БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ В ЕВКЛИДОВ ПРОСТРАНСТВЕ. ПАРА КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве

В предыдущих параграфах мы изучали билинейные и квадратичные формы в произвольном (не обязательно евклидовом) вещественном линейном пространстве L. В этом параграфе мы получим ряд сведений о билинейных и квадратичных формах, заданных в вещественном евклидовом пространстве.

Напомним некоторые понятия теории линейных операторов.

Пусть V – n-мерное вещественное евклидово пространство и A – линейный оператор, действующий из V в V. Оператор A^* называется сопряженным к A, если для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ выполняется равенство

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ A^*\boldsymbol{y}). \tag{1}$$

Оператор A называется самосопряженным, если $A = A^*$, т.е. если для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{y}). \tag{2}$$

Рассмотрим билинейную форму $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$, заданную в евклидовом пространстве V. Каждой такой форме $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ однозначно соответствует линейный оператор такой, что справедливо равенство

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}). \tag{3}$$

Кроме того, можно доказать, что билинейная форма $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ является симметричной тогда и только тогда, когда оператор A, фигурирующий в (3), является самосопряженным.

Напомним также, что для любого самосопряженного оператора A было доказано существование ортонормированного базиса из собственных векторов Это означает, что существуют ортонормированная система $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ и вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ такие, что

$$A\boldsymbol{e}_k = \lambda_k \boldsymbol{e}_k. \tag{4}$$

Отметим, что в базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$ матрица оператора A имеет диагональный вид.

Приведение квадратичной формы к сумме квадратов в ортогональном базисе. Пусть $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ – симметричная билинейная форма, заданная в вещественном евклидовом пространстве V, а $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ – определяемая ею квадратичная форма.

Докажем следующую теорему о приведении квадратичной формы $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ к сумме квадратов.

Теорема 1 Пусть $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ – симметричная билинейная форма, заданная в евклидовом пространстве V. Тогда в пространстве V существует такой ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_k\}$ и можно указать такие вещественные числа λ_k, что для любого $\boldsymbol{x} \in V$ квадратичная форма $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ может быть представлена в виде следующей суммы квадратов координат x_k вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$:

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2. \tag{5}$$

Доказательство. Так как $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ – симметричная билинейная форма, то существует самосопряженный оператор A такой, что выполняется (3).

Для оператора A можно указать ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_k\}$ из собственных векторов этого оператора; пусть λ_k – собственные значения, отвечающие $\boldsymbol{e}_k$.

Пусть вектор $\boldsymbol{x}$ имеет в базисе $\boldsymbol{e}_k$ координаты x_k:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k . \tag{6}$$

Тогда, очевидно, поскольку $\boldsymbol{e}_k$ – собственные векторы оператора $\boldsymbol{A}$**:**

$$A\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \boldsymbol{e}_k . \tag{7}$$

Из соотношений (6) и (7) вследствие ортонормированности базиса $\{\boldsymbol{e}_k\}$ получаем следующее выражение для скалярного произведения $(A\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x})$:

$$(A\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 . \tag{8}$$

Отсюда и из соотношения (3) получаем (5). Теорема доказана.

Сказанное выше позволяет сформулировать *основные этапы приведения действительной квадратичной формы к каноническому виду ортогональным пре образованием переменных*:

1. Записать матрицу A рассматриваемой квадратичной формы.

2. Определить из уравнения $|A - \lambda E| = 0$ собственные значения этой матрицы (они все действительны, так как матрица A симметрична).

3. Для каждого собственного значения λ_k определить соответствующие ему линейно независимые собственные векторы (n-мерные матрицы-столбцы).

4. К полученным собственным векторам, отвечающим собственному значению λ_k, применить процесс ортогонализации.

5. После того, как будут найдены все n собственных векторов матрицы A, образующие ортонормированный базис $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ в n-мерном действительном евклидовом пространстве матриц-столбцов, нужно координаты векторов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ поместить в соответствующие столбцы искомой матрицы Q.

6. Написать канонический вид квадратичной формы

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ собственные значения матрицы A.

7. Записать вид линейного преобразования переменных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

которое приводит заданную квадратичную форму $f = X^t \cdot A \cdot X$ к каноническому виду.

Пример 1 Привести ортогональным преобразованием переменных квадратичную форму $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому виду.

Решение. Запишем матрицу заданной квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3 (\lambda + 3) = 0.$$

Собственными значениями матрицы A являются числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -3$. Отсюда вытекает, что квадратичная форма f имеет такой канонический вид

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$

При $\lambda = 1$ система уравнений для определения координат собственных векторов имеет вид

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Так как $\lambda = 1$ является корнем характеристического уравнения третьей кратности, то ему соответствуют три линейно независимых собственных вектора. Это означает, что фундаментальная система решений рассматриваемой однородной системы уравнений должна состоять из трех линейно независимых решений рассматриваемой системы уравнений. Следовательно, ранг матрицы системы однородных уравнений $r = 1$ и, поэтому, система уравнений эквивалентна одному из своих уравнений, например, второму уравнению, ФСР которой имеет вид:

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\boldsymbol{a}_1$	1	1	0	0
$\boldsymbol{a}_2$	1	0	1	0
$\boldsymbol{a}_3$	–1	0	0	1

Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ являются линейно независимыми собственными векторами матрицы A, которые отвечают собственному значению $\lambda = 1$. Любой собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, так как координаты этого вектора удовлетворяют системе уравнений.

Применим процесс ортогонализации к системе векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ получим ортонормированную совокупность линейно независимых собственных векторов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ матрицы A, отвечающих собственному значению $\lambda = 1$. Имеем

$$\boldsymbol{f}_1=\frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{f}_2=\frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|},\ \boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{f}_1)\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{a}_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{f}_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\1\\0\end{pmatrix},\ \|\boldsymbol{g}_2\|=\sqrt{\frac{3}{2}},\ \boldsymbol{f}_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\\sqrt{2/3}\\0\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{f}_3=\frac{\boldsymbol{g}_3}{\|\boldsymbol{g}_3\|},\ \boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{a}_3-(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{f}_1)\boldsymbol{f}_1-(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{f}_2)\boldsymbol{f}_2=\begin{pmatrix}-1/3\\1/3\\1/3\\1\end{pmatrix},\ \|\boldsymbol{g}_3\|=\frac{2}{\sqrt{3}},\ \boldsymbol{f}_3=\begin{pmatrix}-1/2\sqrt{3}\\1/2\sqrt{3}\\1/2\sqrt{3}\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}.$$

При $\lambda=-3$ согласно получаем следующую систему уравнений для определения координат собственного вектора $\boldsymbol{a}_4$ матрицы A

$$\begin{aligned}3x_1+x_2+x_3-x_4&=0\\x_1+3x_2-x_3+x_4&=0\\x_1-x_2+3x_3+x_4&=0\\-x_1+x_2+x_3+3x_4&=0.\end{aligned}$$

Матрица этой системы имеет ранг, равный трем, поэтому фундаментальная система решений состоит из одного ненулевого решения $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=-1,\ x_4=1$. Собственный вектор $\boldsymbol{a}_4$ оказывается таким: $\boldsymbol{a}_4=(1,\,-1,\,-1,\,1)$.

Нормированный собственный вектор: $\boldsymbol{f}_4=\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$.

Составим матрицу Q ортогонального преобразования переменных, которое приводит квадратичную форму к каноническому виду. Для этого поместим в столбцы матрицы Q координаты собственных векторов $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{f}_4$, получим

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&-\frac{1}{2}\\0&\sqrt{\frac{2}{3}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&-\frac{1}{2}\\0&0&\sqrt{3}/2&1/2\end{pmatrix}.$$

Таким образом, квадратичная форма $f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$ при помощи ортогонального преобразования переменных

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}} y_3 + \frac{1}{2} y_4$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} y_3 - \frac{1}{2} y_4$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} y_3 - \frac{1}{2} y_4$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} y_3 + \frac{1}{2} y_4$$

приводится к каноническому виду

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2 .$$

Заметим, что форма f не является положительно определенной.

Одновременное приведение двух квадратичных форм к сумме квадратов в линейном пространстве

Докажем теперь важную теорему об одновременном приведении двух квадратичных форм к сумме квадратов в произвольном (не обязательно евклидовом) вещественном линейном пространстве.

Теорема 2 Пусть $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ – симметричные билинейные формы, определенные в вещественном линейном пространстве V. Допустим далее, что для всех $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, справедливо неравенство $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ (*т.*е. квадратичная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ – положительно определенная). Тогда в пространстве V можно указать базис $\{\boldsymbol{e}_k\}$ такой, что квадратичные формы $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ и $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ могут быть представлены в виде

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 , \tag{9}$$

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 , \tag{10}$$

где x_k – координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$.

Доказательство. Скалярное произведение в конечномерном вещественном пространстве может быть задано с помощью билинейной формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ полярной к положительно определенной квадратичной форме $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$.

Поэтому мы можем ввести в линейном пространстве V скалярное произведение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, полагая

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{11}$$

Таким образом, V представляет собой евклидово пространство со скалярным произведением (11). Можно указать такой ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_k\}$ и такие вещественные числа λ_k, что в этом базисе квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ представляется в виде (9).

С другой стороны, в любом ортонормированном базисе скалярное произведение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, равное, согласно (11), $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, представляется в виде суммы квадратов координат вектора $\boldsymbol{x}$. Таким образом, представление $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ в виде (10) в базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$ также обоснованно. Теорема доказана.

Замечание. Из доказанной нами теоремы непосредственно следует, что любую квадратичную форму в произвольном вещественном линейном пространстве можно привести к каноническому виду. Однако способ такого приведения является, вообще говоря, более сложным, чем способы, изложенные выше, поскольку он требует нахождения всех собственных векторов некоторого самосопряженного оператора.

Алгоритм приведения пары квадратичных форм одним преобразованием переменных одну к каноническому виду, а другую – к нормальному

1. Находим матрицы A и B квадратичных форм f и g соответственно. При этом форма f является положительно определенной.

2. Составляем уравнение $\det(B-\lambda A)=0$ и находим его корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Тогда канонический вид квадратичной формы $g=\lambda_1 y_1^2+\lambda_1 y_2^2+...+\lambda_n y_n^2$, а нормальный вид квадратичной формы $f=y_1^2+y_2^2+...+y_n^2$.

3. Соответствующие базисные векторы находятся из системы уравнений $(A-\lambda_i B)X=\theta$ для каждого λ_i.

4. По матрице A строим поляризацию G квадратичной формы f. Симметрическая билинейная функция G определяет скалярное произведение. К полученным базисным векторам применяем процесс ортогонализации Грамма-Шмидта относительно этого скалярного произведения. Составляем матрицу перехода из координат ортонормированных векторов и получаем формулы замены координат.

Пример 2 Для квадратичных форм $f=11x_1^2-6x_1x_2+x_2^2$ и $g=13x_1^2-10x_1x_2+3x_2^2$ определить базис, в котором одна из этих квадратичных форм имеет канонический вид, а другая квадратичная форма приводится к нормальному виду, и соответствующую замену координат.

Решение. Находим матрицы A и B квадратичных форм f и g соответственно:

$$A=\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Форма f является положительно определенной, так как главные миноры ее матрицы положительны.

Решим уравнение $\det(B-\lambda A)=0$:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right)=0,$$

$$\begin{vmatrix} 13-11\lambda & -5+3\lambda \\ -5+3\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

$$(13-11\lambda)(3-\lambda)-(-5+3\lambda)(-5+3\lambda)=0, \quad \lambda^2-8\lambda+7=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=7.$$

Тогда канонический вид квадратичной формы $g=y_1^2+7y_2^2$, а нормальный вид квадратичной формы $f=y_1^2+y_2^2$.

Для каждого из чисел $\lambda_1=1,\ \lambda_2=7$ решим матричное уравнение $(A-\lambda_i B)X=\theta$.

При $\lambda_1=1$ получаем $A-\lambda_1 B=\begin{pmatrix} 13-11 & -5+3 \\ -5+3 & 3-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow x_1-x_2=0\Rightarrow\begin{cases} x_1=x_2, \\ x_2=x_2. \end{cases}$$

При $x_2=1$ получим $x_1=1$. Тогда первый базисный вектор имеет вид $\boldsymbol{g}_1=(1,\,1)$.

При $\lambda_2=7$ получаем $A-\lambda_2 B=\begin{pmatrix} 13-11\cdot 7 & -5+3\cdot 7 \\ -5+3\cdot 7 & 3-1\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -64 & 16 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} -64 & 16 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow 4x_1-x_2=0\Rightarrow\begin{cases} x_2=4x_1, \\ x_1=x_1. \end{cases}$$

При $x_1=1$ получим $x_2=4$. Тогда второй базисный вектор имеет вид $\boldsymbol{g}_2=(1,\,4)$.

По матрице $A=\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ строим поляризацию G квадратичной формы g. Пусть $\boldsymbol{x}=(x_1,\,x_2)$ и $\boldsymbol{y}=(y_1,\,y_2)$:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \end{array}.$$

Симметрическая билинейная функция $G(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})=11x_1y_1-3x_2y_1-3x_1y_2+x_2y_2$ задает скалярное произведение. Векторы $\boldsymbol{g}_1=(1,\,1)$ и $\boldsymbol{g}_2=(1,\,4)$ ортогональны относительно этого скалярного произведения: $G(\boldsymbol{g}_1,\,\boldsymbol{g}_2)=11\cdot 1\cdot 1-3\cdot 1\cdot 1-3\cdot 1\cdot 4+1\cdot 4=0$. Тогда векторы $\boldsymbol{h}_1=\dfrac{1}{\sqrt{G(\boldsymbol{g}_1,\,\boldsymbol{g}_1)}}\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{h}_2=\dfrac{1}{\sqrt{G(\boldsymbol{g}_2,\,\boldsymbol{g}_2)}}\boldsymbol{g}_2$ образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения, определяемого функцией G.

$$G(\boldsymbol{g}_1,\,\boldsymbol{g}_1)=11\cdot 1\cdot 1-3\cdot 1\cdot 1-3\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1=6,$$
$$G(\boldsymbol{g}_2,\,\boldsymbol{g}_2)=11\cdot 1\cdot 1-3\cdot 4\cdot 1-3\cdot 1\cdot 4+4\cdot 4=3,$$
$$\boldsymbol{h}_1=\frac{1}{\sqrt{G(\boldsymbol{g}_1,\,\boldsymbol{g}_1)}}\boldsymbol{g}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1;\,1),$$
$$\boldsymbol{h}_2=\frac{1}{\sqrt{G(\boldsymbol{g}_2,\,\boldsymbol{g}_2)}}\boldsymbol{g}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1;\,4).$$

Тогда $G(\boldsymbol{h}_1,\,\boldsymbol{h}_1)=G(\boldsymbol{h}_2,\,\boldsymbol{h}_2)=1$, $G(\boldsymbol{h}_1,\,\boldsymbol{h}_2)=0$.

Запишем координаты векторов $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$ в виде столбцов матрицы. Получим матрицу перехода:

$$T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\frac{1}{\sqrt{6}}y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}y_2, \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{6}}y_1+\frac{4}{\sqrt{3}}y_2. \end{cases}$$

Пример 3 Для квадратичных форм $f=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$ и $g=4x_1^2+16x_1x_2+6x_2^2$ определить базис, в котором одна из этих квадратичных форм имеет канонический вид, а другая квадратичная форма приводится к нормальному виду, и соответствующую замену координат.