ЗАВДАННЯ № 4, 5 Інтегральний і точковий методи найменших квадратів розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь

§1 Завдання для виконання і варіанти практичного завдання №4

1. Інтегральним і точковим методом найменших квадратів розв'язати крайову задачу
2. Побудувати графіки отриманих наближених розв'язків у випадку їх подання лінійною комбінацією трьох і десятьох лінійно незалежних функцій повної системи простору $C[a,b]$.
3. Знайти точний або чисельний розв'язок засобами системи комп'ютерної алгебри Maple (або ін.) і побудувати його графік.
4. Зробити висновок про збіжність послідовності наближених розв'язків до точного.

Номер варіанта збігається з тим, що надано в ПЗ 1, а s позначено число, що дорівнює

0, якщо Ваше ПІБ має номер в журналі академгрупи ДЕННОЇ форми здобуття освіти від 1 до 10;

1 – номер в списку для ДЕННОЇ форми здобуття освіти від 11 до 20;

2 – номер в списку для ЗАОЧНОЇ форми здобуття освіти від 1 до 10;

3 – номер в списку для ЗАОЧНОЇ форми здобуття освіти від 11 до 20.

Варіант	Крайова задача
1	$y'' - 2xy' + 2y = 5x + 1, \quad y(0) = s,\ y(1) = s + 1$
2	$y'' + 2y' - 4xy = 2x, \quad y(0) = s,\ y(1) = s + 1$
3	$y'' - 2xy' - 3y + 2x = 0, \quad y(-1) = y(1) = s$
4	$y'' - 2y' + 5xy = x, \quad y(0) = s,\ y(1) = s + 1$
5	$y'' - 2xy' + 2y = 3x, \quad y(0) = s,\ y(1) = s + 1$
6	$y'' - x^2 y' + y = x, \quad y(0) = y(1) = s$
7	$y'' + y' - 2xy = x - 2, \quad y(-1) = y(1) = s$
8	$y'' - 2xy' - 2y = 5x, \quad y(0) = y(1) = s$
9	$y'' - 2xy' + 2y = 3x - 1, \quad y(0) = s,\ y(1) = s + 1$
10	$y'' + 3y' - 4xy = 2x + 1, \quad y(0) = s,\ y(1) = s + 2$

§2 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №3

Задача 3.1 Розв'яжемо крайову задачу

$$y'' - (x+1)y' + (3-2x)y = x - 5; \quad y(1) = -1;\ y(3) = 2. \tag{3.15}$$

Розв'язання. Відповідно до (3.1) у даному випадку маємо:

$$p(x) = -(x+1);\ q(x) = 3 - 2x;\ f(x) = x - 5, \tag{3.16}$$

а в крайовій умові (3.6) потрібно покласти:

$$a = 1;\ b = 3;\ A = -1;\ B = 2. \tag{3.17}$$

Розв'язання проведемо в системі комп'ютерної алгебри Maple.

1. Спочатку потрібно ввести вхідні дані відповідно до (3.16) і (3.17).

2. Далі визначаємо нев'язку:

$$R := diff(y(x), x\$2) + \mathrm{p(x)} \cdot diff(y(x), x) + \mathrm{q(x)} \cdot y(x) - \mathrm{f(x)};$$

3. Оскільки коефіцієнти диференціального рівняння є многочленами, то систему лінійно незалежних функції задаємо через формули (3.7):

$$> \; u(x)[0] := A + \frac{(B-A)}{(b-a)} \cdot (x-a) :$$

$$> \; \textbf{for } k \textbf{ from } 1 \textbf{ to } n \textbf{ do} \quad u(x)[k] := (x-a)^k \cdot (x-b) : \textbf{ od}:$$

тут n – кількість лінійно незалежних функцій, що задовольняють однорідні крайові умови.

4. Наближений розв'язок подамо за формулою (3.9):

$$> \; y := \mathrm{x} \rightarrow u(x)[0] + sum(c[j] \cdot u(x)[j], j = 1..n) :$$

5. Квадратичне відхилення **інтегрального МНК** визначається через (3.11):

Q:=int(R^2,x=a..b):

6. Пошук критичної точки функції багатьох змінних, що передбачає утворення СЛАР та його розв'язання, проводиться аналогічно ПЗ 1 і ПЗ 2. Пропонується студентові виконати цю частину самостійно. **Зверніть увагу,** що частинні похідні обчислюються за змінними c[k], для k від 1 до n.
7. Якщо після розв'язання системи застосувати оператор assign, то як наближений розв'язок, так і квадратичне відхилення набудуть конкретного вигляду: розв'язок буде подано многочленом з числовими коефіцієнтами, а квадратичне відхилення набуде числового значення.
8. Обираючи $n = 3$, отримаємо наближений розв'язок $y(x)$ у вигляді

$$1.976689405 - 11.45108585x + 13.13459156x^2 - 5.437797191x^3 + 0.7776020770x^4,$$

а відповідне квадратичне відхилення дорівнюватиме

$$Q = 12.1222022221701.$$

При $n = 10$, отримаємо наближений розв'язок $y(x)$ –

$$68.34263346x + 0.02551509636x^{11} + 4.582163629x^9 - 0.5087566912x^{10} - 446.7764123x^4 + 367.0165640x^5 - 212.5136599x^6 + 86.82319787x^7 - 24.55189897x^8 + 375.0622834x^3 - 12.09089855 - 206.4107312x^2; \; Q10 = 0.000007854146151$$

і відповідне квадратичне відхилення $Q = 0.000007854146151$.

9. Система комп'ютерної алгебри Maple містить функціонал, що відповідає за можливість пошуку чисельного розв'язку диференціального рівняння, побудову графіку функції-розв'язку та ін. Застосувати зазначений функціонал можна в такий спосіб:

```
> with(plots) :
 RR := diff(yyy(x), x$2) + p(x)·diff(yyy(x), x) + q(x)·yyy(x) − f(x) :
> F := dsolve({RR, yyy(a) = A, yyy(b) = B}, numeric);
> odeplot(F, color = blue);
```

10. Одночасне зображення трьох розв'язків дозволяє оператор display. У даному випадку графіки набудуть вигляду, зображеному на рис. 2.3.

Для випадку $n=10$ графік наближеного розв'язку, отриманого за допомогою МНК і чисельного – засобами Maple візуально майже не відрізняються. Таким чином, як значення квадратичного відхилення, так і зображення графіків свідчить про збіжність послідовності наближених розв'язків, отриманих інтегральним МНК, до точного.

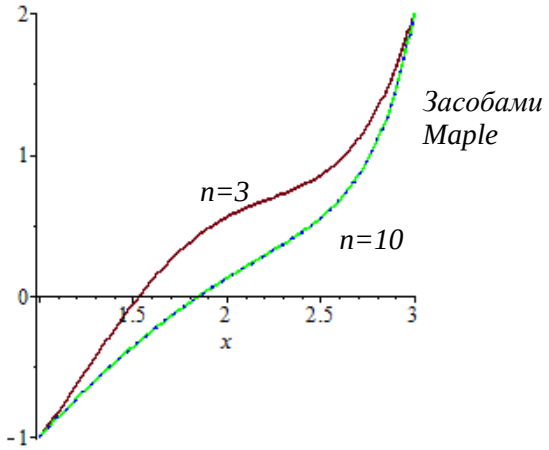

Рис. 2.3

§3 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №5

Розглянемо ту саму крайову задачу (3.15), що була розв'язаною наближено інтегральним МНК.

Усі кроки алгоритму реалізації задачі в Maple, виписаного вище, крім кроку 5, залишаються незмінними. Випишемо крок 5. Він передбачає розбиття відрізка $[a;b]$ на m рівних частин з відповідними змінами в формі квадратичного відхилення (див. (3.13) і (3.14)):

$$> m := 20 : \textbf{for } i \textbf{ from } 0 \textbf{ to } m \textbf{ do } X[i] := a + \frac{(b-a)}{m} \cdot i \textbf{ od}:$$

$$> Q := sum\left(subs\left(x = X[ii], R^2\right), ii = 1..m\right);$$

Кількість m точок розбиття повинна бути більшою за n. Тут обрано $m=20$. Випишемо результати точкового МНК:

- при $n=3$ наближений розв'язок $y(x)$ набув вигляду

$$2.929277713 - 13.76715972x + 15.03397215x^2 - 6.036106558x^3 + 0.8400164090x^4$$

  а квадратичне відхилення – $Q =$ 165.9420397;
- при $n=10$ функція $y(x)$ дорівнює

$$124.6246876x - 21.22772663 + 0.03240173001x^{11} + 6.165844082x^{9} - 0.6645918865x^{10} + 627.6870971x^{3} - 716.8670497x^{4} + 566.1508612x^{5} - 315.8681328x^{6} + 124.6024045x^{7} - 34.08763520x^{8} - 361.5481600x^{2}$$

а квадратичне відхилення – $Q = 0.0000439318700848579$.

Графічне зображення всіх отриманих результатів обома методами наведено на рис. 2.4.

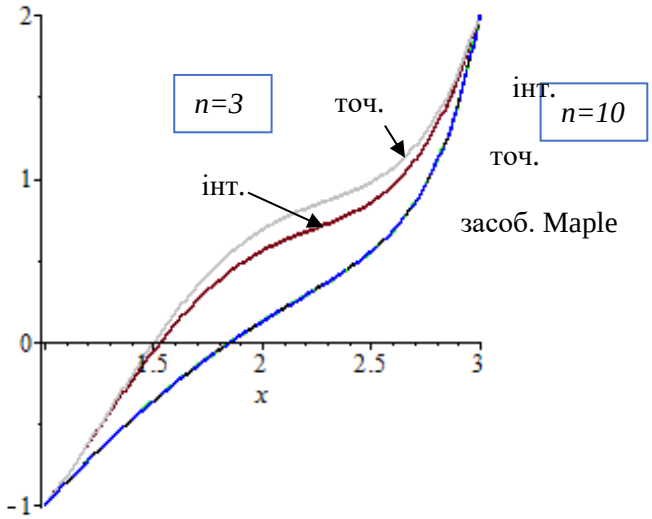

Рис. 2.4

Для даного диференціального рівняння значною є відстань між точками графіків наближених розв'язків, отриманих інтегральним, точковим МНК при $n = 3$, чисельного розв'язку, одержаного засобами Maple.

Хоча при $n = 10$ рівняння функцій, що виражають наближені розв'язки, суттєво різняться, однак квадратичні відхилення близькі до 0, а графіки візуально не відрізняються. Таким чином, послідовність наближених розв'язків, отриманих точковим МНК, збігається до точного.