3.3 Кососимметрические билинейные и эрмитовы полуторалинейные функции

Задача 56. *Привести кососимметрическую билинейную форму*

$$\varphi(x,y) = x^1y^2 - x^2y^1 + 2x^1y^3 - 2x^3y^1 + 2x^1y^4 - 2x^4y^1 + x^2y^3 - x^3y^2 + x^3y^4 - x^4y^3$$

к каноническому виду аффинной заменой координат; найти эту замену.

Решение.

Пусть V — линейное пространство с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$. Напомним, что двойственное пространство V^* есть пространство линейных функций на V. Двойственный базис $e^1, e^2, \dots, e^n$ пространства V^* состоит из функций e^i таких, что $e^i(x) = x^i$, где $x^1, \dots, x^n$ — координаты вектора x в базисе $e_1, \dots, e_n$. Для любых двух линейных функций $\xi, \eta \in V^*$ определено их *внешнее произведение* $\xi \wedge \eta$, являющееся кососимметрической билинейной функцией на V:

$$(\xi \wedge \eta)(x,y) = \xi(x)\eta(y) - \eta(x)\xi(y).$$

Очевидно, что $\eta \wedge \xi = -\xi \wedge \eta$ и $\xi \wedge \xi = 0$. Базис в пространстве всех кососимметрических билинейных функций на V состоит из функций $e^i \wedge e^j$, $i < j$. При этом

$$(e^i \wedge e^j)(x,y) = x^iy^j - x^jy^i.$$

В нашем случае

$$\varphi = e^1 \wedge e^2 + 2e^1 \wedge e^3 + 2e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4.$$

Приведение этой функции к каноническому виду осуществляется следующим образом. На первом шаге мы сгруппируем все слагаемые, содержащие e^1:

$$\varphi = e^1 \wedge (e^2 + 2e^3 + 2e^4) + e^2 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4.$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} \tilde{e}^1 = e^1; \\ \tilde{e}^2 = e^2 + 2e^3 + 2e^4; \\ \tilde{e}^3 = e^3; \\ \tilde{e}^4 = e^4; \end{cases} \iff \begin{cases} e^1 = \tilde{e}^1; \\ e^2 = \tilde{e}^2 - 2\tilde{e}^3 - 2\tilde{e}^4; \\ e^3 = \tilde{e}^3; \\ e^4 = \tilde{e}^4. \end{cases}$$

Переписывая φ в новой системе координат, получаем

$$\varphi = \tilde{e}^1 \wedge \tilde{e}^2 + (\tilde{e}^2 - 2\tilde{e}^3 - 2\tilde{e}^4) \wedge \tilde{e}^3 + \tilde{e}^3 \wedge \tilde{e}^4 = \tilde{e}^1 \wedge \tilde{e}^2 + \tilde{e}^2 \wedge \tilde{e}^3 + 3\,\tilde{e}^3 \wedge \tilde{e}^4.$$

Теперь сгруппируем вместе все слагаемые, содержащие $\tilde{e}^2$:

$$\varphi = (\tilde{e}^1 - \tilde{e}^3) \wedge \tilde{e}^2 + 3\,\tilde{e}^3 \wedge \tilde{e}^4$$

и сделаем замену координат

$$\begin{cases} \hat{e}^1 = \tilde{e}^1 - \tilde{e}^3; \\ \hat{e}^2 = \tilde{e}^2; \\ \hat{e}^3 = \tilde{e}^3; \\ \hat{e}^4 = \tilde{e}^4; \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{e}^1 = \hat{e}^1 + \hat{e}^3; \\ \tilde{e}^2 = \hat{e}^2; \\ \tilde{e}^3 = \hat{e}^3; \\ \tilde{e}^4 = \hat{e}^4. \end{cases}$$

Получим,

$$\varphi = \hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2 + 3\,\hat{e}^3 \wedge \hat{e}^4.$$

Таким образом, мы добились того, что выражение для φ содержит слагаемое $\hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2$, а остальные слагаемые не содержат ни $\hat{e}^1$, ни $\hat{e}^2$. В общем случае далее применяется тот же метод к оставшейся части выражения для φ. В нашем случае для получения канонического вида достаточно сделать простую замену

$$\hat{e}^1 = \hat{\hat{e}}^1; \quad \hat{e}^2 = \hat{\hat{e}}^2; \quad \hat{e}^3 = \hat{\hat{e}}^3; \quad \hat{e}^4 = \frac{1}{3}\,\hat{\hat{e}}^4.$$

Получим,

$$\varphi = \hat{\hat{e}}^1 \wedge \hat{\hat{e}}^2 + \hat{\hat{e}}^3 \wedge \hat{\hat{e}}^4,$$

значит,

$$\varphi(x, y) = \hat{\hat{x}}^1\hat{\hat{y}}^2 - \hat{\hat{x}}^2\hat{\hat{y}}^1 + \hat{\hat{x}}^3\hat{\hat{y}}^4 - \hat{\hat{x}}^4\hat{\hat{y}}^3.$$

Собирая вместе все сделанные замены координат, получим,

$$\begin{cases} e^1 = \hat{\hat{e}}^1 + \hat{\hat{e}}^3; \\ e^2 = \hat{\hat{e}}^2 - 2\hat{\hat{e}}^3 - \dfrac{2}{3}\,\hat{\hat{e}}^4; \\ e^3 = \hat{\hat{e}}^3; \\ e^4 = \dfrac{1}{3}\,\hat{\hat{e}}^4. \end{cases}$$

Вспомним теперь, что линейные функции e^i и $\hat{\hat{e}}^i$ сопоставляют каждому вектору x его координаты x^i и $\hat{\hat{x}}^i$ соответственно. Следовательно, искомая замена координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = \hat{\hat{x}}^1 + \hat{\hat{x}}^3; \\ x^2 = \hat{\hat{x}}^2 - 2\hat{\hat{x}}^3 - \dfrac{2}{3}\,\hat{\hat{x}}^4; \\ x^3 = \hat{\hat{x}}^3; \\ x^4 = \dfrac{1}{3}\,\hat{\hat{x}}^4. \qquad \square \end{cases}$$

Задача 57. *Привести к нормальному виду эрмитову полуторалинейную функцию*

$$\varphi(x,y) = \bar{x}^1 y^1 + i\bar{x}^1 y^2 - i\bar{x}^2 y^1 + 2\bar{x}^1 \bar{y}^3 + 2\bar{x}^3 y^1 - 2\bar{x}^2 y^2 + \bar{x}^3 y^3$$

(с нахождением замены координат).

Решение.

Метод приведения к нормальному виду эрмитовой полуторалинейной функции очень похож на метод Лагранжа. Мы выделяем все слагаемые, содержащие x^1 и y^1 и дополняем их до произведения вида $\overline{l(x)}l(y)$, где l — линейная функция:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \bar{x}^1 y^1 + \bar{x}^1(iy^2 + 2y^3) + \overline{(ix^2 + 2x^3)}y^1 - 2\bar{x}^2 y^2 + \bar{x}^3 y^3 = \\ &= \overline{(x^1 + ix^2 + 2x^3)}(y^1 + iy^2 + 2y^3) - \overline{(ix^2 + 2x^3)}(iy^2 + 2y^3) - 2\bar{x}^2 y^2 + \bar{x}^3 y^3 = \\ &= \overline{(x^1 + ix^2 + 2x^3)}(y^1 + iy^2 + 2y^3) - \bar{x}^2 y^2 + 2i\bar{x}^2 y^3 - 2i\bar{x}^3 y^2 + \bar{x}^3 y^3.\end{aligned}$$

Делаем замену

$$\begin{cases} x'^1 = x^1 + ix^2 + 2x^3; \\ x'^2 = x^2; \\ x'^3 = x^3; \end{cases} \iff \begin{cases} x^1 = x'^1 - ix'^2 - 2x'^3; \\ x^2 = x'^2; \\ x^3 = x'^3. \end{cases}$$

Обратите внимание, что конечно же *координаты вектора y преобразуются по тем же формулам, что и координаты вектора x*. Получаем:

$$\varphi(x,y) = \bar{x}'^1 y'^1 - \bar{x}'^2 y'^2 + 2i\bar{x}'^2 y'^3 - 2i\bar{x}'^3 y'^2 + \bar{x}'^3 y'^3.$$

Таким образом, мы выделили слагаемое $\bar{x}'^1 y'^1$ так, что остальные слагаемые не содержат ни x^1, ни y^1. Теперь повторяем ту же процедуру для оставшихся слагаемых:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \bar{x}'^1 y'^1 - \bar{x}'^2 y'^2 + \bar{x}'^2(2iy'^3) + \overline{(2ix'^3)}y'^2 + \bar{x}'^3 y'^3 = \\ &= \bar{x}'^1 y'^1 - \overline{(x'^2 - 2ix'^3)}(y'^2 - 2iy'^3) + \overline{(2ix'^3)}(2iy'^3) + \bar{x}'^3 y'^3 = \\ &= \bar{x}'^1 y'^1 - \overline{(x'^2 - 2ix'^3)}(y'^2 - 2iy'^3) + 5\bar{x}'^3 y'^3 = \bar{x}'^1 y'^1 - \overline{(x'^2 - 2ix'^3)}(y'^2 - 2iy'^3) + \overline{(\sqrt{5}x'^3)}(\sqrt{5}y'^3).\end{aligned}$$

После замены

$$\begin{cases} x''^1 = x'^1; \\ x''^2 = x'^2 - 2ix'^3; \\ x''^3 = \sqrt{5}x'^3; \end{cases} \iff \begin{cases} x'^1 = x''^1; \\ x'^2 = x''^2 + \dfrac{2i}{\sqrt{5}}x''^3; \\ x'^3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x''^3 \end{cases}$$

получаем нормальный вид эрмитовой полуторалинейной функции φ:

$$\varphi(x,y) = \bar{x}''^1 y''^1 - \bar{x}''^2 y''^2 + \bar{x}''^3 y''^3.$$

Чтобы получить замену координат, приводящую функцию φ к этому виду, выразим координаты x^1, x^2, x^3 через координаты x''^1, x''^2, x''^3:

$$\begin{cases} x^1 = x''^1 - ix''^2; \\ x^2 = x''^2 + \dfrac{2i}{\sqrt{5}}x''^3; \\ x^3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x''^3. \qquad \square \end{cases}$$