ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. НОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Унитарный (ортогональный) оператор

Линейный оператор $U \in L(U, U)$ $(U \in L(E, E))$ называется унитарным *(*ортогональным*)*, если $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ справедливо соотношение

$$(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{1}$$

В дальнейшем соотношение (1) будем называть *условием унитарности* оператора.

Замечание 1 Из условия (1) унитарности оператора следует, что для любого унитарного оператора *U* справедливо равенство $\| U\boldsymbol{x} \| = \| \boldsymbol{x} \|$.

Отметим следующее утверждение.

Теорема 1 Если λ – собственное значение унитарного оператора *U*, то $|\lambda| = 1$.

Доказательство. Действительно, если λ – собственное значение *U*, то существует такой элемент $\boldsymbol{e}$, что $\|\boldsymbol{e}\| = 1$ и $U\boldsymbol{e} = \lambda\boldsymbol{e}$. Отсюда и из замечания 1 следуют соотношения $|\lambda| = \|\lambda\boldsymbol{e}\| = \|U\boldsymbol{e}\| = \|\boldsymbol{e}\| = 1$. *Теорема доказана*.

Теорема 2 *Для* того чтобы линейный оператор *U*, действующий в евклидовом пространстве E, был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено соотношение

$$U^* = U^{-1}. \tag{2}$$

Доказательство. 1) *Необходимость*. Пусть оператор *U* унитарный, т.е. выполнено условие (1). Обращаясь к определению сопряженного оператора U^*, можно переписать это условие в следующей форме:

$$\left(U^*U\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

или, иначе, для любых $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ выполняется равенство $\left(\left(U^*U - I\right)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) = 0$.

Фиксируя в этом равенстве любой элемент $\boldsymbol{x}$ и считая $\boldsymbol{y}$ произвольным, получим, что линейный оператор $U^*U - I$ действует по правилу $\left(U^*U - I\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Следовательно, $U^*U = I$. Совершенно аналогично можно убедиться, что $UU^* = I$.

Таким образом, U и U^* – взаимно обратные операторы, т.е. соотношение (2) выполнено.

2) *Достаточность*. Пусть выполнено условие (2). Тогда, очевидно, $U^*U = UU^* = I$. Обращаясь к определению сопряженного оператора и используя только что написанные соотношения, получим при любых $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ равенства

$$(\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) = \left(\boldsymbol{x}, U^*U\boldsymbol{y}\right) = (\boldsymbol{x}, I\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Таким образом, условие (1) унитарности оператора выполнено. Следовательно, оператор *U* унитарный. *Теорема доказана*.

Замечание 2 В процессе доказательства теоремы установлено, что условие (1) унитарности оператора *U* и условие

$$U^*U = UU^* = I \tag{3}$$

эквивалентны. Таким образом, в основу определения унитарного оператора можно положить условие (3). Это условие также можно называть *условием унитарности* оператора *U*.

Матрица *U* называется *ортогональной*, если

$$U^t U = UU^t = E. \tag{4}$$

Если $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ – ортонормированный базис в евклидовом пространстве E, то оператор U является ортогональным тогда и только тогда, когда его матрица в базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$ ортогональна.

Свойства ортогональных матриц:

1. Действительная квадратная матрица A ортогональна тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из равенств $A^t A = E$, $AA^t = E$.
2. Единичная матрица является ортогональной. Нулевая матрица ортогональной не является.
3. Если матрица A ортогональна, то A^t тоже ортогональна.
4. Если матрицы A и B ортогональны, то AB – ортогональна.
5. Определитель ортогональной матрицы равен 1 или –1.
6. Действительная квадратная матрица A ортогональна тогда и только тогда, когда все ее строки (столбцы) образуют ортонормированный базис в E^n.
7. Матрица перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному базису является ортогональной.
8. Если матрица перехода от одного базиса к другому ортогональна и один из этих базисов ортонормирован, то и второй базис является ортонормированным.

Непосредственно из равенства (4) следует, что если матрица $U = (u_{ik})$ является ортогональной, то

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^k u_i^l = \begin{cases} 1, \ k = l; \\ 0, \ k \neq l. \end{cases}$$

В заключение рассмотрим для примера ортогональные преобразования в одномерном и двумерном пространствах.

В одномерном случае каждый вектор $\boldsymbol{x}$ имеет вид $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{e}$, где α – вещественное число, и $\boldsymbol{e}$ – вектор, порождающий данное пространство. Тогда $U\boldsymbol{e} = \lambda \boldsymbol{e}$, и так как $(U\boldsymbol{e}, U\boldsymbol{e}) = \lambda^2 (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e})$, то $\lambda = \pm 1$.

Таким образом, в одномерном случае существуют два ортогональных преобразования: $U_+ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ и $U_- \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.

В двумерном случае каждое ортогональное преобразование определяется в произвольном ортонормированном базисе ортогональной матрицей второго порядка, т.е. матрицей $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Из условия (3) следует

$$a^2 + b^2 = 1, \ a^2 = d^2, \ b^2 = c^2, \ ac + db = 0, \ ab + cd = 0.$$

Полагая $a = \cos\varphi$, $b = -\sin\varphi$, получаем, что каждая ортогональная матрица второго порядка имеет вид

$$Q_{\pm} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \pm\sin\varphi & \pm\cos\varphi \end{pmatrix},$$

причем во второй строке в обоих случаях следует брать либо знак +, либо знак –.

Отметим, что $\det Q_{\pm} = \pm 1$. Ортогональная матрица Q_+ называется *собственной*, а ортогональная матрица Q_- – *несобственной*.

Оператор U_+ с матрицей Q_+ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ осуществляет поворот в плоскости $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ на угол φ.

Для того чтобы выяснить, как действует оператор U_- с матрицей Q_-, введем матрицу $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, совпадающую с Q_- при $\varphi = 0$, и заметим, что $Q_- = QQ_+$. Матрице Q отвечает отражение плоскости относительно оси $\boldsymbol{e}_1$, и следовательно, действие оператора заключается в повороте на угол φ и последующем отражении.

В общем случае, когда ортогональный оператор U действует в n-мерном евклидовом пространстве, существует ортонормированный базису, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$, в котором матрица оператора Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & 0 & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & \\ & & & & & \sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 & & & \\ & & 0 & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ & & & & & & & & \sin\varphi_k & -\cos\varphi_k \end{pmatrix}.$$

В этой матрице все элементы, кроме выписанных, равны нулю.

Таким образом, в некотором ортонормированном базисе действие ортогонального оператора сводится к последовательным поворотам и отражениям относительно координатных осей.

Пример 1 Для ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, определить канонический вид и ортонормированный базис, в котором матрица ортогонального оператора имеет канонический вид.

Решение. В трехмерном евклидовом пространстве матрица ортогонального оператора в подходящем ортонормированном базисе имеет один из следующих видов:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ и } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

След матрицы линейного оператора – это инвариант линейного оператора, который не зависит от базиса.

Для матрицы A: $trA = 2/3 + 2/3 + 2/3 = 2$.

Для матрицы A_1: $trA_1 = -1 + \cos\varphi + \cos\varphi = 2\cos\varphi - 1$.

Для матрицы A_2: $trA_2 = 1 + \cos\varphi + \cos\varphi = 2\cos\varphi + 1$.

Равенство $trA = trA_1$ невозможно, поэтому канонический вид матрицы ортогонального оператора равен $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Так как $trA = trA_2$, то $2 = 1 + 2\cos\varphi$. Отсюда $\cos\varphi = 0{,}5$ и $\varphi = \pi/3$. Поэтому

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ 0 & \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A_2 равны $1, 1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Найдем соответствующие собственные векторы.

Пусть $\underline{\lambda = 1}$. Тогда

$$(A - \lambda E)X = 0 \to \begin{pmatrix} 2/3-1 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3-1 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_3, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

Собственный вектор, соответствующий $\lambda = 1$, равен $(1;\, 1;\, 1)$.

Пусть $\underline{\lambda = 1/2 + i\sqrt{3}/2}$. Тогда

$$(A - \lambda E)X = 0 \to \begin{pmatrix} 2/3-1/2-i\sqrt{3}/2 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3-1/2-i\sqrt{3}/2 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3-1/2-i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 18\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 6\sqrt{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} i.$$

Так как у нас действительное линейное пространство, то возьмем за два других собственных вектора действительную и мнимую части полученного вектора, т.е. $(0;\, 1;\, -1)$ и $(2;\, -1;\, -1)$.

Базис из собственных векторов является ортогональным, получим из него ортонормированный базис:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;\, 1;\, 1), \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0;\, 1;\, -1), \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2;\, -1;\, -1).$$

Пример 2 Для ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$, определить канонический вид и ортонормированный базис, в котором матрица ортогонального оператора имеет канонический вид.

Нормальный оператор

Линейный оператор A называется нормальным, если справедливо соотношение

$$A^* A = A A^*. \tag{5}$$

Обращаясь к условию (4) унитарности оператора и к условию (5), мы видим, что любой унитарный оператор является нормальным оператором.

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть A – нормальный оператор. Тогда оператор A и оператор A^* имеют общий собственный вектор $\boldsymbol{e}$ такой, что $\|\boldsymbol{e}\|=1$, и справедливы соотношения $A\boldsymbol{e}=\lambda\boldsymbol{e}$ и $A^*\boldsymbol{e}=\lambda\boldsymbol{e}$.

Доказательство. Пусть λ – собственное значение оператора A, и пусть $R_\lambda=\ker(A-\lambda I)$. Иными словами, R_λ – множество всех элементов $\boldsymbol{x}$ таких, что $A\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

Убедимся теперь, что если $\boldsymbol{x}$ принадлежит R_λ, то и $A^*\boldsymbol{x}$ принадлежит R_λ. Действительно, если $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ (т.е. $\boldsymbol{x}\in R_\lambda$), то, поскольку A – нормальный оператор, $A\left(A^*\boldsymbol{x}\right)=A^*(A\boldsymbol{x})=A^*(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\left(A^*\boldsymbol{x}\right)$. Иными словами, вектор $A^*\boldsymbol{x}$ является собственным вектором оператора A и отвечает собственному значению λ, т.е. принадлежит R_λ.

Рассматривая далее оператор A^* как оператор, действующий из R_λ в R_λ, и используя вывод о том, что каждый линейный оператор имеет собственное значение, мы можем утверждать, что в R_λ существует элемент $\boldsymbol{e}$ такой, что $\|\boldsymbol{e}\|=1$ и справедливы соотношения $A^*\boldsymbol{e}=\mu\boldsymbol{e}$ и $A^*\boldsymbol{e}=\lambda\boldsymbol{e}$. Используя эти соотношения и условие $\|\boldsymbol{e}\|=1$, найдем

$$(A\boldsymbol{e},\,\boldsymbol{e})=(\lambda\boldsymbol{e},\,\boldsymbol{e})=\lambda\|\boldsymbol{e}\|^2=\lambda, \qquad \left(\boldsymbol{e},\,A^*\boldsymbol{e}\right)=(\boldsymbol{e},\,\mu\boldsymbol{e})=\overline{\mu}\|\boldsymbol{e}\|^2=\overline{\mu}.$$

Так как $(A\boldsymbol{e},\,\boldsymbol{e})=\left(\boldsymbol{e},\,A^*\boldsymbol{e}\right)$, то, очевидно, $\lambda=\mu$. *Лемма доказана*.

Теорема 3 Пусть А – нормальный оператор. Тогда существует ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_k\}$, состоящий из собственных векторов операторов А и A^*.

Следствие 1 Пусть А – нормальный оператор. Существует базис $\{\boldsymbol{e}_k\}$, в котором А имеет диагональную матрицу.

Следствие 2 Унитарный оператор имеет полную ортонормированную систему собственных векторов.

Теорема 4 Если у действующего в n-мерном евклидовом пространстве E оператора A имеется n попарно ортогональных собственных элементов $\boldsymbol{e}_1,\,\boldsymbol{e}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{e}_n$, то оператор A нормальный.

Доказательство. Пусть $\{\boldsymbol{e}_k\}$ – попарно ортогональные собственные векторы оператора A. Тогда $A\boldsymbol{e}_k=\lambda_k\boldsymbol{e}_k$ оператор A имеет представление (3.7) ($A\boldsymbol{x}=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k$).

Докажем, что сопряженный оператор A^* действует по правилу

$$A^*\boldsymbol{y}=\sum_{k=1}^{n}\overline{\lambda}_k(\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k. \tag{6}$$

Достаточно доказать, что для операторов A и A^* справедливо равенство

$$\left(\boldsymbol{x},A^*\boldsymbol{y}\right)=(A\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}). \tag{7}$$

Подставляя в левую часть этого равенства выражение $A^*\boldsymbol{y}$ по формуле (6), получим:

$$\left(\boldsymbol{x},A^*\boldsymbol{y}\right)=\left(\boldsymbol{x},\,\sum_{k=1}^{n}\overline{\lambda}_k(\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{x},\,\overline{\lambda}_k(\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\overline{(\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{e}_k)}(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{e}_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{y})=(A\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}).$$

Таким образом, равенство (7) доказано, и поэтому оператор A^*, действующий по правилу (6), является сопряженным к оператору A.

Чтобы завершить доказательство теоремы, нужно убедиться в справедливости равенства (5): $A^*A = AA^*$. Имеем, согласно (6),

$$AA^*\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k) A\boldsymbol{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{\lambda}_k (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k) A\boldsymbol{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k \lambda_k (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k) A\boldsymbol{e}_k = A^*A\boldsymbol{x}$$

.Итак, для операторов A и A^* справедливо равенство (5), и, следовательно, оператор A является нормальным. Теорема доказана.