БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

Числовая функция $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$, аргументами которой являются всевозможные векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ вещественного линейного пространства V, называется *билинейной формой*, если для любых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\in V$ и любого вещественного числа λ выполняются соотношения

$$\begin{cases} B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{y}), \\ B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z}), \\ B(\lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \lambda B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}), \\ B(\boldsymbol{x},\ \lambda\boldsymbol{y}) = \lambda B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}). \end{cases} \tag{1}$$

Иными словами, билинейная форма представляет собой числовую функцию $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ двух векторных аргументов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, определенную на всевозможных векторах $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ вещественного линейного пространства V и линейную по каждому из этих аргументов.

Пример 1 Скалярное произведение в евклидовом пространстве – пример билинейной функции.

Пример 2 Рассмотрим линейное пространство R^2. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2)$. Определим функцию $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ следующим образом: $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$. Убедимся, что $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ является билинейной функцией.

Пусть $\boldsymbol{z} = (z_1,\ z_2)$ – вектор пространства R^2 . Так как $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z} = (x_1,\ x_2) + (z_1,\ z_2) = (x_1+z_1,\ x_2+z_2)$, то

$$B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{y}) = \begin{vmatrix} x_1+z_1 & x_2+z_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{y}).$$

Так как $\alpha\boldsymbol{x} = \alpha(x_1,\ x_2) = (\alpha x_1,\ \alpha x_2)$, то

$$B(\alpha\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \begin{vmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \alpha B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}).$$

Так как $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} = (y_1,\ x_2) + (y_1,\ z_2) = (y_1+z_1,\ y_2+z_2)$, то

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z}).$$

Так как $\alpha\boldsymbol{y} = \alpha(y_1,\ y_2) = (\alpha y_1,\ \alpha y_2)$, то

$$B(\boldsymbol{x},\ \alpha\boldsymbol{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \alpha y_1 & \alpha y_2 \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \alpha B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}).$$

Пример 3 Рассмотрим линейное пространство квадратных матриц второго порядка с обычными операциями сложения матриц и умножения матриц на число. Определим функцию $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ следующим образом: $B(A,\ B) = tr(AB)$. Показать, что $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ является билинейной функцией.

Билинейная форма $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ называется *симметричной* (*кососимметричной*), если для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ линейного пространства V выполняются соотношения

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}) \qquad (B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = -B(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})). \tag{2}$$

Справедливо следующее утверждение: **любую билинейную форму можно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной билинейных форм**.

Пусть в n-мерном линейном пространстве V задана билинейная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Выясним вопрос о представлении формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в случае, когда в V задан определенный базис $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.

Теорема 1 Билинейная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ при заданном в n-мерном линейном пространстве базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ может быть однозначно представлена в следующем виде:

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \xi_i \eta_j, \tag{3}$$

где

$$b_{ij} = B(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j), \tag{4}$$

а ξ_i и η_j – координаты в базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ соответственно.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \boldsymbol{e}_j$ – разложения векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ по базису $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Так как форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ линейна по каждому из аргументов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, то

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = B\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} B(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \xi_i \eta_j .$$

Таким образом, для формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ справедливо представление (3) с выражениями (4) для коэффициентов b_{ij}.

Чтобы доказать однозначность этого представления, предположим, что для $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ справедливо представление (3) с некоторыми коэффициентами b_{ij}. Беря в (4.3) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_j$, мы сразу же получим выражения (4) для коэффициентов b_{ij}. *Теорема доказана.*

Матрица

$$B(\boldsymbol{e}) = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, \tag{5}$$

элементы b_{ij} которой определены с помощью соотношений (4), называется *матрицей билинейной формы* $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в данном базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.

Замечание 1 Любая квадратная матрица $(b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ является в данном базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ матрицей некоторой билинейной формы.

Доказательство. Определим в линейном пространстве V с данным базисом $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ с помощью матрицы $(b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ числовую функцию $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ двух векторных аргументов $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{e}_j$ вида $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$.

Легко видеть, что эта функция удовлетворяет всем условиям определения билинейной формы. Но тогда, согласно теореме 1, элементы b_{ij} заданной матрицы равны $B(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, а написанная выше формула есть представление этой формы в виде (3).

Согласно сделанному замечанию естественно называть представление (3) билинейной формы $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ общим видом билинейной формы в n-мерном линейном пространстве. *Теорема доказана.*

Замечание 2 Если $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ – симметричная (кососимметричная) билинейная форма, то матрица (5) этой формы в базисе $\boldsymbol{e}$ является симметричной (кососимметричной). Справедливо и обратное – если матрица (5) билинейной формы $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ симметрична (кососимметрична), то и билинейная форма является симметричной (кососимметричной).

Доказательство. Пусть $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ – симметричная (кососимметричная) билинейная форма. Полагая в соотношениях (2) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_j$, получим, согласно (4),

$$b_{ij}=b_{ji} \qquad (b_{ij}=-b_{ji}), \tag{6}$$

т.е. матрица (5) является симметричной (кососимметричной).

Пусть теперь матрица (5) билинейной формы $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ симметрична (кососимметрична), т.е. ее элементы удовлетворяют соотношениям (6). Тогда из соотношения (3) и соотношения $B(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})=\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} b_{ji}\xi_i\eta_j$ следует, что $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=B(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})$ ($B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=-B(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})$), т.е. форма $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ является симметричной (кососимметричной).

Пример 4 Рассмотрим линейное пространство R^3. Пусть $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$. Определим билинейную функцию $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ следующим образом: $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=x_1y_1+3x_2y_2+2x_3y_3$. Определим матрицу этой билинейной функции в базисе $\boldsymbol{e}_1=(1,-1,\ 1)$, $\boldsymbol{e}_2=(2,1,\ 0)$, $\boldsymbol{e}_3=(-1,3,\ 2)$.

Так как размерность линейного пространства R^3 равна 3, то порядок матрицы билинейной функции $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ равна 3. Вычислим элементы матрицы:

$$a_{11}=B(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1)=6, \qquad a_{12}=B(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)=-1, \qquad a_{13}=B(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_3)=-6,$$
$$a_{21}=B(\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1)=-1, \qquad a_{22}=B(\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2)=7, \qquad a_{23}=B(\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)=7,$$
$$a_{31}=B(\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_1)=-6, \qquad a_{32}=B(\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2)=7, \qquad a_{33}=B(\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_3)=36,$$

Тогда матрица билинейной функции $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ *равна*

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -1 & -6 \\ -1 & 7 & 7 \\ -6 & 7 & 36 \end{pmatrix}.$$

Пример 5 Рассмотрим линейное пространство R^3. Пусть $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$. Определим билинейную функцию $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ следующим образом: $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=x_1y_1+3x_2y_2+2x_3y_3$. Определим матрицу этой билинейной функции в базисе $\boldsymbol{e}_1=(1,2,\ 3)$, $\boldsymbol{e}_2=(-1,4,\ 5)$, $\boldsymbol{e}_3=(-2,-3,\ 4)$.

Рассмотрим в линейном пространстве V два базиса $\boldsymbol{e}=\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ ...,\ \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{f}=\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2,..., \boldsymbol{f}_n\}$. Пусть $B(\boldsymbol{e})=(a_{ij})_{i,\,j=\overline{1,n}}$ и $B(\boldsymbol{f})=(b_{ij})_{i,\,j=\overline{1,n}}$ – матрицы данной билинейной формы в указанных базисах.

Выясним вопрос о преобразовании матрицы $(a_{ij})_{i,\,j=\overline{1,n}}$ билинейной формы при переходе от базиса $\boldsymbol{e}$ к новому базису $\boldsymbol{f}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 Матрицы $B(\boldsymbol{e})$ и $B(\boldsymbol{f})$ билинейной формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в базисах $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n\}$ связаны соотношением

$$B(\boldsymbol{f}) = T^t B(\boldsymbol{e}) T, \tag{7}$$

где $T = (t_{ij})$ – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$.

Доказательство. Элементы $\boldsymbol{f}_i$ нового базиса $\boldsymbol{f}$ выражаются через элементы $\boldsymbol{e}_j$ старого базиса $\boldsymbol{e}$ с помощью матрицы $T = (t_{ij})$ по формулам

$$\boldsymbol{f}_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \boldsymbol{e}_j. \tag{8}$$

Так как $b_{ik} = B(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_k)$, то, согласно (8), получим

$$b_{ik} = B(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_k) = B\left(\sum_{j=1}^{n} t_{ji} \boldsymbol{e}_j, \sum_{l=1}^{n} t_{lk} \boldsymbol{e}_l \right) = \sum_{j,l=1}^{n} B(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_l) t_{ji} t_{lk} = \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl} t_{ji} t_{lk}. \tag{9}$$

Напомним, что элементы t'_{ij} транспонированной матрицы T^t связаны с элементами t_{ij} матрицы T соотношениями $t_{ij} = t'_{ji}$.

Подставляя эти соотношения в правую часть (4.9), получим для b_{ik} следующее выражение:

$$b_{ik} = \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl} t'_{ij} t_{lk} = \sum_{j=1}^{n} t'_{ij} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{jl} t_{lk} \right). \tag{10}$$

Сумма $\sum_{l=1}^{n} a_{jl} t_{lk}$ (по определению произведения матриц) представляет собой элемент матрицы $B(\boldsymbol{e})T$. Отсюда следует, что выражение в правой части (10) является элементом матрицы $T^t B(\boldsymbol{e}) T$. Но в левой части (10) стоит элемент матрицы $B(\boldsymbol{f})$. Поэтому $B(\boldsymbol{f}) = T^t B(\boldsymbol{e}) T$. *Теорема доказана.*

Следствие. Ранг матрицы $B(\boldsymbol{f})$ равен рангу матрицы $B(\boldsymbol{e})$. Это сразу вытекает из соотношения (7), из того, что матрица T и, стало быть, матрица T^t являются невырожденными, и из теоремы о том, что ранг матрицы не изменяется при умножении ее на невырожденную матрицу.

Это следствие позволяет ввести важный числовой инвариант билинейной формы – так называемый ранг билинейной формы.

Рангом билинейной формы, заданной в конечномерном линейном пространстве V, называется ранг матрицы этой формы в произвольном базисе пространства V.

Билинейная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, заданная в конечномерном линейном пространстве V, называется *невырожденной* (*вырожденной*), если ее ранг равен (меньше) размерности пространства V.

Пример 6 Дана матрица билинейной функции $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$. Найти матрицу этой билинейной функции в базисе $\boldsymbol{e}'_1 = (5, 3)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (2, 1)$.

Матрица перехода имеет вид: $T=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$. Отсюда $T^t=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Тогда матрица билинейной функции в базисе $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ равна $A'=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}136 & 50\\ 49 & 18\end{pmatrix}$.

Пример 7 Дана матрица билинейной функции $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1)$. Найти матрицу этой билинейной функции в базисе $\boldsymbol{e}_1'=(1,2)$, $\boldsymbol{e}_2'=(2,5)$.