ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Пусть $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ – симметричная билинейная форма, заданная на линейном пространстве V.

Квадратичной формой называется числовая функция $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ одного векторного аргумента $\boldsymbol{x}$, которая получается из билинейной формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Пример 1 Дана симметрическая билинейная функция $f = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2$. Найти квадратичную форму, ассоциированную с этой симметрической билинейной функцией.

Заменим в формуле симметрической билинейной функции букву $\boldsymbol{y}$ на букву $\boldsymbol{x}$. Тогда квадратичная форма имеет вид: $g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 - 3x_2^2 = x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$.

Пример 2 Дана симметрическая билинейная функция $f = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$. Найти квадратичную форму, ассоциированную с этой симметрической билинейной функцией.

Симметричная билинейная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ называется *полярной* к квадратичной форме $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$.

Полярная билинейная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и квадратичная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ связаны следующим соотношением (*поляризация*):

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\left[B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})\right],$$

которое вытекает из очевидного равенства

$$B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$

и свойства симметрии формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Пример 3 Найти поляризацию квадратичной формы $g = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$.

Пусть $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$. Тогда $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. Поляризация квадратичной формы равна:

$$\frac{1}{2}\left[g(x+y) - g(x) - g(y)\right] = 0{,}5\Big[(x_1+y_1)^2 + 4(x_1+y_1)(x_2+y_2) + 2(x_2+y_2)^2 -$$
$$- -\left(x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2\right) - \left(y_1^2 + 4y_1y_2 + 2y_2^2\right)\Big] = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + 2x_2y_2.$$

Пример 4 Найти поляризацию квадратичной формы $g = x_1^2 - 5x_1x_2 + 3x_2^2$.

Пусть в конечномерном линейном пространстве V задана симметричная билинейная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, полярная к квадратичной форме $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$. Пусть, кроме того, в V указан базис $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$.

Форму $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ можно представить в виде

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j\,,$$

где x_i и y_j – координаты в базисе $\boldsymbol{e}$ векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ соответственно. При этом в силу симметрии $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$: $a_{ij} = a_{ji}$.

Полагая в последнем виде билинейной формы $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ (т.е. $y_i = x_i$) мы получим следующее представление для квадратичной формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ в конечномерном пространстве V с заданным базисом $\boldsymbol{e}$:

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j . \qquad (1)$$

Матрица (a_{ij}) называется матрицей квадратичной формы $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ в заданном базисе $\boldsymbol{e}$.

Матрица (a_{ij}) является симметричной. Очевидно, каждой симметричной матрице (a_{ij}) отвечает с помощью соотношения (1) квадратичная форма $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$, причем (1) будет представлением $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ в пространстве V с заданным базисом $\boldsymbol{e}$.

Пример 5 Найти матрицу квадратичной формы

$$g(x_1,\ x_2,\ x_3) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 .$$

Пример 6 Найти матрицу квадратичной формы

$$g(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 .$$

Отметим, что матрица квадратичной формы при переходе к новому базису преобразуется по формуле (7) (см. билинейные формы). Поэтому ранг этой матрицы не меняется при переходе к новому базису.

Обычно ранг матрицы квадратичной формы $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ называется рангом квадратичной формы.

Если ранг матрицы квадратичной формы равен размерности пространства V, то форма называется *невырожденной*, а в противном случае – *вырожденной*.

В дальнейшем мы будем использовать следующую терминологию.

Квадратичная форма $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ называется:

1) положительно *(*отрицательно*) опреде*ленной, если *для* любого ненулевого $\boldsymbol{x}$ выполняется неравенство

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) > 0 \qquad (B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) < 0)$$

(такие формы называются также знакоопределенными*);*

2) *знакопеременной,* если существуют такие $\boldsymbol{x}$ и **y***,* что

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) > 0, \qquad B(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}) < 0;$$

3) *квазизнакоопределенной,* если *для* всех $\boldsymbol{x}$

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) \geq 0 \text{ или } B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) \leq 0,$$

но имеется отличный от нуля вектор $\boldsymbol{x}$*,* для которого $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = 0$.

В дальнейшем мы укажем признаки, по которым можно судить о принадлежности формы $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ к одному из указанных типов.

Отметим следующее важное утверждение.

Если $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ представляет собой билинейную форму, полярную положительно определенной квадратичной форме $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$*,* то $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения векторов в евклидовом пространстве.

Обратимся к четырем аксиомам скалярного произведения.

Если число, называемое скалярным произведением векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, обозначить символом $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$, то эти аксиомы запишутся следующим образом:

1°. $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})$.

2°. $B(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{y})$.

3°. $B(\lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \lambda B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$.

4°. $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) \geq 0$ и $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) > 0$ при $\boldsymbol{x} \neq 0$.

Так как билинейная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ полярная квадратичной форме $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ симметрична, то аксиома 1° выполняется. Аксиомы 2° и 3° в сочетании с требованием симметрии выполнены в силу определения билинейной формы. Аксиома 4° выполняется, так как квадратичная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ положительно определена.

Замечание. Очевидно, аксиомы скалярного произведения можно рассматривать как совокупность требований, определяющих билинейную форму, полярную положительно определенной квадратичной форме. Поэтому скалярное произведение в линейных пространствах может быть задано с помощью такого вида билинейной формы.