ПОЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Напомним, что линейный оператор называется невырожденным, если его ядро состоит только из нулевого вектора.

Теорема 1 Пусть A – невырожденный линейный оператор в евклидовом пространстве E. Тогда существуют ортогональный оператор U и самосопряжённый оператор C с положительными собственными значениями (положительный оператор), такие, что $A = UC$ – *полярное разложение*.

Доказательство.

1. Положим, что $D = A^* A$, где A^* – сопряжённый к A. Тогда

$$D^* = \left(A^* A\right)^* = A^* A^{**} = A^* A = D.$$

То есть D самосопряжён.

2. Существует ортонормированный базис, в котором D имеет матрицу $\operatorname{diag}\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$. Пусть $\lambda = \lambda_i$ – одно из собственных чисел D, и $\boldsymbol{x}$ – собственный вектор. Тогда $\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (D\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \left(A^* A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\right) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) > 0$. Отсюда $\lambda = \dfrac{(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} > 0$, то есть все λ_i – положительны.

3. Существует самосопряжённый оператор C с матрицей $\operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}\right\}$ в том же базисе. Ясно, что $C^2 = D$ и C – невырожденный.

4. Положим $U = AC^{-1}$. Тогда

$$(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) = \left(AC^{-1}\boldsymbol{x}, AC^{-1}\boldsymbol{y}\right) = \left(\left(AC^{-1}\right)^* AC^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) =$$

$$= \left(\left(C^{-1}\right)^* A^* AC^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) = \left(\left(C^{-1}\right)^* C^2 C^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

так как $\left(C^{-1}\right)^* = \left(C^*\right)^{-1} = C^{-1}$. То есть U ортогонален. Тем самым мы доказали существование полярного разложения.

Замечание. На практике, надо умножить матрицу A линейного оператора на матрицу A^t. Из матрицы AA^t извлечь квадратный корень и получим симметрическую матрицу R. С помощью элементарных преобразований из матрицы $\left(R \middle| A\right)$ получим матрицу $\left(E \middle| Q\right)$. Тогда $A = RQ$.

Пример 1 Найти полярное разложение для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ линейного оператора, действующего в евклидовом пространстве.

Решение. $R^2 = AA^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Тогда, $R = \sqrt{R^2} = aR^2 + bE$. Найдем a и b.

Найдем собственные значения матрицы R^2: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$. Они различны.

Функция $f(x) = \sqrt{x}$. Составим и решим систему относительно a и b:

$$\begin{cases} f(\lambda_1)=a\lambda_1+b, \\ f(\lambda_2)=a\lambda_2+b; \end{cases} \to \begin{cases} \sqrt{2}=2a+b, \\ \sqrt{8}=8a+b; \end{cases} \to \begin{cases} a=\sqrt{a\lambda_1+b}2,/6 \\ \quad b=2\sqrt{2}/3. \end{cases}$$

Тогда, $R=aR^2+bE=\dfrac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

Видим, что $R^t=\begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}=R$.

В матрице $(R\,|\,A)$ получим на месте матрицы R единичную матрицу:

$$(R\,|\,A)=\left(\begin{array}{cc|cc} 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 2 & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} & 2 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{array}\right).$$

Тогда, $Q=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Мы видим, что

$$QQ^t=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили полярное разложение $A=RQ$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2 Найти полярное разложение для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ линейного оператора, действующего в евклидовом пространстве.