2$ *Теорема доведена*.

Розглянемо самоспряжений оператор A і власні значення $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$цього оператора. При цьому $\mathbf{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ є ортонормованим базисом, що складається з власних векторів, що відповідають $\{\lambda_i\}$. Нехай $\mathbf{x} \in V$, тоді

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k, \tag{3.5}$$

А оскільки$A\mathbf{e}_k = \lambda_k\mathbf{e}_k$, то за допомогою (3. 5) Отримуємо

$$A\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k. \tag{3,6}$$

ОператорP_k , визначений відношенням

$$P_k\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k \tag{3,7}$$

називається *проектором* для одновимірного підпростору, породженого вектором .$\boldsymbol{e}_k$

З властивостей скалярного добутку відразу випливає, що є P_k самоспряженим лінійним оператором.

Відзначимо наступні важливі *властивості проекторів*:

1. $P_k^2 = P_k$ (Звідси випливає, що$P_k^m = P_k$, де m натуральне).

2. $P_k P_j = 0$ де $k \neq j$.

Доказ цих властивостей випливає з співвідношень:

$$(P_k P_j)\boldsymbol{x} = P_k(P_j)\boldsymbol{x} = P_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k = \begin{cases} 1, i = j; \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Відзначимо також, що безпосередньо з визначення (3. 7) звідси випливає, що P_k комутує з кожним оператором, який комутує з A.

З співвідношень (3. 5), (3. 6) і (3. 7) отримуємо наступні вирази для **x** і A**x** :

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} P_k \boldsymbol{x}, \tag{3.8}$$

$$A\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k\, \boldsymbol{x}. \tag{3.9}$$

З рівності (3. 8) випливає, що оператор $\sum_{k=1}^{n} P_k$ є одиничним (тотожним):

$$I = \sum_{k=1}^{n} P_k. \tag{3.10}$$

З рівності (3.9) отримаємо так зване *спектральне розкладання самоспряженого оператора*:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k. \tag{3.11}$$

З властивостей 1 і 2 проекторів і з відношення (3,11) випливає наступний вираз для :A^2

$$A^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 P_k.$$

Очевидно, взагалі для довільного додатного s

$$A^s = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^s P_k. \tag{3.12}$$

Розглянемо довільний многочлен вважають$p(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda^i$. За визначенням вважають $p(A) = \sum_{i=1}^{m} c_i A^i$. Звернувшись до співвідношення (3.12), легко отримати наступний вираз для $p(A)$:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{m} p(\lambda_i) P_i. \tag{3.13}$$

Доведемо наступну теорему.

Теорема 3. 7 (теорема Гамільтона-Келі) Якщо A – самоспряжений оператор і $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ – характеристичний многочлен цього оператора, тоді $\chi_A(A) = 0$

Доведення. Дійсно, якщо A є самоспряженим оператором і λ_i є власними значеннями цього оператора, тоді є λ_i коренем характеристичного рівняння, тобто $p(\lambda_i) = 0$. Звідси випливає з відношення (3.13), що $\chi_A(A) = 0$. *Теорема доведена*.

Самоспряжений оператор A називається *додатним*, якщо для будь-якого$\boldsymbol{x} \in V$ справедливе співвідношення

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0. \tag{3.14}$$

Якщо оператор А додатний і з умови $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ випливає, що $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то A називається *додатно визначеним оператором*.

Додатні і додатно визначені оператори, відповідно, позначаються символами $A \geq 0$ і $A > 0$

Теорема 3.8 Кожне власне значення додатного (додатно визначеного) оператора є невід'ємним (додатним).

Доведення. Нехай λ – власне значення оператора A. Тоді, згідно з лемою цього пункту, можна вказати такий елемент **x**, $\|\mathbf{x}\| = 1$, що $\lambda = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$.

Звідси і співвідношення (3.14) отримуємо, що $\lambda \geq 0$ для додатних операторів і $\lambda > 0$ для додатно визначених операторів. *Теорема доведена*.

Введемо поняття кореня m -го степеня (m - натуральне число) з оператора.

Коренем m *- го степеня оператора A називається оператор B* такий, що $B^m = A$. Корінь m-го степеня оператора A позначається символом $A^{1/m}$

Теорема 3.9 Нехай A – *додатний самоспряжений оператор,* $A \geq 0$. Тоді для будь-якого натурального m існує додатній самоспряжений оператор $A^{1/m}$, $A^{1/m} \geq 0$

Доведення. Позначимо через λ_k – власні значення оператора A, і нехай . $\{\boldsymbol{e}_k\}$ – ортонормований базис з власних векторів. Далі позначимо P_k – проектор до одновимірного підпростору, породженого вектором $\mathbf{e}_k$

Має місце спектральне розкладання (3.11) самоспряженого оператора A ($A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$). Оскільки $\lambda_k \geq 0$, можна ввести наступний самоспряжений оператор B:

$$B = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{1/m} P_k. \tag{3.15}$$

Згідно (3. 7) вірно співвідношення $(P_k \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) \geq 0$, з якого випливає додатність операторів P_k і додатність оператора B (3. 15).

З властивостей 1 і 2 проекторів P_k випливає, що $B^m = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$. Порівнюючи цей вираз для B^m з виразом (3.11) для A, отримаємо $B^m = A$. Додатність оператора В була встановлена вище. *Теорема доведена*.

Зауваження 1: Існує єдиний додатний оператор $A^{1/m}$.

Зауваження 2 В ортонормальному базисі власних векторів $\{\boldsymbol{e}_k\}$ оператора A матриця оператора $A^{1/m}$ виглядає наступним чином:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{1/m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1/m} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{1/m} \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.10 Для кожного самоспряженого лінійного оператора A, що діє в n-вимірному евклідовому просторі V, існують лінійно незалежні попарно ортогональні та одиничні власні вектори.n

Зауваження 1 Далі погодимося нумерувати власні значення самоспряженого оператора в порядку спадання, беручи до уваги повторювані, тобто кратні власним значенням. У той же час $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ і власні вектори, відповідні їм $\mathbf{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, , ..., $\boldsymbol{e}_n$ можна вважати взаємно ортогональними і задовольняючими умові . $\|\boldsymbol{e}_i\| = 1$