СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Сопряженный оператор

Пусть E – евклидово пространство.

Линейный оператор $A^*: E \to E$ называется *сопряженным* к линейному оператору $A: E \to E$, если для любых $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из E выполняется соотношение

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \left(\boldsymbol{x},\ A^*\boldsymbol{y}\right). \tag{1}$$

Легко убедиться в том, что оператор A^*, сопряженный к линейному оператору A, сам является линейным оператором. Это следует из очевидного соотношения

$$(A\boldsymbol{x},\ \alpha\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{y}_2) = \overline{\alpha}(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_1) + \overline{\beta}(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_2) = \overline{\alpha}\left(\boldsymbol{x},\ A^*\boldsymbol{y}_1\right) + \overline{\beta}\left(\boldsymbol{x},\ A^*\boldsymbol{y}_2\right) = \left(\boldsymbol{x},\ A^*(\alpha\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{y}_2)\right),$$

справедливого для любых элементов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$ и любых комплексных чисел α и β.

Лемма 1 Если квадратные матрицы M и N порядка n таковы, что для любых вектор-столбцов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$ выполняется соотношение $\boldsymbol{x}^t M\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^t N\boldsymbol{y}$, то $M = N$.

Доказательство. Пусть m_{ij}, n_{ij} – элементы матриц M и N соответственно, стоящие в i-й строке и j-м столбце. Для произвольной пары индексов i и j выберем такие вектор-столбцы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i - \text{я строка}, \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow j - \text{я строка}, \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

в которых присутствует только один ненулевой элемент, равный единице и стоящий на указанном месте. Записав равенство $\boldsymbol{x}^t M\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^t N\boldsymbol{y}$ с выбранными столбцами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и вычислив обе стороны равенства, получаем $m_{ij} = n_{ij}$.

Так как пара индексов может быть выбрана произвольно, заключаем, что $M = N$.

Теорема 1 Любому линейному оператору $A: E \to E$ соответствует единственный сопряженный оператор A^*, причем его матрицей в любом *ортонормированном базисе* $\boldsymbol{e}$ является матрица $\widetilde{A}^t$, транспонированная матрице $\widetilde{A}$ линейного оператора A в том же базисе $\boldsymbol{e}$.

Доказательство. Доказательство теоремы основано на том, что фиксированный базис евклидова пространства E позволяет установить взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из $L(E,\ E)$ и квадратными матрицами с действительными элементами размера $n = \dim E$. Это соответствие заключается в сопоставлении *линейному оператору* его *матрицы* в фиксированном базисе.

Докажем, что линейный оператор B с матрицей $\widetilde{B} = \widetilde{A}^t$ в базисе $\boldsymbol{e}$ является сопряженным к линейному оператору A. Для этого достаточно проверить выполнение равенства

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ B\boldsymbol{y}). \qquad (2)$$

для любой пары векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$.

Пусть x, y – столбцы координат векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Тогда вектор $A\boldsymbol{x}$ имеет столбец координат $\widetilde{A}x$, а левая часть равенства (2) равна $\left(\widetilde{A}x\right)^t y$, что следует из ортонормированности базиса. Аналогично правая часть этого равенства имеет вид $x^t\left(\widetilde{B}y\right)$. Следовательно, равенство (2) в координатной записи имеет вид

$$\left(\widetilde{A}x\right)^t y = x^t\left(\widetilde{B}y\right). \qquad (3)$$

Так как $\left(\widetilde{A}x\right)^t = x^t\widetilde{A}^t$ в силу свойств матричных операций, равенство (3) эквивалентно равенству

$$x^t\widetilde{A}^t y = x^t\widetilde{B}y, \qquad (4)$$

которое при $\widetilde{B} = \widetilde{A}^t$ превращается в тождество.

Если некоторый линейный оператор B является сопряженным к линейному оператору A, то для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ выполняется равенство (2). Значит, для матриц $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ этих операторов равенство (3.4) выполняется для любых столбцов x и y. Согласно доказанной лемме, $\widetilde{B} = \widetilde{A}^t$. Поэтому линейный оператор B определен однозначно, так как однозначно определена его матрица.

Характеристические многочлены (и, следовательно, спектры) линейного оператора и его сопряженного оператора совпадают.

В некоторых случаях линейный оператор, сопряженный к данному линейному оператору, можно найти, не вычисляя матрицы этого оператора.

Пример 1 Вектор $\boldsymbol{a} \in R^3$ порождает линейный оператор $A : R^3 \to R^3$ согласно формуле

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}.$$

Оператор, сопряженный к оператору A, можно определить, опираясь на свойства скалярного, векторного и смешанного произведений:

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{axy} = \boldsymbol{yax} = (\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\times\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x},\ -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ -A\boldsymbol{y}).$$

Из приведенных соотношений видно, что $A^* = -A$.

Пример 2 Линейное пространство $C_0^\infty[a,\, b]$ бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a,\, b]$ функций, у которых в точках a и b производные любого порядка равны нулю со скалярным произведением $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$. Отображение $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$, которое каждой функции $x \in C_0^\infty[a,\, b]$ ставит в соответствие ее производную, является линейным оператором. Оператором, сопряженным к A, будет $-A$, поскольку, согласно

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \int\limits_0^1 x'(t)y(t)dt = x(t)y(t)\,\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x(t)y'(t)dt = -\int\limits_0^1 x(t)y'(t)dt = \int\limits_0^1 x(t)\left(-y'(t)\right)dt = (\boldsymbol{x},\ -A\boldsymbol{y}).$$

Отметим следующие свойства сопряженных операторов:

1. $I^* = I$.
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$.
3. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda}A^*$.
4. $\left(A^*\right)^* = A$.
5. $(AB)^* = B^*A^*$.

Доказательства свойств 1 – 4 элементарны. Приведем доказательство свойства 5.

Согласно определению произведения операторов справедливо соотношение $(AB)\boldsymbol{x} = A(B\boldsymbol{x})$. С помощью этого равенства и определения сопряженного оператора получаем следующую цепочку соотношений:

$$((AB)\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (A(B)\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (B\boldsymbol{x},\ A^*\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ B^*(A^*\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x},\ (B^*A^*)\boldsymbol{y}).$$

Справедливость свойства 5 установлена.

Замечание. Понятие сопряженного оператора для вещественного пространства вводится совершенно аналогично. Выводы этого пункта и свойства сопряженных операторов справедливы и для этого случая (при этом свойство 3 формулируется так: $((\lambda A)^* = \lambda A^*$).

Пример 3 В пространстве $P_2(t)$ введено скалярное произведение

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)dt$$

и задана матрица $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ линейного оператора A в базисе $\{1,\ t,\ t^2\}$. Построить матрицу $\widetilde{A}^*$ сопряженного оператора A^* в базисе $\{1,\ t,\ t^2\}$.

Решение. Проверим, является ли базис $\{1,\ t,\ t^2\}$ ортонормированным в заданном евклидовом пространстве:

$$(1,\ t) = \int\limits_{-1}^{1} 1\cdot t dt = 0, \qquad (1,\ t^2) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}, \qquad (t,\ t^2) = \int\limits_{-1}^{1} t^3 dt = 0,$$

$$(1,\ 1) = \int\limits_{-1}^{1} 1 dt = 2, \qquad (t,\ t) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}, \qquad (t^2,\ t^2) = \int\limits_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{2}{5}.$$

Ортогонализируем данный базис:

$$\boldsymbol{f}_1 = 1,$$
$$\boldsymbol{f}_2 = t,$$
$$\boldsymbol{f}_3 = t^2 + \lambda \boldsymbol{f}_1, \qquad \lambda = -\frac{(t^2,\ \boldsymbol{f}_1)}{(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_1)} = -\frac{\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \boldsymbol{f}_3 = -\frac{1}{3} + t^2.$$

Осталось нормировать полученную систему

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{f}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{f}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_2)}} = t\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{f}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{f}_3,\ \boldsymbol{f}_3)}} = \sqrt{\frac{5}{8}}(-1 + 3t^2).$$

Мы построили ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Теперь мы должны, используя матрицу перехода от одного базиса к другому, перейти к матрице оператора в ортонормированном базисе. Зная, как связаны матрицы сопряженных операторов в ортонормированном базисе, можно построить матрицу сопряженного оператора A^* в построенном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, а затем вернуться опять к исходному базису.

Матрица перехода от базиса $\{1,\ t,\ t^2\}$ к базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ имеет вид

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\sqrt{\frac{5}{8}}\\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0\\ 0 & 0 & 3\sqrt{\frac{5}{8}}\end{pmatrix},\qquad T^{-1}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3}\\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{\boldsymbol{e}}=T^{-1}\widetilde{A}T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -1 & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Мы знаем, как связаны матрицы сопряженных операторов в ортонормированном базисе

$$\widetilde{A}^*=\left(\widetilde{A}\right)^t,$$

поэтому

$$\widetilde{A}_{\boldsymbol{e}}^*=\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} & 1\end{pmatrix}.$$

Используя матрицу перехода T, возвращаемся к исходному базису:

$$\widetilde{A}^*=T\widetilde{A}_{\boldsymbol{e}}^*T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{4} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{5}{2} & 1\end{pmatrix}.$$

Пример 4 Матрица линейного оператора в ортонормированном базисе равна $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 5 & -2 & 7\\ 11 & 2 & 9\end{pmatrix}$. Найти матрицу сопряженного оператора в этом базисе.

Решение. Матрица сопряженного оператора получается транспонированием матрицы линейного оператора и равна $A^t=\begin{pmatrix}1 & 5 & 11\\ 3 & -2 & 2\\ 4 & 7 & 9\end{pmatrix}$ **Пример 5** В базисе $\boldsymbol{a}_1=(-1;\,1)$, $\boldsymbol{a}_2=(1;\,-2)$ евклидова пространства R^2 известна матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ линейного оператора. Определить матрицу сопряженного оператора в этом базисе.

Решение. Определим элементы матрицы Грамма базисных векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$:

Тогда, $G=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$. Отсюда, $G^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Поэтому матрица сопряженного оператора в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ равна $A^*=G^{-1}AG=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-38 & 68\\ -24 & 43\end{pmatrix}$.

Самосопряженный (симметричный) оператор

Линейный оператор A, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве, называют *самосопряженным* (*симметричным* (*эрмитовым*)), если $A^* = A$ или если для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ верно равенство

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{y}).$$

Линейный оператор A, действующий в евклидовом пространстве, называют кососимметричным (косоэрмитовым), если $A = -A^*$ или $(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = -(\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{y})$.

Действительно, если указанное соотношение выполняется, то, согласно первому определению, линейный оператор A является сопряженным оператором к самому себе, т.е. $A^* = A$.

Пример 6 Самосопряженными являются простейшие линейные операторы: нулевой θ и тождественный I, так как для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$

$$(I\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ I\boldsymbol{y}),$$

$$(\theta\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (0,\ \boldsymbol{y}) = 0 = (\boldsymbol{x},\ 0) = (\boldsymbol{x},\ \theta\boldsymbol{y}).$$

Самосопряженный оператор в вещественном пространстве определяется аналогично.

Пример 7 Рассмотрим линейное пространство R^3 с обычным скалярным произведением свободных векторов $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$. Отображение $A: R^3 \to R^3$ ортогонального проектирования векторов из R^3 на направление вектора $\boldsymbol{a}$ единичной длины, которое определяется формулой $A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$, является линейным оператором, так как

$$A(\mu\boldsymbol{x} + \nu\boldsymbol{y}) = (\mu\boldsymbol{x} + \nu\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = \mu(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} + \nu(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = \mu(A\boldsymbol{x}) + \nu(A\boldsymbol{y}).$$

Убедимся, что этот оператор является самосопряженным:

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = ((\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{y})\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x},\ (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{y}).$$

Теорема 2 Матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе является симметрической $A = A^t$ (эрмитовой). Наоборот, если матрица линейного оператора в некотором ортонормированном базисе является симметрической (эрмитовой), то этот оператор – самосопряженный .

Доказательство. Согласно определению, A – самосопряженный оператор, если $A^* = A$ ($A = -A^*$). Это эквивалентно тому, что матрица линейного оператора в ортонормированном базисе совпадает со своей транспонированной (эрмитовой) (она является матрицей сопряженного оператора). Такие матрицы и называют *симметрическими* (*эрмитовыми*).

С помощью самосопряженных операторов можно получить специальное представление произвольных линейных операторов. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3 Пусть A – линейный оператор, действующий в комплексном евклидовом пространстве U . Тогда справедливо представление $A = A_R + iA_I$, где A_R и A_I – самосопряженные операторы, называемые соответственно действительной и мнимой частью оператора A.

Доказательство. Согласно свойствам 2, 3 и 4 сопряженных операторов операторы $A_R = \dfrac{A + A^*}{2}$ и $A_I = \dfrac{A - A^*}{2}$ самосопряженные. Очевидно, $A = A_R + iA_I$. *Теорема доказана*.

Мы будем говорить, что операторы A и B *коммутируют*, если $AB = BA$.

Теорема 4 Для того чтобы произведение AB самосопряженных операторов A и B было самосопряженным оператором, необходимо и достаточно, чтобы они коммутировали.

Доказательство. Так как A и B – самосопряженные операторы, то, согласно свойству 5 сопряженных операторов, справедливы соотношения

$$(AB)^* = B^* A^* = BA. \tag{5}$$

Следовательно, если $AB = BA$, то $(AB)^* = AB$, т.е. оператор AB самосопряженный. Если же AB – самосопряженный оператор, то $AB = (AB)^*$, и тогда на основании (5) $AB = BA$. Теорема доказана.

В дальнейших теоремах устанавливается ряд важных свойств самосопряженных операторов.

Теорема 5 Если оператор A самосопряженный, то для любого $\boldsymbol{x} \in U$ скалярное произведение $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ – вещественное число.

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы вытекает из следующего свойства скалярного произведения в комплексном евклидовом пространстве $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})}$ и определения самосопряженного оператора $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$ (если комплексное число равно себе сопряженному, то оно действительное). *Теорема доказана*.

Теорема 6 Собственные значения самосопряженного оператора вещественны.

Доказательство. Пусть λ – собственное значение самосопряженного оператора A. По определению собственного значения оператора A существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ такой, что $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$. Из этого соотношения следует, что вещественное (в силу теоремы 4) скалярное произведение $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ может быть представлено в виде

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda \| \boldsymbol{x} \|.$$

Так как $\| \boldsymbol{x} \|$ и $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ вещественны, то, очевидно, и λ – вещественное число. *Теорема доказана.*

Следствие 1 Если матрица A является симметрической, то все корни ее характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ действительные.

Следствие 2 Самосопряженный оператор, действующий в n*-мерном* евклидовом пространстве, имеет n собственных значений, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.

Следствие 3 Симметрическая матрица порядка n имеет n собственных значений, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.

В следующей теореме выясняется свойство ортогональности собственных векторов самосопряженного оператора.

Теорема 6 Если A – самосопряженный оператор, то собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям этого оператора, ортогональны.

Доказательство. Пусть λ_1 и λ_2 – различные собственные значения ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) самосопряженного оператора A, а $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ – соответственно отвечающие им собственные векторы. Тогда имеют место соотношения $A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$, $A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$. Поэтому скалярные произведения $(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ и $(\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2)$ соответственно равны следующим выражениям

$$(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2), \quad (\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2).$$

Так как оператор A самосопряженный, то скалярные произведения $(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ и $(\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2)$ равны, и поэтому из последних соотношений путем вычитания получаем равенство

$$(\lambda_1-\lambda_2)(\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2)=0\,.$$

Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то из последнего равенства следует равенство нулю скалярного произведения $(\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2)$, т.е. ортогональность собственных векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$. *Теорема доказана*.

Рассмотрим самосопряженный оператор A и собственные значения $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ этого оператора. При этом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ – ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов, отвечающих $\{\lambda_i\}$. Пусть $\boldsymbol{x} \in V$. Тогда

$$\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k\,, \tag{6}$$

а так как $A\boldsymbol{e}_k=\lambda_k\boldsymbol{e}_k$, то с помощью (6) получаем

$$A\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k\,. \tag{7}$$

Оператор P_k, определяемый соотношением

$$P_k\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k \tag{8}$$

называется *проектором* на одномерное подпространство, порожденное вектором $\boldsymbol{e}_k$.

Из свойств скалярного произведения сразу же следует, что P_k – самосопряженный линейный оператор.

Отметим следующие важные *свойства проекторов*:

1. $P_k^2=P_k$ (отсюда следует, что $P_k^m=P_k$, где m – натуральное).
2. $P_kP_j=0$, где $k \neq j$.

Доказательство этих свойств следует из соотношений:

$$(P_kP_j)\boldsymbol{x}=P_k(P_j)\boldsymbol{x}=P_k(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j=(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_j,\, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Заметим также, что непосредственно из определения (7) следует, что P_k коммутирует с каждым оператором, который коммутирует с A.

Из соотношений (6), (7) и (8) получаем следующие выражения для $\boldsymbol{x}$ и $A\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{n}P_k\,\boldsymbol{x}\,, \tag{9}$$

$$A\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kP_k\boldsymbol{x}\,. \tag{10}$$

Из равенства (9) следует, что оператор $\sum_{k=1}^{n}P_k$ является тождественным:

$$I=\sum_{k=1}^{n}P_k\,. \tag{11}$$

Из равенства (10) получаем так называемое *спектральное разложение самосопряженного оператора*:

$$A=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kP_k\,. \tag{12}$$

Из свойств 1 и 2 проекторов и из соотношения (12) вытекает следующее выражение для A^2:

$$A^2=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 P_k .$$

Очевидно, вообще для любого целого положительного s

$$A^s=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^s P_k . \tag{13}$$

Рассмотрим произвольный полином $p(\lambda)=\sum_{i=1}^{m}c_i\lambda^i$. По определению считают $p(A)=\sum_{i=1}^{m}c_i A^i$. Обращаясь к соотношению (13) легко получить следующее выражение для $p(A)$:

$$p(A)=\sum_{i=1}^{m}p(\lambda_i)P_i . \tag{14}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 7 (теорема Гамильтона-Кэли) Если A – самосопряженный оператор и $\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ – характеристический многочлен этого оператора, то $\chi_A(A)=0$.

Доказательство. Действительно, если A – самосопряженный оператор и λ_i – собственные значения этого оператора, то λ_i – корень характеристического уравнения, т.е. $p(\lambda_i)=0$. Отсюда и из соотношения (14) следует, что $\chi_A(A)=0$. *Теорема доказана*.

Самосопряженный оператор A называется *положительным*, если для любого $\boldsymbol{x}\in V$ справедливо соотношение

$$(A\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x})\ge 0 . \tag{15}$$

Если оператор A – положительный и из условия $(A\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x})=0$ следует, что $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, то A называется *положительно определенным* оператором.

Положительные и положительно определенные операторы соответственно обозначаются символами $A\ge 0$ и $A>0$.

Теорема 8 Каждое собственное значение положительного (положительно определенного) оператора неотрицательно (положительно).

Доказательство. Пусть λ – собственное значение оператора A. Тогда, согласно лемме этого параграфа, можно указать такой элемент $\boldsymbol{x}$, $\|\boldsymbol{x}\|=1$, что $\lambda=(A\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x})$.

Отсюда и из соотношения (15) получаем, что $\lambda\ge 0$ для положительных операторов и $\lambda>0$ для положительно определенных операторов. *Теорема доказана*.

Введем понятие корня m-й степени (m – натуральное число) из оператора.

Корнем m-й степени из оператора A называется оператор B такой, что $B^m=A$. Корень m-й степени из оператора A обозначается символом $A^{1/m}$.

Естественно выделить какой-либо класс операторов, для которых имела бы смысл операция нахождения корня m-й степени. Определенный ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 9 Пусть A – положительный самосопряженный оператор, $A\ge 0$. Тогда для любого натурального m существует положительный самосопряженный оператор $A^{1/m}$, $A^{1/m}\ge 0$.

Доказательство. Обозначим через λ_k – собственные значения оператора A, и пусть $\{\boldsymbol{e}_k\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов. Обозначим далее через P_k –

проектор на одномерное подпространство, порожденное вектором $\boldsymbol{e}_k$.

Имеет место спектральное разложение (12) самосопряженного оператора A ($A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$). Так как $\lambda_k \ge 0$, то можно ввести следующий самосопряженный оператор B:

$$B = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{1/m} P_k . \tag{16}$$

Согласно (8) справедливо соотношение $(P_k \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) \ge 0$, из которого следует положительность операторов P_k и положительность оператора B (16).

Из свойств 1 и 2 проекторов P_k вытекает, что $B^m = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$. Сравнивая это выражение для B^m с выражением (12) для A, получим $B^m = A$. Выше была установлена положительность оператора B. *Теорема доказана*.

Замечание 1 Существует единственный положительный оператор $A^{1/m}$.

Замечание 2 В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$ собственных векторов оператора A матрица оператора $A^{1/m}$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{1/m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1/m} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{1/m} \end{pmatrix}.$$

Теорема 10 У каждого самосопряженного линейного оператора A, действующего в n-мерном евклидовом пространстве V существует n линейно независимых попарно ортогональных и единичных собственных векторов.

Замечание 1 Договоримся в дальнейшем нумеровать собственные значения самосопряженного оператора в порядке убывания с учетом повторяющихся, т.е. кратных собственных значений. При этом $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_n$ и отвечающие им собственные векторы $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{e}_n$ можно считать взаимно ортогональными и удовлетворяющими условию $\|\, \boldsymbol{e}_i \,\| = 1$.