КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

В этом параграфе указаны различные методы приведения квадратичной формы к сумме квадратов, т.е. будут указаны методы выбора такого базиса $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n\}$ в линейном пространстве V, по отношению к которому квадратичная форма

$$B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\,. \tag{1}$$

представляется в следующем каноническом виде:

$$B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2, \tag{2}$$

где $(y_1, y_2, ..., y_n)$ – координаты $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{f}$.

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ в выражении (2) называются *каноническими коэффициентами*.

Подчеркнем, что мы рассматриваем квадратичные формы в произвольном вещественном линейном пространстве.

Настоящий параграф посвящен не только доказательству возможности приведения квадратичной формы к каноническому виду, но и описанию двух методов такого приведения, имеющих большую практическую ценность и широко встречающихся в приложениях.

Так как каждому преобразованию базиса отвечает невырожденное линейное преобразование координат, а невырожденному преобразованию координат – преобразование базиса, то вопрос о приведении формы к каноническому виду можно решать путем выбора соответствующего невырожденного преобразования координат.

1. Метод Лагранжа. Докажем следующую теорему.

Теорема 1 Любая квадратичная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, заданная в *n*-мерном линейном пространстве V, с помощью невырожденного линейного преобразования координат может быть приведена к каноническому виду (2).

Доказательство. Проведем доказательство теоремы методом Лагранжа. Основная идея этого метода заключается в последовательном дополнении квадратного трехчлена по каждому аргументу до полного квадрата.

Будем считать, что $B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x}) \not\equiv 0$ и в данном базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ имеет вид (1).

Убедимся, во-первых, что с помощью невырожденного преобразования координат форму $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ можно преобразовать так, что коэффициент при квадрате первой координаты вектора $\boldsymbol{x}$ будет отличен от нуля.

Если в данном базисе этот коэффициент отличен от нуля, то нужное невырожденное преобразование является тождественным.

В случае, если $a_{11} = 0$, но отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-либо другой координаты, то с помощью перенумерации базисных векторов можно добиться требуемого результата. Ясно, что перенумерация является невырожденным преобразованием.

Если же все коэффициенты при квадратах координат равны нулю, то нужное преобразование можно получить следующим способом. Пусть, например, $a_{12} \neq 0$. Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат:

$$x_1 = y_1 - y_2,\; x_2 = y_1 + y_2,\; x_i = y_i,\; i = \overline{3, n}.$$

После этого преобразования коэффициент при y_1^2 будет равен $2a_{12}$ и поэтому отличен от нуля.

Итак, будем считать, что в соотношении (1) $a_{11} \neq 0$. Выделим в выражении (1) ту группу слагаемых, которые содержат x_1. Получим

$$B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \sum_{i,\, j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j \,. \tag{3}$$

Преобразуем выделенную группу слагаемых следующим образом:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 - \ldots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2 -$$

$$-2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}x_2x_3 - \ldots - 2\frac{a_{1n-1}a_{1n}}{a_{11}}x_{n-1}x_n \,.$$

Очевидно, выражение (3) можно теперь переписать так:

$$B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x}) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \sum_{i,\, j=2}^{n} a_{ij}^{*}x_ix_j \,, \tag{4}$$

где a_{ij}^{*} – коэффициенты при x_ix_j, полученные после преобразования.

Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат:

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n,$$

$$y_2 = x_2,$$

$$\ldots$$

$$y_n = x_n.$$

С помощью этого преобразования и представления (4) для $B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x})$ получим

$$B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x}) = a_{11}y_{11}^2 + \sum_{i,\, j=2}^{n} a_{ij}^{*}y_iy_j \,. \tag{5}$$

Итак, если форма $B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x}) \not\equiv 0$, то с помощью невырожденного преобразования координат эту форму можно привести к виду (5).

Обратимся теперь к квадратичной форме $\sum_{i,\, j=2}^{n} a_{ij}^{*}y_iy_j$. Если эта форма тождественно равна нулю, то вопрос о приведении $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ к каноническому виду решен. Если же форма $\sum_{i,\, j=2}^{n} a_{ij}^{*}y_iy_j \not\equiv 0$, то мы можем повторить рассуждения, рассматривая преобразования координат $y_2,\ldots,y_n$, аналогичные описанным выше, и не меняя при этом координату y_1. Очевидно, такого типа преобразования координат $y_1, y_2,\ldots,y_n$ будут невырожденными.

Ясно, что за конечное число шагов мы приведем квадратичную форму $B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x})$ к каноническому виду (2).

Отметим, что нужное преобразование исходных координат $x_1, x_2,\ldots,x_n$ можно получить путем перемножения найденных в процессе рассуждений невырожденных преобразований. *Теорема доказана*.

Замечание 1 Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называется *каноническим*. Отметим, что канонический базис определен неоднозначно.

Замечание 2 Если форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ приведена к каноническому виду (2), то, вообще говоря, не все канонические коэффициенты λ_i отличны от нуля. Оставляя в (2) лишь отличные от нуля λ_i и перенумеровывая их заново, получим следующее выражение для $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$:

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_k y_k^2. \tag{6}$$

Ясно, что $k \le n$. Так как ранг квадратичной формы по определению равен рангу ее матрицы в любом базисе, то из (6) и условия $\lambda_i \ne 0$ при $i = \overline{1, k}$ вытекает, что ранг формы равен k. Таким образом, число отличных от нуля канонических коэффициентов равно рангу квадратичной формы.

Пример 1 Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Пример 2 Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

Решение. Сделаем замену переменных $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$. Тогда квадратичная форма преобразуется к виду

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3.$$

В соответствии со сказанным при доказательстве теоремы 1 сделаем новую замену переменных

$$z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = 2y_1 - 2y_3 = 2(y_1 - y_3), \qquad z_2 = y_2, \qquad z_3 = y_3,$$

получим

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 8z_2z_3 - 2z_3^2 = \frac{1}{2}z_1^2 - 2\left[(z_2 + 2z_3)^2 - 3z_3^2\right].$$

После замены переменных $z_1 = t_1$, $z_2 + 2z_3 = t_2$, $z_3 = t_3$ квадратичная форма f будет приведена к каноническому виду

$$f = \frac{1}{2}t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2.$$

2. Метод Якоби. При некоторых дополнительных предположениях о квадратичной форме $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ можно указать явные формулы перехода от данного базиса $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ к каноническому базису $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ и формулы для канонических коэффициентов λ_i.

Предварительно мы введем понятие треугольного преобразования базисных векторов.

Преобразование базисных векторов $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ называется *треугольным*, если оно имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{f}_2 = \alpha_{21}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{f}_3 = \alpha_{31}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{32}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \\ \ldots \\ \boldsymbol{f}_n = \alpha_{n1}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \boldsymbol{e}_n. \end{cases} \tag{7}$$

Замечание. Так как определитель матрицы треугольного преобразования (7) отличен от нуля (равен 1), то векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ образуют базис.

Введем в рассмотрение угловые миноры матрицы $A(\boldsymbol{e}) = (a_{ij})$ коэффициентов формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ в базисе $\boldsymbol{e}$, обозначив их символами Δ_1, Δ_2, …, Δ_{n-1}:

$$\Delta_1 = a_{11}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots, \qquad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 Пусть миноры Δ_1, Δ_2, ..., Δ_{n-1} матрицы (a_{ij}) квадратичной формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ отличны от нуля. Тогда существует единственное треугольное преобразование базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$, с помощью которого форму $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ можно привести к каноническому виду.

Доказательство. Напомним, что коэффициенты b_{ij} формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ вычисляются по формулам $b_{ij} = B(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j)$.

Если форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ имеет канонический вид, то $b_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно построить с помощью треугольного преобразования (7) такой базис $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$, в котором будут выполняться соотношения

$$B(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j) = 0 \text{ при } i \neq j\text{, или, что то же, при } i < j \tag{9}$$

(при этом, конечно, надо убедиться, что искомое преобразование единственно).

Если обратиться к формулам (7) для $\boldsymbol{f}_i$, то, используя линейное свойство квадратичной формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ по каждому аргументу, легко заметить, что соотношения (9) будут выполнены, если будут выполнены соотношения

$$B(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_j) = 0,\ B(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_j) = 0,\ \ldots,\ B(\boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{f}_j) = 0,\ j = \overline{2, n}. \tag{10}$$

Запишем формулы (10) в развернутом виде. Для этого подставим в левые части этих формул выражение

$$\boldsymbol{f}_j = \alpha_{j1}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{j2}\boldsymbol{e}_2 + ... + \alpha_{j,j-1}\boldsymbol{e}_{j-1} + \boldsymbol{e}_j \tag{11}$$

для $\boldsymbol{f}_j$ из соотношений (7). Используя далее свойство линейности $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ по каждому аргументу и обозначение $B(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = a_{ij}$, получим в результате следующую линейную систему уравнений для неизвестных коэффициентов a_{jk}:

$$\begin{cases} \alpha_{j1}a_{11} + \alpha_{j2}a_{12} + ... + \alpha_{j,j-1}a_{1,j-1} + a_{1j} = 0, \\ \ldots \\ \alpha_{j1}a_{j-1,1} + \alpha_{j2}a_{j-1,2} + ... + \alpha_{j,j-1}a_{j-1,j-1} + a_{j-1,j} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Определитель этой системы равен Δ_{j-1}. По условию $\Delta_{j-1} \neq 0$, следовательно, система (12) имеет единственное решение. Таким образом, можно построить единственное треугольное преобразование базисных векторов, с помощью которого форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ приводится к каноническому виду. Теорема доказана.

Приведем формулы, по которым можно вычислить коэффициенты α_{ji} искомого треугольного преобразования, и формулы для канонических коэффициентов λ_j.

Обозначим символом $\Delta_{j-1,i}$ минор матрицы (a_{ij}), расположенный на пересечении строк этой матрицы с номерами 1, 2, ..., $j-1$ и столбцов с номерами 1, 2, ...,$i-1$, $i+1$, ..., j. Тогда, обращаясь к системе (12) и используя формулы Крамера, получим следующее выражение для α_{ji}:

$$\alpha_{ji} = (-1)^{j+i} \frac{\Delta_{j-1,i}}{\Delta_{j-1}}. \tag{13}$$

Займемся вычислением канонических коэффициентов λ_j. Так как $\lambda_j = b_{jj} = B(\boldsymbol{f}_j, \boldsymbol{f}_j)$, то из выражения (11) для $\boldsymbol{f}_j$ и формул (10) получаем

$$\begin{aligned}\lambda_j = B(\boldsymbol{f}_j, \boldsymbol{f}_j) &= B(\alpha_{j1}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{j2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_{j,j-1}\boldsymbol{e}_{j-1} + \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{f}_j) = \\ &= B(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{f}_j) = B(\boldsymbol{e}_j, \alpha_{j1}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{j2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_{j,j-1}\boldsymbol{e}_{j-1} + \boldsymbol{e}_j) = \\ &= \alpha_{j1}a_{1j} + \alpha_{j2}a_{2j} + \ldots + \alpha_{j,j-1}a_{j-1,j} + a_{jj}.\end{aligned}$$

Подставляя выражение (13) для α_{ji} в правую часть последнего соотношения, найдем

$$\lambda_j = \left((-1)^{j+1}a_{1j}\Delta_{j-1,1} + (-1)^{j+2}a_{2j}\Delta_{j-1,2} + \ldots + (-1)^{2j-1}a_{j-1,j}\Delta_{j-1,j-1} + a_{jj}\Delta_{j-1}\right)\Delta_{j-1}^{-1}.$$

Числитель последнего соотношения представляет собой сумму произведений элементов строки с номером j в определителе Δ_j; на алгебраические дополнения этих элементов в указанном определителе. Следовательно, этот числитель равен Δ_j. Поэтому

$$\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}, \; j = \overline{2, n}. \tag{14}$$

Так как $\lambda_1 = B(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1) = B(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = a_{11} = \Delta_1$, то отсюда и из (14) получаем следующие формулы для канонических коэффициентов:

$$\lambda_1 = \Delta_1, \; \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \; \ldots, \; \lambda_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \tag{15}$$

Пример 3 Найти канонический вид квадратичной формы

$$g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

методом Якоби.

Запишем матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда главные миноры: $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 1 > 0$, $\Delta_3 = -17 < 0$. Канонический вид этой квадратичной формы будет иметь вид:

$$g = 2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{-17}{2}y_3^2.$$

Пример 4 Найти нормальный вид квадратичной формы

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

методом Якоби.