В. М. Руденко

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
для студентів вищих навчальних закладів

Київ
«Центр учбової літератури»
2012

УДК 519.22(075.8)
ББК 22.171я73
Р 83

Гриф надано
Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1/11-2918 від 08.04.2010 р.)

Рецензенти:
Бомба А. Я. – доктор фізико-математичних наук, професор;
Ямницький В. М. – доктор психологічних наук, професор.

Руденко В. М.
Р 83 Математична статистика. Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 304 с.

ISBN 978-611-01-0277-3

Розкриваються основи теорії ймовірностей та математичної статистики: предмет, методи, базові категорії, показники тенденцій і мінливості сукупностей, статистичне оцінювання, перевірка статистичних гіпотез з використанням параметричних і непараметричних критеріїв, кореляційний, регресійний, дисперсійний аналіз. Розглядаються технологічні прийоми і способи комп'ютерної реалізації статистичної обробки даних на базі табличного процесора MS Excel, організація діалогового інтерфейсу.

Пропонується матеріал для самостійної підготовки (лабораторно-практичні та тестові завдання). Приклади супроводжуються розрахунками, графічним ілюстративним матеріалом.

Посібник може бути корисним для аспірантів і магістрантів, учителів і психологів, студентів і викладачів вищих навчальних закладів.

УДК 519.22(075.8)
ББК 22.171я73

ISBN 978-611-01-0277-3

ЗМІСТ

ВСТУП

Психолог у своїй діяльності нерідко має справу з масивами емпіричної інформації і змушений будувати свої висновки в умовах невизначеності. Така ситуація зумовлена особливостями психологічних об'єктів. Як правило, вони є стохастичними за своєю природою, їхній поведінці притаманна деяка невизначеність, а станам – випадковість. Тому психологічні дослідження з залучення математики здебільшого виконуються з використанням методів *математичної статистики*. Ось чому «провести компетентне дослідження або прочитати і зрозуміти звіти про дослідження, не опанувавши імовірнісним і статистичним мисленням, неможливо» – пише професор Фред Керлінгер у своїй книзі «Основи дослідження поведінки» [1].

Математична статистика вивчає і одночасно відображає імовірнісну (випадкову) природу процесів і подій, що значною мірою є характерною рисою соціальної, політичної, педагогічної та інших сфер життя та діяльності.

Математична статистика і теорія ймовірностей зіграли значну роль у впровадженні математичних методів в психологію. Саме вони з моменту виникнення постійно прагнули поширити сферу свого застосування на проблеми імовірнісного аналізу особистісних рис, здібностей та поведінки. Прикладами є «Досвід моральної арифметики» Ж. Бюффона (кінець XVIII ст.), «Людина і розвиток її здібностей або досвід суспільної фізики» А. Кетле (середина XIX ст.) і чимало інших робіт.

Проте залучення математичної статистики стимулювалося не внутрішньою логікою розвитку наукових психологічних ідей, а суб'єктивним бажанням математиків застосувати імовірнісно-статистичні методи до широкого кола явищ гуманітарного характеру. І тільки з XX ст. починається цілеспрямована розробка й ефективне використання статистичних методів для аналізу емпіричних даних (при вимірюванні, оцінюванні, перевірці причинно-

[1] *Kerlinger F.N.* Foundations of Behavioral Research. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964, p. IX.

наслідкових гіпотез і т.д.). З'являються такі потужні багатомірні статистичні методи, як факторний аналіз, суттєвий внесок у розробку якого на початковій стадії зробив Чарльз Спірмен (1863-1945), дисперсійний аналіз, пов'язаний з ім'ям Рональда Фішера (1890-1962), та інші методи.

Вивчення математичної статистики у вищих навчальних закладах спрямоване на формування теоретичної й методологічної бази студентів для поглибленого опанування знаннями та уміннями щодо організації, проведення та інтерпретації результатів психологічних досліджень. Засвоєння курсу є важливим як в аспекті розуміння важливості основ математичної статистики в гуманітарних дослідженнях, так і в оволодінні методикою і технікою статистичних обчислень з використанням сучасних комп'ютерних технологій.

При формуванні змісту посібника і виборі наочних засобів доведення його до свідомості студентів було також враховано доволі скромний початковий рівень математичної підготовки гуманітаріїв, не завжди високу умотивованість до вивчення точних наук. Для досягнення прийнятних результатів у навчанні залучено доступний для розуміння, не перевантажений складними математичними викладками, посильний і цікавий студентам у фаховому плані матеріал без зайвих спрощень і вульгаризацій математичних положень.

Користуючись нагодою, автор висловлює глибоку вдячність ректорові Рівненського державного гуманітарного університету професору Руслану Михайловичу Постоловському за підтримку і сприяння у підготовці посібника до видання. Щира подяка професорам Андрію Ярославовичу Бомбі та Вадиму Марковичу Ямницькому за допомогу при апробації рукопису.

Особиста подяка завідувачеві кафедрою теоретичної та прикладної статистики Львівського національного університету імені Івана Франка професору Ярославу Івановичу Єлейко за поради і зауваження, що були корисними підчас доопрацювання рукопису.

1. ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Основні завдання та методи математичної статистики

Математична статистика – це сучасна галузь математичної науки, яка займається статистичним *описом* результатів експериментів і спостережень, а також *побудовою* математичних моделей, що містять поняття *ймовірності*. Теоретичною базою математичної статистики служить *теорія ймовірностей*.

В структурі математичної статистики традиційно виділяють два основні розділи: *описова статистика* і *статистичні висновки* (рис. 1.1).

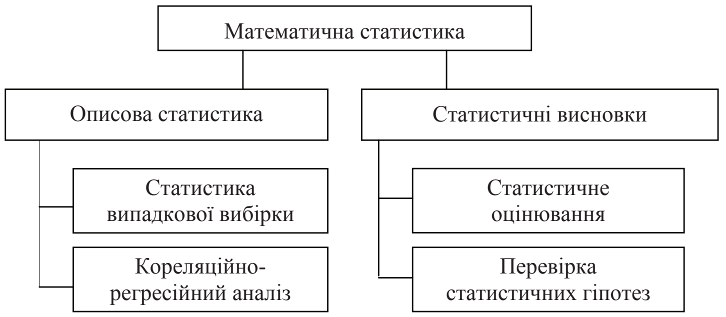


Рис. 1.1. Основні розділи математичної статистики

Описова статистика використовується для:

- узагальнення показників однієї змінної (статистика випадкової вибірки);
- виявлення взаємозв'язків між двома і більше змінними (кореляційно-регресійний аналіз).

Описова статистика дає можливість отримати нову інформацію, швидше зрозуміти і всебічно оцінити її, тобто виконує наукову *функцію опису* об'єктів дослідження, чим і виправдовує свою назву. Методи описової статистики покликані перетворити сукупність окремих емпіричних даних на систему наочних для сприйняття форм і чисел: розподіли частот; показники тенденцій, варіативності, зв'язку. Цими методами розраховуються статистики випадкової вибірки, які служать підставою для здійснення статистичних висновків.

Статистичні висновки надають можливість:

- оцінити точність, надійність і ефективність вибіркових статистик, виявити похибки, які виникають у процесі статистичних досліджень (статистичне оцінювання);
- узагальнити параметри генеральної сукупності, отримані на підставі вибіркових статистик (перевірка статистичних гіпотез).

Головна мета наукових досліджень – це отримання нового знання про великі класи явищ, осіб або подій, які прийнято називати *генеральною сукупністю*.

Генеральна сукупність – це повна сукупність об'єктів дослідження, *вибірка* – її частина, яка сформована певним науково обґрунтованим способом[2].

Термін «генеральна сукупність» використовується тоді, коли йдеться про велику, але кінцеву сукупність досліджуваних об’єктів. Наприклад, про сукупність абітурієнтів України у 2009 році або сукупність дітей дошкільного віку міста Рівне. Генеральні сукупності можуть сягати значних обсягів, бути скінченими і нескінченими. На практиці, як правило, мають справу зі скінченими сукупностями. І якщо відношення обсягу генеральної сукупності до обсягу вибірки складає більш, ніж 100, то, за словами Гласса і Стенлі методи оцінювання для скінчених і нескінчених сукупностей дають у сутності однакові результати [17, С. 218]. Генеральною сукупністю можна називати і *повну сукупність значень* якоїсь ознаки. Приналежність вибірки до генеральної сукупності є головною підставою для оцінки характеристик генеральної сукупності за характеристиками вибірки.

Основна *ідея* математичної статистики базується на переконанні про те, що повне вивчення всіх об'єктів генеральної сукупності в більшості наукових завдань або практично неможливе, або економічно недоцільне, оскільки вимагає багато часу і значних матеріальних витрат. Тому в математичній статистиці застосовується *вибірковий підхід*, принцип якого показано на схемі рис. 1.2.

---

[2] Наприклад, за технологією формування розрізняють вибірки рандомізовані (прості та систематичні), стратифіковані, кластерні (див. розділ 4).

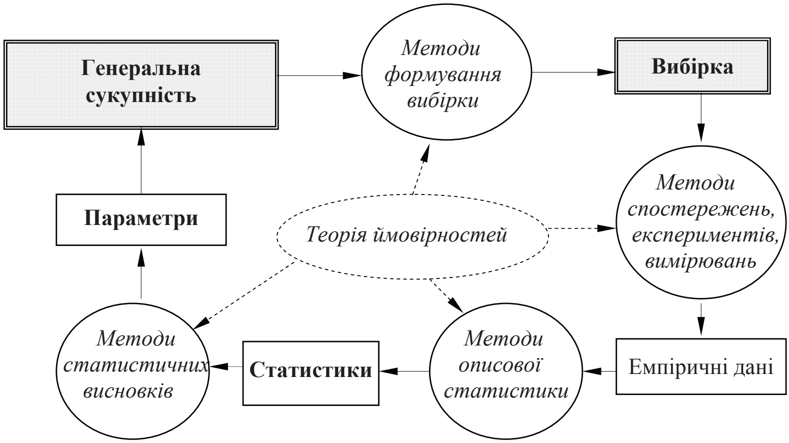


Рис. 1.2. Схема застосування методів математичної статистики

Згідно з *вибірковим підходом* використання математико-статистичних методів може проводитися у такій послідовності (див. рис. 1.2):

- із *генеральної сукупності*, властивості якої підлягають дослідженню, певними *методами формують вибірку* – типову але обмежену кількість об'єктів, до яких застосовують дослідницькі методи;
- в результаті методів спостережень, експериментальних дій і вимірювань над об'єктами *вибірки* отримують *емпіричні дані*;
- обробка емпіричних даних за допомогою *методів описової статистики* дає показники вибірки, які називаються *статистиками* – як і назва дисципліни, до речі;
- застосовуючи *методи статистичних висновків* до *статистик*, отримують *параметри*, які характеризують властивості *генеральної сукупності*.

Приклад 1.1. З метою оцінки стабільності рівня знань (змінна X) проведено тестування рандомізованої вибірки[3] студентів обсягом n. Тести містили по m завдань, кожне з яких оцінювалося за системою балів: «виконано»» – 1, «не виконано» – 0. Чи залишилися середні поточні досягнення студентів $\overline{X}$

[3] *Рандомізована вибірка* (від анг. random – випадковий) – це репрезентативна вибірка, яка сформована за стратегією випадкових випробувань.

на рівні минулих років μ?

Послідовність рішення:

- висунути *змістовну* гіпотезу типу: «*якщо* поточні результати тестування не відрізнятимуться від минулих, *то* можна вважати рівень знань студентів незмінним, а навчальний процес – стабільним»;
- сформулювати адекватну *статистичну* гіпотезу, наприклад, нуль-гіпотезу H_0 про те, що «поточний середній бал $\overline{X}$ статистично *не відрізняється* від середнього показника минулих років μ », тобто H_0: $\overline{X}=\mu$, проти відповідної альтернативної гіпотези H_1: $\overline{X}\neq\mu$;
- *побудувати* емпіричні *розподіли* досліджуваної змінної X;
- *розрахувати* вибіркові *статистики*, наприклад, середнє, дисперсію і т.д.;
- *визначити* (при необхідності) *кореляційні зв'язки*, наприклад, між змінною X та іншими показниками, побудувати *лінії регресії*;
- перевірити *відповідність* емпіричного розподілу *нормальному* законові;
- оцінити значення *точкових показників* та *довірчий інтервал* параметрів, наприклад, середнього;
- визначити *критерій для перевірки* статистичних *гіпотез*;
- виконати *перевірку* статистичних *гіпотез* на основі вибраних критеріїв;
- сформулювати *рішення* щодо статистичної нуль-гіпотези на певному *рівні значущості*;
- перейти від рішення про прийняття або відхилення статистичної нуль-гіпотези до інтерпретації висновків щодо *гіпотези змістовної*;
- сформулювати *змістовні висновки*.

Отже, якщо узагальнити перераховані вище процедури, застосування статистичних методів складається з трьох основних блоків:

– перехід від об’єкта реальності до абстрактної математико-статистичної схеми, тобто побудова імовірнісної моделі явища, процесу, властивості;

– проведення розрахункових дій власно математичними засобами в рамках імовірнісної моделі за результатами вимірювань, спостережень, експерименту і формулювання статистичних висновків;

– інтерпретація статистичних висновків щодо реальної ситуації й ухвалення відповідного рішення.

Статистичні методи обробки й інтерпретації даних спираються на теорію ймовірностей. Теорія ймовірностей є основою методів математичної статистики. Без використання фундаментальних понять і законів теорії ймовірностей неможливе узагальнення висновків математичної статистики, а значить і обґрунтованого їх використання для наукових і практичних цілей.

Так, завданням описової статистики є перетворення сукупності вибіркових даних на систему показників – *статистик* – розподілів частот, мір центральної тенденції і мінливості, коефіцієнтів зв'язку тощо. Проте, *статистики* є характеристиками, по суті, конкретної вибірки. Звичайно, можна розраховувати вибіркові розподіли, вибіркові середні, дисперсії і т. ін., але подібний «аналіз даних» має обмежену науково-пізнавальну цінність. «Механічне» перенесення будь-яких висновків, зроблених на основі таких показників, на інші сукупності не є коректним.

Для того, щоб мати можливість перенесення вибіркових показників або на інші, або на більш поширені сукупності, необхідно мати математично обґрунтовані *положення* щодо відповідності і спроможності вибіркових характеристик характеристиками цих поширених так званих генеральних сукупностей. Такі положення базуються на теоретичних підходах і схемах, пов'язаних з імовірнісними моделях реальності, наприклад, на аксіоматичному підході, на законі великих чисел і т.д. Тільки з їхньою допомогою можна переносити властивості, які встановлено за результатами аналізу обмеженої емпіричної інформації, або на інші, або на поширені сукупності. Отже, побудова, закони функціонування, використання імовірнісних моделей, що є предметом математичної галузі під назвою «теорія ймовірностей», стає суттю статистичних методів.

Таким чином, в математичній статистиці використовуються два паралельних рядка показників: перший рядок, що має відношення до практики (це вибіркові показники) і другий, що базується на теорії (це показники імовірнісної моделі). Наприклад, емпіричним частотам, що визначені на вибірці, відповідають поняття теоретичної ймовірності; вибірковому середньому (практика) відповідає математичне очікування (теорія) і т.д. Причому, в дослідженнях вибіркові характеристики, як правило, є первинними. Вони розраховуються на основі спостережень, вимірювань, дослідів, після чого проходять статистичне оцінювання спроможності та ефективності, перевірку статистичних гіпотез згідно з метою досліджень і врешті приймаються з певною ймовірністю як показники властивостей досліджуваних сукупностей.

Запитання. Завдання.

1. Охарактеризуйте основні розділи математичної статистики.
2. В чому полягає основна ідея математичної статистики?
3. Охарактеризуйте співвідношення генеральної і вибіркової сукупностей.
4. Поясніть схему застосування методів математичної статистики.
5. Укажіть перелік основних завдань математичної статистики.
6. З яких основних блоків складається застосування статистичних методів? Охарактеризуйте їх.
7. Розкрийте зв’язок математичної статистики з теорією ймовірностей.

2. СТАТИСТИЧНІ ПОКАЗНИКИ ВИБІРКИ

Статистичні показники, що розкривають властивості вибірки, можна представити такими основними групами:

– *емпіричними розподілами* (варіаційними, атрибутивними, ранжированими), що характеризують структуру досліджуваної властивості;

– *вибірковими показниками* (мірами центральної тенденції і мінливості), які представляють чисельні значення типових властивостей вибірки;

– *кореляційно-регресійними показниками* (коефіцієнтами кореляції, регресії), які дають можливість встановити приховані взаємозв'язки та закономірності явищ, спрогнозувати розвиток досліджуваних процесів.

2.1. ЕМПІРИЧНІ РОЗПОДІЛИ

Варіаційні ряди та статистичні розподіли

Емпіричні дані, які отримані шляхом вимірювань властивостей вибіркових об'єктів, повинні пройти первинну обробку і систематизацію: внесення у табличні форми (етап *табуляції*), упорядкування у *варіаційні* послідовності (ряди), представлення у вигляді *емпіричних розподілів*[4].

Приклад 2.1. Систематизувати результати виконання випадковою вибіркою студентів тестових завдань: 3, 4, 4, 4, 3, 2, 4, 4, 5, 1 (обсяг вибірки $n = 10$) .

Послідовність рішення:

- припустимо, що результати виконання тестових завдань адекватно характеризують досліджувану властивість[5] студентів, яку позначимо змінною X;
- за умовами прикладу змінна X приймає значення: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, …, $x_{10} = 1$;
- первинні емпіричні дані (x_j) внесено у перші два стовпчики табл. 2.1;
- упорядковані дані (x_j^*) представлено як *варіаційний ряд* у третьому сто-

[4] Емпіричні розподіли іноді мають і такі назви: «статистичні розподіли», «вибіркові ряди розподілу», «емпіричні розподіли частот», «розподіли емпіричних даних» та ін.

[5] Наприклад, успішність розв'язування логічних завдань, рішення проблемних ситуацій, уміння виконувати різноманітні вправи тощо.

впчику табл. 2.1;

• значення варіант (x_i) та їхня кількість (m_i) наведено в останніх двох стовпчиках табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Систематизація результатів виконання тестових завдань (*X*)

Первині дані		Варіаційний ряд	Варіанти X	Кількість варіант
j	x_j	x_j^*	x_i	m_i
1	3	1	1	1
2	4	2	2	1
3	4	3	3	2
4	4	3		
5	3	4	4	5
6	2	4		
7	4	4		
8	4	4		
9	5	4		
10	1	5	5	1

Як бачимо, **варіаційний ряд** – це упорядкована за збільшенням (або за зменшенням) послідовність значень досліджуваної змінної X (у табл. 2.1 значення x_j^*). Варіаційний ряд дає можливість наочно і швидко сприйняти структуру даних: варіанти значень (x_i), які може приймати і приймає змінна X, а також кількість відповідних варіант (m_i), їхні мінімальне і максимальне значення. Варіаційний ряд дозволяє безпосередньо оцінити деякі важливі показники вибірки, наприклад, моду і медіану. Систематизація даних у варіаційний ряд є підготовчим етапом до розрахунків і побудови статистичних розподілів досліджуваної змінної.

Статистичний розподіл – це математична модель об'єктів реальності у вигляді співвідношення *значень* змінної X, що характеризує властивості вибірки, до *частот* їх появи. Наприклад, стовпчики значень x_i (варіанти X) і значень m_i (кількість варіант) у табл. 2.1 по суті утворюють *статистичний розподіл*, який розкриває залежність частоти появи (f_i) від значень (x_i) змінної, тобто $f_i \sim x_i$. Отже, під поняттям «*статистичний розподіл*» $f(x)$ слід розуміти *емпіричний розподіли частот* появи певних значень досліджуваної змінної (слово «частота» нерідко опускають, маючи на увазі його присутність). Частота f_i – це функція, де аргументом виступає варіанта x_i.

Статистичні розподіли можна класифікувати за ознакою типів вимірювань[6] змінної на: *варіаційні*, *ранжировані* та *атрибутивні* (рис. 2.1).

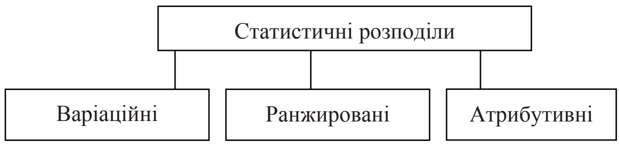


Рис. 2.1. Класифікація статистичних розподілів за типами вимірювань

Варіаційні розподіли базуються на даних, які виміряні за шкалою відношень або інтервалів. *Ранжировані* розподіли застосовуються у разі порядкових (рангових) типів вимірювання. *Атрибутивні* розподіли характеризують дані, які виміряні за номінальними шкалами або шкалами «найменувань».

Основні види статистичних розподілів такі: *диференціальні* та *інтегральні*, які можуть складатися з *абсолютних* і *відносних* частот (рис. 2.2).

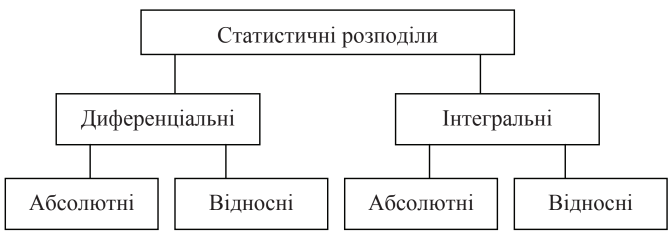


Рис. 2.2. Основні види статистичних розподілів

Диференціальні розподіли представляють значення частот *окремо* (тобто диференційовано) для кожної варіанти x_i змінної X.

Диференціальні абсолютні частоти – це кількості об'єктів m_i з однаковими значенням x_i змінної X (або кількість однакових значень).

Диференціальні відносні частоти – це відношення диференціальних абсо-

[6] Найчастіше використовується класифікація Стівенса 4-х типів вимірювань: за шкалами відношень, інтервалів, порядковими та номінальними [59].

лютних частот m_i до загальної кількості n об'єктів, тобто $f_i = m_i/n$.

Інтегральні розподіли («накопичені» або «кумулятивні») формуються як доданки попередніх диференціальних частот. Вони визначають *сумарні* частоти для варіанти, що не перевищує значення x_i змінної X.

Інтегральні абсолютні частоти $\sum_{i=1}^{j} m_i$ – це накопичена сума диференціальних абсолютних частот від 1-ї до j-ї варіанти.

Інтегральні відносні частоти $F_j = \sum_{i=1}^{j} f_i$ – це накопичена сума диференціальних відносних частот від 1-ї до j-ї варіанти.

Варіаційні розподіли у разі інтервальних або відносних типів вимірювань залежать від:

- характеру досліджуваної змінної – дискретна змінна, чи неперервна;
- діапазону значень змінної – вузький і невеликий, чи широкий і різноманітний.

Тому за технологією побудови варіаційні розподіли поділяють на розподіли *незгрупованих* і *згрупованих* варіант[7]. З метою лаконічності домовимося їх називати *незгрупованими* і *згрупованими* розподілами. Для *незгрупованих* розподілів частоти мають відношення до безпосередніх значень варіант з варіативного ряду; для *згрупованих* розподілів – до груп (або інтервалів) значень варіант.

Незгруповані розподіли

Незгруповані розподіли застосовують до емпіричних даних, властивості яких виміряні за інтервальними або відносними шкалами і приймають тільки певні, як правило, дискретні у вузькому діапазоні значення. Процедури розрахунку незгрупованих розподілів простіші за розрахунки розподілів згрупованих.

Приклад 2.2. Розрахувати *диференціальні* та *інтегральні* розподіли вико-

[7] Дж. Гласс і Дж. Стенлі називають їх розподілами «згрупованих» і «незгрупованих» частот [17]; Г.Ф. Лакін – розподілами «неінтервальних і інтервальних» варіант [43]; А.Т. Опря розділяє розподіли на «дискретні» та «інтервальні» ряди [48].

них студентами завдань за даними табл. 2.1 (обсяг вибірки n =10).

Послідовність рішення:

- характер емпіричних даних відповідає умовам для розрахунку незгрупованих розподілів, оскільки діапазон варіант x_i змінної X містить всього 6 дискретних значень варіант {0, 1, 2, 3, 4, 5};
- значення варіант коливаються від 0 виконаних завдань (мінімальне) до 5 виконаних завдань(максимальне), кількість варіант k=6;
- диференціальні абсолютні частоти m_i (див. табл. 2.2) такі:

– для x_1=0 частота m_1=0 (немає жодного об'єкта з цим значенням змінної);

– для x_2=1 частота m_2=1 (один об'єкт з цим значенням змінної);

– для x_3=2 частота m_3=1 (один об'єкт з цим значенням змінної);

– для x_4=3 частота m_4=2 (два об'єкта з цим значенням змінної) і т.д.

Сума всіх абсолютних частот повинна дорівнювати обсягу вибірки:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n \text{, тобто } \sum_{i=1}^{k} m_i = m_1 + m_2 + ... + m_k = 0 + 1 + 1 + 2 + 5 + 1 = 10 \,.$$

Таблиця 2.2

Розподіли кількості виконаних завдань

Кількість виконаних завдань		Частоти:			
		диференціальні		інтегральні	
		абсолютні	відносні	абсолютні	відносні
i	x_i	m_i	$f_i = m_i / n$	$m_j^* = \sum_{i=1}^{j} m_i$	$F_j = \sum_{i=1}^{j} f_i$
1	0	0	0,00	0	0,00
2	1	1	0,10	1	0,10
3	2	1	0,10	2	0,20
4	3	2	0,20	4	0,40
5	4	5	0,50	9	0,90
6	5	1	0,10	10	1,00
	Суми:	10	1,00		

- диференціальні відносні частоти $f_i = m_i / n$ (див. табл. 2.2) такі:

– для x_1=0 частота $m_1 = m_1 / n$ = 0/10 = 0,00 (або 0 %);

– для x_2=1 частота $m_2 = m_2 / n$ = 1/10 = 0,10 (або 10 %);

– для x_3=2 частота $m_3 = m_3/n = 1/10 = 0{,}10$ (або 10 %);

– для x_4=3 частота $m_4 = m_4/n = 2/10 = 0{,}20$ (або 20 %) і т.д.

Сума всіх відносних частот має дорівнювати одиниці (або 100 %):

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = \sum_{i=1}^{k} m_i / n = 0{,}00 + 0{,}10 + 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}50 + 0{,}10 = 1{,}00 .$$

- <u>інтегральні абсолютні</u> частоти $\sum_{i=1}^{j} m_i$ (див. табл. 2.2):

– для x_1=0 частота $\sum_{i=1}^{1} m_i = m_1 = 0$;

– для x_2=1 частота $\sum_{i=1}^{2} m_i = m_1 + m_2 = 0 + 1 = 1$;

– для x_3=2 частота $\sum_{i=1}^{3} m_i = m_1 + m_2 + m_3 = 0 + 1 + 1 = 2$;

– для x_4=3 частота $\sum_{i=1}^{4} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0 + 1 + 1 + 2 = 4$ і т.д.

Остання інтегральна абсолютна частота дорівнюватиме обсягу вибірки:

$$\sum_{i=1}^{6} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 = 0 + 1 + 1 + 2 + 5 + 1 = 10 .$$

- <u>інтегральні відносні</u> частоти $F_j = \sum_{i=1}^{j} f_i$ (див. табл. 2.2) такі:

– для x_1=0 частота $F_1 = \sum_{i=1}^{1} f_i = f_1 = 0$;

– для x_2=1 частота $F_2 = \sum_{i=1}^{2} f_i = f_1 + f_2 = 0 + 0{,}10 = 0{,}10$;

– для x_3=2 частота $F_3 = \sum_{i=1}^{3} f_i = f_1 + f_2 + f_3 = 0 + 0{,}10 + 0{,}10 = 0{,}20$;

– для x_4=3 частота $F_4 = \sum_{i=1}^{4} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0 + 0{,}10 + 0{,}10 + 0{,}20 = 0{,}40$ і т.д.

Остання інтегральна відносна частота дорівнюватиме одиниці (або 100 %), оскільки сума всіх диференціальних відносних частот складає 1,00 або 100%:

$$F_6 = \sum_{i=1}^{6} f_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_6 = 0 + 0{,}10 + \cdots + 0{,}10 = 1{,}00 = 100\%\ .$$

Для візуалізації результатів використовують графіки, наприклад, відносних диференціальних та інтегральних розподілів рис. 2.3.

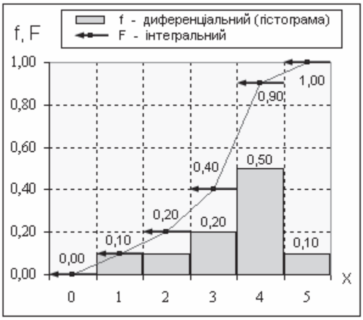


Рис. 2.3. Графіки відносних розподілів

Розподіли *відносних* частот (диференціальні та інтегральні) мають перевага перед розподілам *абсолютних* частот, оскільки їхні відносні значення приведені до 100 % і не залежать від обсягу конкретної вибірки.

Статистичні розподіли можуть бути представлені у вигляді *аналітичної емпіричної функції*. Так, для прикладу 2.2 функції диференціального та інтегрального розподілу показано на рис. 2.4 і 2.5.

$$f_i(X = x_i) = \begin{cases} 0{,}00 \ \ x_1 = 0; \\ 0{,}10 \ \ x_2 = 1; \\ 0{,}10 \ \ x_3 = 2; \\ 0{,}20 \ \ x_4 = 3; \\ 0{,}50 \ \ x_5 = 4; \\ 0{,}10 \ \ x_6 = 5; \end{cases}$$

Рис. 2.4. Функція диференціального розподілу

$$F_i(X \le x_i) = \begin{cases} 0{,}00 \ \ x_1 = 0; \\ 0{,}10 \ \ x_2 = 1; \\ 0{,}20 \ \ x_3 = 2; \\ 0{,}40 \ \ x_4 = 3; \\ 0{,}90 \ \ x_5 = 4; \\ 1{,}00 \ \ x_6 = 5; \end{cases}$$

Рис. 2.5. Функція інтегрального розподілу

Важливо усвідомити такі основні властивості функцій f_i і F_i:

– *диференціальна* функція $f_i(X = x_i)$ показує значення частоти f_i для змінної X, що <u>дорівнює</u> значенню x_i (тобто $X = x_i$);

– *інтегральна* функція $F_i(X \le x_i)$ показує значення частоти F_i для змінної X, що <u>не перевищує</u> значення x_i ($X \le x_i$ тобто X або менше, або дорівнює x_i);

– обидві емпіричні функції є дискретними і пов'язані між собою співвідношенням $F_j = \sum_{i=1}^{j} f_i$;

– $F_i(X \le x_i)$ прийнято називати *функцією розподілу*, а $f_i(X = x_i)$ – *функцією щільністю розподілу*.

Приклад 2.3. Розрахувати статистичні розподіли за вибірковими емпіричними даними таблиці рис. 2.4.

Послідовність рішення:

- у комірках В6 і В7 визначити мінімальне і максимальне значення варіанти x_i за допомогою функцій MS Excel =МИН(А2:Е5) і =МАКС(А2:Е5);
- характер даних відповідає умовам розрахунку незгрупованих розподілів, оскільки діапазон змінної містить всього 7 дискретних значень {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6};

	A	B	C	D	E
1	Емпіричні дані				
2	4	6	4	3	4
3	3	4	5	5	3
4	5	4	4	1	5
5	2	6	5	4	4
6	Мінімальне	1			
7	Максимальне	6			
8	Кількість	Частоти:			
9	виконаних	диференціальні		інтегральні	
10	завдань	абсолютні	відносні	абсолютні	відносні
11	x_i	m_i	f_i	m^*_j	F_j
12	0				
13	1				
14	2				
15	3				
16	4				
17	5				
18	6				
19	Суми:				

Рис. 2.4. Внесення функції =ЧАСТОТА()

- внести у комірки А12:А18 значення варіант x_i від 0 до 6 (рис. 2.4);
- виділити діапазон В12:В18, натиснути клавішу F2 і за допомогою «Майстра функцій» внести у ці комірки функцію MS Excel =ЧАСТОТА();

• задати аргументи функції =ЧАСТОТА() у діалоговому вікні (рис. 2.5);

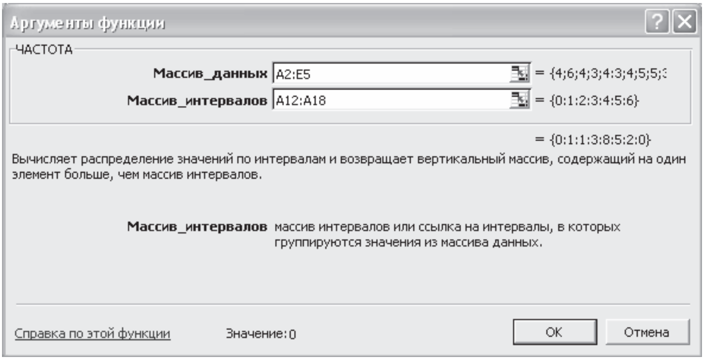


Рис. 2.5. Введення аргументів функції =ЧАСТОТА()

• натиснути разом клавіші CTRL+SHIFT+ENTER і отримати у комірках B12:B18 значення абсолютних диференціальних частот (рис. 2.6);

	A	B	C	D	E
1	Емпіричні дані				
2	4	6	4	3	4
3	3	4	5	5	3
4	5	4	4	1	5
5	2	6	5	4	4
6	Мінімальне	1			
7	Максимальне	6			
8	Кількість виконаних завдань	Частоти:			
9		диференціальні		інтегральні	
10		абсолютні	відносні	абсолютні	відносні
11	x_i	m_i	f_i	m^*_j	F_j
12	0	0			
13	1	1			
14	2	1			
15	3	3			
16	4	8			
17	5	5			
18	6	2			
19	Суми:				

Рис. 2.6. Результати розрахунків абсолютних частот m_i

• для розрахунку диференціальних відносних, інтегральних абсолютних і відносних частот внести у комірки C12:E19 відповідні формули (рис. 2.7);

	A	B	C	D	E
1	Емпіричні дані				
2	4	6	4	3	4
3	3	4	5	5	3
4	5	4	4	1	5
5	2	6	5	4	4
6	Мінімальне	=МИН(A2:E5)			
7	Максимальне	=МАКС(A2:E5)			
8	Кількість виконаних завдань	Частоти:			
9		диференціальні		інтегральні	
10		абсолютні	відносні	абсолютні	відносні
11	x_i	m_i	f_i	m^*_j	F_j
12	0	=ЧАСТОТА(A2:E5;A12:A18)	=B12/$B$19	=B12	=C12
13	1	=ЧАСТОТА(A2:E5;A12:A18)	=B13/$B$19	=D12+C13	=E12+C13
14	2	=ЧАСТОТА(A2:E5;A12:A18)	=B14/$B$19	=D13+C14	=E13+C14
15	3	=ЧАСТОТА(A2:E5;A12:A18)	=B15/$B$19	=D14+C15	=E14+C15
16	4	=ЧАСТОТА(A2:E5;A12:A18)	=B16/$B$19	=D15+C16	=E15+C16
17	5	=ЧАСТОТА(A2:E5;A12:A18)	=B17/$B$19	=D16+C17	=E16+C17
18	6	=ЧАСТОТА(A2:E5;A12:A18)	=B18/$B$19	=D17+C18	=E17+C18
19	Суми:	=СУММ(B12:B18)	=СУММ(C12:C18)		

Рис. 2.7. Формули для розрахунку незгрупованих частот

- отримати результати табличних розрахунків розподілу частот (рис. 2.8);

	A	B	C	D	E
1	Емпіричні дані				
2	4	6	4	3	4
3	3	4	5	5	3
4	5	4	4	1	5
5	2	6	5	4	4
6	Мінімальне	1			
7	Максимальне	6			
8	Кількість виконаних завдань	Частоти:			
9		диференціальні		інтегральні	
10		абсолютні	відносні	абсолютні	відносні
11	x_i	m_i	f_i	m^*_j	F_j
12	0	0	0,00	0	0
13	1	1	0,05	0,05	0,05
14	2	1	0,05	0,10	0,10
15	3	3	0,15	0,25	0,25
16	4	8	0,40	0,65	0,65
17	5	5	0,25	0,90	0,90
18	6	2	0,10	1,00	1,00
19	Суми:	20	1,00		

Рис. 2.8. Результати розрахунку розподілу

- побудувати графіки розподілу (рис. 2.9). Відзначимо, що інтегральний розподіл є дискретним і має форму «сходинок», хоча поширені комп'ютерні засоби, наприклад, MS Excel, «малюють» його ламаною лінією.

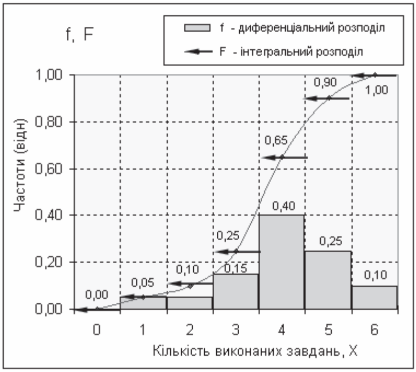


Рис. 2.9. Графіки диференціального та інтегрального розподілу частот

Властивості розподілів дозволяють зробити важливі висновки. Так, площа під графіком диференціального розподілу має сенс частоти. Так, відносні диференціальні частоти кількості виконаних завдань у діапазоні варіант x_i від 0 до 3 включно, що складають сумарне значення 0,25=0,05+0,05+0,15 (див. заштриховану частину гістограми на рис. 2.10), відповідають інтегральній частоті F_4=0,25. Це значить, що об'єкти з властивостями $x_i \leq 3$ складають 25% від загального обсягу вибірки.

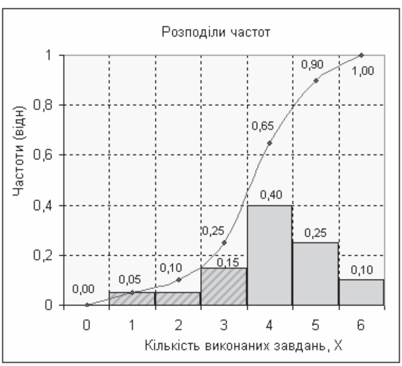


Рис. 2.10. Об'єкти з властивостями $x_i \leq 3$ складають 25 %

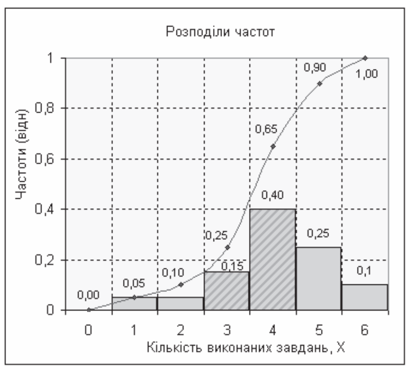


Рис. 2.11. Об'єкти з властивостями $3 \leq x_i \leq 4$ складають 55 %

Відносні диференціальні частоти у діапазоні варіант x_i від 3 до 4, що складають сумарне значення 0,55=0,15+0,40 (див. заштриховану частину гістограми на рис. 2.11), відповідають різниці інтегральних відносних частот F_5=0,65 і F_3=0,10, тобто 0,65 – 0,10 = 0,55. Це значить, що об’єкти з властивостями $3 \le x_i \le 4$ складають 55 % від загального обсягу вибірки.

Отже у результаті систематизації і обробки первинних вибіркових даних формується важливий показник вибірки – **емпіричні розподіли частот**: *диференціальні* та *інтегральні*, кожний з яких може бути або *абсолютним*, або *відносним*. Сума всіх абсолютних частот дорівнює обсягу вибірки, сума всіх відносних частот дорівнює 1 або 100%. *Інтегральні* (накопичені) розподіли формуються як доданки усіх попередніх диференціальних частот або *абсолютних*, або *відносних*. Вони дають значення сумарної частоти для варіанти, яка не перевищує значення x_i.

У психолого-педагогічних дослідженнях переважно розраховуються розподіли *відносних* частот, оскільки саме відносні частоти представляють собою (це буде доведено нижче) і визначаються як статистичні ймовірності.

Згруповані розподіли

Розподіли згрупованих частот використовуються у разі інтервальних або відносних типів вимірювань, якщо емпіричні дані приймають будь-які дійсні значення в певному інтервалі або кількість варіант близька до обсягу вибірки. У цій ситуації змінні мають бути представлені *інтервалами* (або *класами*) *значень* однакової довжини.

Приклад 2.4. Розрахувати розподіли коефіцієнта інтелекту *IQ* вибірки обсягом у 80 осіб за емпіричними даними у балах (див. таблицю рис. 2.12)

Послідовність рішення:

- характер емпіричних даних показує, що необхідно розрахувати розподіли згрупованих частот;
- знайти мінімальне і максимальне значення *IQ* у комірках C12 і G12 за допомогою функцій MS Excel =МИН(A2:H11) і =МАКС(A2:H11), отримати відповідно IQ_{min} =72 і IQ_{max} =137 (рис. 2.12);

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Результати тестування *IQ* (80 осіб)							
2	120	104	102	96	121	97	106	93
3	83	115	109	119	96	114	91	92
4	95	112	104	116	85	106	89	102
5	111	85	113	97	115	105	90	94
6	92	95	118	104	94	97	109	99
7	117	97	80	99	86	96	112	102
8	93	124	98	106	137	93	100	113
9	120	112	89	78	83	92	72	97
10	79	80	80	83	87	93	84	87
11	103	100	107	90	88	105	93	105
12	Мінімальне IQ_{min}		72		Максимальне IQ_{max}		137	
13	K =	8	λ =	8,125	Частоти:			
14	Діапазони значень *IQ*				диференціальні		інтегральні	
15					абсоютна	відносна	абсоютна	відносна
16	i	$IQ_{поч}$	$< IQ_i \leq$	$IQ_{кінц}$	m_i	f_i	m^*_j	F_j
17	1	70	$< IQ_1 \leq$	80				
18	2	80	$< IQ_2 \leq$	90				
19	3	90	$< IQ_3 \leq$	100				
20	4	100	$< IQ_4 \leq$	110				
21	5	110	$< IQ_5 \leq$	120				
22	6	120	$< IQ_6 \leq$	130				
23	7	130	$< IQ_7 \leq$	140				
24	Суми:				0	0		

Рис. 2.12. Внесення емпіричних даних і функції =ЧАСТОТА()

- розрахувати кількість класів k за формулою Стерджеса K=1+3,32·lg n , де n – обсяг вибірки. Для цього внести у комірку B13 вираз =ОКРВВЕРХ(1+3,32*LOG10(СЧЁТ(A2:H11));1) і отримати $K \approx 8$;
- розрахувати розмір класового інтервалу λ=(IQ_{max} – IQ_{min})/k у комірці D13 за допомогою виразу =(G12-C12)/B13. Хоча отримане значення λ = 8,125, але з практичної точки зору доцільно розмір класового інтервалу прийняти λ = 10;
- розрахувати у комірках A17:D23 значення початкової $IQ_{поч}$ і кінцевої $IQ_{кінц}$ границь діапазонів значень IQ кратними 10 балам і так, щоб мінімальне значення IQ_{min} = 72 входило у перший, а максимальне IQ_{max} = 137 – в останній інтервал (див. рис. 2.12);
- виділити діапазон E17:E23, натиснути клавішу F2 і за допомогою «Майстра функцій» внести у ці комірки функцію =ЧАСТОТА();
- задати аргументи функції =ЧАСТОТА(), як показано на рис. 2.13;

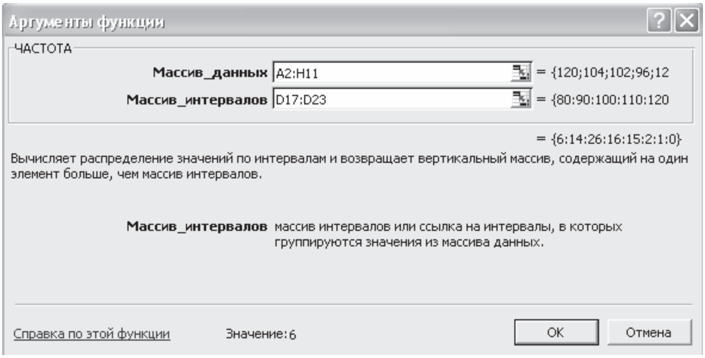


Рис. 2.13. Введення аргументів функції =ЧАСТОТА()

- натиснути разом клавіші CTRL+SHIFT+ENTER, отримати у комірках E17:E23 значення абсолютних диференціальних частот (рис. 2.14);

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Результати тестування *IQ* (80 осіб)							
2	120	104	102	96	121	97	106	93
3	83	115	109	119	96	114	91	92
4	95	112	104	116	85	106	89	102
5	111	85	113	97	115	105	90	94
6	92	95	118	104	94	97	109	99
7	117	97	80	99	86	96	112	102
8	93	124	98	106	137	93	100	113
9	120	112	89	78	83	92	72	97
10	79	80	80	83	87	93	84	87
11	103	100	107	90	88	105	93	105
12	Мінімальне IQ_{min}		72		Максимальне IQ_{max}		137	
13	K =	8	λ =	8,125	Частоти:			
14	Діапазони значень *IQ*				диференціальні		інтегральні	
15					абсоютна	відносна	абсоютна	відносна
16	i	$IQ_{поч}$	< IQ_i ≤	$IQ_{кінц}$	m_i	f_i	m^*_j	F_j
17	1	70	< IQ_1 ≤	80	6			
18	2	80	< IQ_2 ≤	90	14			
19	3	90	< IQ_3 ≤	100	26			
20	4	100	< IQ_4 ≤	110	16			
21	5	110	< IQ_5 ≤	120	15			
22	6	120	< IQ_6 ≤	130	2			
23	7	130	< IQ_7 ≤	140	1			
24	Суми:				80	0		

Рис. 2.14. Результати розрахунку абсолютних частот

- для розрахунку диференціальних відносних, інтегральних абсолютних і відносних частот внести у комірки F17:H23 відповідні формули (рис. 2.15);

	A	B	C	D	E	F	G	H
14	Діапазони значень *IQ*				диференціальні		інтегральні	
15					абсоютна	відносна	абсоютна	відносна
16	*i*	$IQ_{поч}$	$< IQ_i \le$	$IQ_{кінц}$	m_i	f_i	m^*_j	F_j
17	1	70	$< IQ_1 \le$	80	=ЧАСТОТА(A2:H11;D17:D23)	=E17/E$24	=E17	=F17
18	2	80	$< IQ_2 \le$	90	=ЧАСТОТА(A2:H11;D17:D23)	=E18/E$24	=E18+G17	=F18+H17
19	3	90	$< IQ_3 \le$	100	=ЧАСТОТА(A2:H11;D17:D23)	=E19/E$24	=E19+G18	=F19+H18
20	4	100	$< IQ_4 \le$	110	=ЧАСТОТА(A2:H11;D17:D23)	=E20/E$24	=E20+G19	=F20+H19
21	5	110	$< IQ_5 \le$	120	=ЧАСТОТА(A2:H11;D17:D23)	=E21/E$24	=E21+G20	=F21+H20
22	6	120	$< IQ_6 \le$	130	=ЧАСТОТА(A2:H11;D17:D23)	=E22/E$24	=E22+G21	=F22+H21
23	7	130	$< IQ_7 \le$	140	=ЧАСТОТА(A2:H11;D17:D23)	=E23/E$24	=E23+G22	=F23+H22
24	Суми:				=СУММ(E17:E23)	=СУММ(F17:F23)		

Рис. 2.15. Формули розрахунку згрупованих частот

- отримати результати розрахунку згрупованих частот *IQ* (рис. 2.16) і побудувати графіки розподілу (рис. 2.17).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Результати тестування *IQ* (80 осіб)							
2	120	104	102	96	121	97	106	93
3	83	115	109	119	96	114	91	92
4	95	112	104	116	85	106	89	102
5	111	85	113	97	115	105	90	94
6	92	95	118	104	94	97	109	99
7	117	97	80	99	86	96	112	102
8	93	124	98	106	137	93	100	113
9	120	112	89	78	83	92	72	97
10	79	80	80	83	87	93	84	87
11	103	100	107	90	88	105	93	105
12	Мінімальне IQ_{min}		72		Максимальне IQ_{max}		137	
13	*K* =	8	λ =	8,125	Частоти:			
14	Діапазони значень *IQ*				диференціальні		інтегральні	
15					абсоютна	відносна	абсоютна	відносна
16	*i*	$IQ_{поч}$	$< IQ_i \le$	$IQ_{кінц}$	m_i	f_i	m^*_j	F_j
17	1	70	$< IQ_1 \le$	80	6	0,0750	6	0,0750
18	2	80	$< IQ_2 \le$	90	14	0,1750	20	0,2500
19	3	90	$< IQ_3 \le$	100	26	0,3250	46	0,5750
20	4	100	$< IQ_4 \le$	110	16	0,2000	62	0,7750
21	5	110	$< IQ_5 \le$	120	15	0,1875	77	0,9625
22	6	120	$< IQ_6 \le$	130	2	0,0250	79	0,9875
23	7	130	$< IQ_7 \le$	140	1	0,0125	80	1,0000
24	Суми:				80	1		

Рис. 2.16. Результати розрахунку розподілу результатів тестування *IQ*

Графіки диференціального та інтегрального розподілу *IQ* за інтервалами значень показано на рис. 2.17.

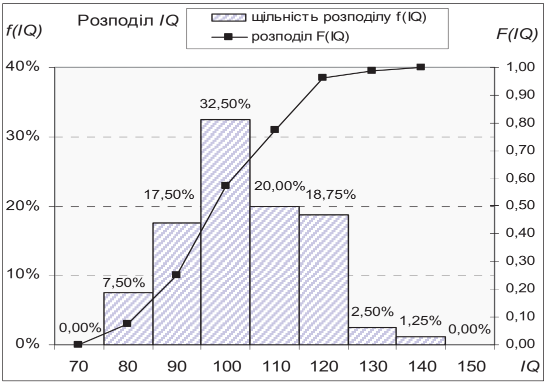


Рис. 2.17. Графіки розподілу *IQ*

Диференціальний відносний розподіл – щільність розподілу f(*IQ*) – зображений гістограмою. Він дає загальну картину розподілу як усіх категорій разом, так і кожної категорії окремо. Як бачимо з рис. 2.17, цей розподіл має форму, що нагадує теоретичний нормальний розподіл (проте, необхідно коректно довести їхню ідентичність). Максимум розподілу – 32,5% – припадає приблизно на середину графіка на значення *IQ* у 100 балів; 1,25% від загального обсягу вибірки складає категорія «обдарованих» з *IQ* до 140 балів і 7,5% – категорія «нижче середнього». Графік розподілу унімодальний і асиметричний, щільність концентрується навколо середніх значень.

Інтегральний відносний розподіл F(*IQ*) зображений точками. Він дає можливість отримати сумарні показники частот для різних діапазонів *IQ*. Наприклад, з графіка і таблиці рис. 2.16 видно, що особи з $IQ \leq 100$ (не вище 100 балів) становлять 57,5% від загального обсягу вибірки, а особи з $IQ > 120$ (вище 120 балів) складають лише 3,75% від обсягу вибірки (знаходимо або з таблиці, або з графіка: 100% – 96,25% = 3,75%).

Крім *варіаційних* (незгрупованих і згрупованих) розподілів у практиці досліджень розраховують *атрибутивні* і *ранжирувані розподіли*, які використовують для описової характеристики значення так званих «якісних» емпіричних даних, що виміряні за порядковими та номінальними шкалами.

Атрибутивні розподіли

Атрибутивні розподіли використовуються у разі *номінальних* (категоріальних) типів вимірювань властивостей досліджуваних об'єктів.

Приклад 2.5. Розрахувати розподіли осіб за результатами тестування властивостей вищої нервової діяльності (ВНД) 16 осіб (рис. 2.18). Побудувати відповідні графіки розподілу.

Послідовність рішення:

- вибіркові емпіричні дані внести у стовпчики A:D;
- згідно з типом ВНД кожній особі надати відповідний атрибут x_i, наприклад, «холерик» – 1; «сангвінік» – 2 і т.д. (стовпчики C:D і E:F);
- для розрахунку абсолютних частот m_i у комірку G3 внести вираз =СЧЁТЕСЛИ($D$3:$D$18;F3). Аналогічні вирази внести в комірки G4:G6;
- для розрахунку загальної кількості об'єктів n у комірку G7 внести вираз =СУММ(G3:G6);
- для розрахунку *відносних частот* m_i/n у комірку H3 внести вираз: =G3/$G$7, аналогічні вирази внести у комірки H4:H6. У комірку H7 внести вираз =СУММ(H3:H6).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	№ з/п	Імена студентів	Результати тестування ВНД		Типи ВНД		Частоти	
2	j		x_j		x_i		m_i	m_i/n
3	1	К.В.І.	Холерик	1	Холерик	1	3	18,75%
4	2	А.О.А.	Сангвінік	2	Сангвінік	2	7	43,75%
5	3	Д.В.Р.	Меланхолік	3	Меланхолік	3	5	31,25%
6	4	П.П.О.	Сангвінік	2	Флегматик	4	1	6,25%
7	5	В.О.А.	Сангвінік	2	Загалом:		16	100,00%
8	6	Г.В.А.	Меланхолік	3				
9	7	В.Н.С.	Флегматик	4				
10	8	Ш.З.І.	Холерик	1				
11	9	Б.Р.А.	Сангвінік	2				
12	10	С.Н.І.	Меланхолік	3				
13	11	К.Т.О.	Меланхолік	3				
14	12	Ч.О.М.	Сангвінік	2				
15	13	В.Н.О.	Сангвінік	2				
16	14	П.В.І.	Меланхолік	3				
17	15	Р.О.А.	Сангвінік	2				
18	16	В.Н.К.	Холерик	1				

Рис. 2.18. Розрахунки розподілу осіб за типами ВНД

Як бачимо з розподілу осіб за типами ВНД (рис. 2.18), у вибірці маємо 3 особи за типом «холерик» (18,75%), 7 – за типом «сангвінік» (43,75%), 5 – «меланхолік» (31,25%) і 1 – «флегматик» (6,25%).

Для ілюстрації атрибутивних розподілів використовують два найбільш розповсюджені типи графіків: гістограму (рис. 2.19) і кругову діаграму (рис. 2.20).

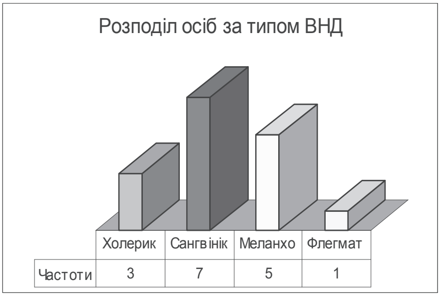


Рис. 2.19. Гістограма розподілу

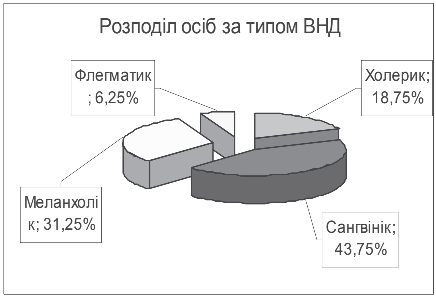


Рис. 2.20. Діаграма розподілу

Атрибутивні розподіли дають можливість оцінити властивості в абсолютних і відносних значеннях, наприклад, співвідношення різних типів ВНД, переважний тип ВНД – на графіках це «сангвінік», який складає 43,7% осіб вибірки (рис. 2.19 і 2.20).

Ранжировані розподіли

Ранжировані розподіли використовують у разі *порядкових* (рангових) типів вимірювань, наприклад, визначення рейтингу успішності якоїсь діяльності. Ранжування припускає домовленість про відповідність певного рангу певному значенню емпіричних даних.

Приклад 2.6. Виконати ранжування студентів за результатами тестування (див. стовпчики A:B таблиці рис. 2.21).

Послідовність рішення:

- у комірку C2 внести математичний вираз, який визначить ранг значення комірки B2 серед даних вибірки в діапазоні B$2:B$10:

=СЧЁТ(B$2:B$10) + 1–((СЧЁТ(B$2:B$10) + 1– РАНГ(B2;B$2:B$10; 1) – РАНГ(B2;B$2:B$10; 0))/2+РАНГ(B2;B$2:B$10;1));

	A	B	C
1	Студенти	Результати тестування (бали)	Ранги
2	Олена	6	8
3	Остап	11	4
4	Андрій	16	1
5	Антон	10	5
6	Марія	5	9
7	Петро	7	7
8	Тарас	14	2
9	Ольга	8	6
10	Сергій	12	3
11		Сума рангів:	45

Рис. 2.21. Ранги студентів за результатами тестування

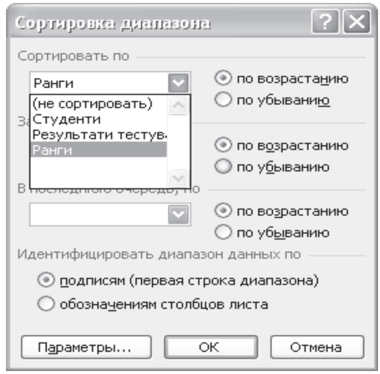


Рис. 2.22. Діалогове вікно «Сортування діапазону»

- скопіювати аналогічні вирази у комірки C3:C10;
- у комірку C11 внести вираз =СУММ(C2:C10), який дасть суму рангів;
- упорядкувати дані діапазону A2:C10 за рангом за допомогою команд головного меню MS Excel [Дані –> Сортування] і діалогового вікна (рис. 2.22);
- отримати упорядковані стовпчики таблиці за рангом (рис. 2.23);
- відобразити рейтинговий список студентів графічно (рис. 2.24).

	A	B	C
1	Студенти	Результати тестування (бали)	Ранги
2	Андрій	16	1
3	Тарас	14	2
4	Сергій	12	3
5	Остап	11	4
6	Антон	10	5
7	Ольга	8	6
8	Петро	7	7
9	Олена	6	8
10	Марія	5	9
11		Сума рангів:	45

Рис. 2.23. Упорядковані дані за рангом

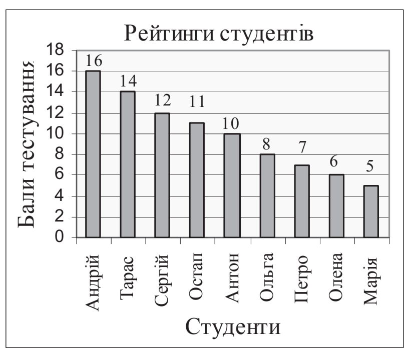


Рис. 2.24. Рейтинговий список студентів

Ранжировані розподіли дають можливість наочної візуалізації результатів досліджень певної властивості серед об'єктів дослідження у напрямах їх збільшення або зменшення.

Основними способами представлення емпіричних розподілів є *табличний*, *графічний* та *аналітичний*.

Табличний спосіб представлення розподілів продемонстровано, наприклад, на рис. 2.16. По-різному називають такі таблиці: *таблицею емпіричних частот* або *табличною формою* представлення *розподілу*. Табличний спосіб є основним розрахунковим методом і передумовою його графічної форми. Разом вони дають цілісне уявлення щодо властивостей вибірки.

Графічний спосіб представлення – це відображення розподілу графічними засобами, серед яких найпоширенішими є *гістограма*, *полігон* і *лінійний графік.* На рис. 2.25 – 2.27 показано диференціальний відносний розподіл незгрупованих частот у трьох варіантах. Комбіновані способи представлення, які об'єднують у межах однієї графічної форми різні типи розподілу (диференціальний та інтегральний), можна побачити на рис. 2.17.

Рис. 2.25.
Гістограма

Рис. 2.26.
Полігон

Рис. 2.27.
Лінійний графік

Аналітичний спосіб представлення передбачає використання *математичної емпіричної функції розподілу*, наприклад, щільності $f(x_i)$, або розподілу $F(x_i)$. Так, щільність розподілу з рис. 2.25 – можна представити за допомогою емпіричної функції:

$$f(x_i) = \begin{cases} 0.00, & x = 0; \\ 0.07, & x = 1; \\ 0.07, & x = 2; \\ 0.13, & x = 3; \\ 0.27, & x = 4; \\ 0.33, & x = 5; \\ 0.13, & x = 6. \end{cases}$$

Аналогічно можна представляти й розподіли інтегральних частот. Статистичні розподіли є первинною базою, навколо якої об'єднуються основні методи математичної статистики.

Запитання. Завдання.

1. Охарактеризуйте основні групи статистичних показників вибірки.
2. Що таке варіаційний ряд і статистичний розподіл?
3. Чим відрізняються між собою варіаційні, атрибутивні та ранжирувані розподіли?
4. Яка різниця між абсолютними і відносними розподілами частот?
5. Як розраховуються незгруповані і згруповані розподіли частот?
6. Чим відрізняються диференціальні та інтегральні розподіли частот?
7. Які типи графіків розподілу частот вважаються найпоширенішими?
8. Повторіть математичні процедури завдань за прикладами 2.1 – 2.6.
9. Виконайте лабораторні роботи № 1 і № 2.

2.2. ПОКАЗНИКИ ВИБІРКИ

Міри центральної тенденції (МЦТ)

Мірами центральної тенденції (МЦТ) називають чисельні показники типових властивостей емпіричних даних. Ці показники дають відповіді на питання про те, наприклад, «який середній рівень інтелекту студентів педагогічного університету?», «яке типове значення показника відповідальності певної групи осіб?». Існує порівняно невелика кількість таких показників-мір і в першу чергу: *мода*, *медіана*, *середнє арифметичне*. Кожна конкретна МЦТ має свої особливості, що роблять її цінною для характеристики об'єкта дослідження в певних умовах.

Мода *Mo* – це значення, яке найчастіше трапляється серед емпіричних даних. Так, для ряду значень 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5 мода дорівнює 3 (*Mo* = 3). Зверніть увагу на те, що мода є значення з найбільшою частотою (у прикладі це значення дорівнює 3), а не частота цього значення (у прикладі вона дорівнює 4).

При визначенні моди необхідно дотримуватися таких угод:

- мода може бути відсутня, наприклад, для даних 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5;
- якщо варіанти суміжні і мають однакову частоту, мода визначається як середнє значення сусідніх варіант. Наприклад, для ряду 2, 2, 3, <u>4, 4, 4, 5, 5, 5</u> мода *Mo* = (4+5)/2=4,5;
- якщо варіанти несуміжні, може існувати декілька мод. Так, для даних 2, 2, <u>3, 3, 3,</u> 4, <u>5, 5, 5</u> характерна *бімодальність*, тобто дві моди $Mo_1 = 3$ і $Mo_2 = 5$;
- емпіричні дані можуть мати великі та малі моди. Наприклад, дані 2, 2, <u>3, 3, 3, 4, 4, 4</u>, 5, <u>6, 6, 6, 6, 6, 6, 6</u>, 7, 7, 7, 8, <u>9, 9, 9, 9</u> мають одну велику моду $Mo_1 = 6$ та дві малі моди $Mo_2 = 3{,}5$ і $Mo_3 = 9$.

На графіках розподілу *мода* – це варіанта з *максимальною* частотою. На рис. 2.25 варіанта x_6=5 має найбільшу частоту (0,33), тому і є модою *Mo* = 5.

Медіана *Md* – це значення, яке приходиться на середину упорядкованої послідовності емпіричних даних. Для *непарної* кількості даних медіана визначається середнім елементом $Md = x_{(n+1)/2}$. Наприклад, для 11 значень 4, 4, 4, 5, 5, <u>5,</u> 5, 5, 6, 6, 7 медіана дорівнює 4 (*Md* = 5), тобто:

$$Md = x_{(n+1)/2} = x_{(11+1)/2} = x_6 = 5 .$$

Якщо кількість значень даних є *парною*, то медіаною є середнє значення центральних сусідніх елементів: $Md = \dfrac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2}$. Наприклад, для 12 значень 3, 3, 3, 4, 4, <u>5</u>, <u>6</u>, 6, 6, 6, 7, 7 медіана *Md* = (5+6)/2 = 5,5:

$$Md = \frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2} = \frac{x_{12/2} + x_{12/2+1}}{2} = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5 .$$

Середнє арифметичне $\overline{X}$ (*вибіркове середнє* або *середнє*) сукупності *n* значень дорівнює:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} . \qquad (2.1)$$

Використовують інші формули, наприклад, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ скорочено $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum x_i$.

Так, для вибірки (2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8) *середнє* $\overline{X}$ дорівнюватиме:

$$\overline{X} = (2+2+3+3+4+5+6+7+7+8)/10 = 47/10 = 4{,}7 .$$

Якщо дані представлено розподілами частот, середнє визначається як:

$$\overline{X} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} , \qquad (2.2)$$

де x_i – варіанти незгрупованих частот або центральні значення класових інтервалів у разі згрупованих частот; f_i – диференціальні частоти.

Особливості мір центральної тенденції:

- *мода* вибірки обчислюється просто, її можна визначити «на око». Для дуже великих груп даних мода є досить стабільною мірою центру розподілу;
- *медіана* займає проміжне положення між модою і середнім з погляду її підрахунку. Ця міра особливо легко визначається у разі ранжированих даних;
- *середнє* арифметичне передбачає використовування всіх значень вибірки, причому всі вони впливають на значення цієї міри.

Розглянемо, що може відбутися з модою, медіаною і середнім, коли зміниться удвічі лише одне значення, наприклад, 10-го об'єкта вибірки (рис. 2.28).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Емпіричні дані											МЦТ		
2	*i*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*Mo*	*Md*	$\bar{X}$
3	Вибірка 1	1	2	3	3	4	5	6	7	8	**9**	3	4,5	**4,8**
4	Вибірка 2	1	2	3	3	4	5	6	7	8	**18**	3	4,5	**5,7**

Рис. 2.28. Властивості МЦТ

Як бачимо, мода і медіана залишилися незмінними, у той час як середнє змінилося значною мірою (з 4,8 до 5,7). На величину середнього особливо суттєво впливають значення, що перебувають далеко від центру групи даних.

З точки зору помилок, що виникають через те, коли для характеристики цілої сукупності вибирається лише одна єдина статистична міра (*мода*, *медіана* чи *середнє*), кожна міра центральної тенденції має свою інтерпретацію

Мода є найбільш представницьким значенням або значенням, яке *найкраще* «замінює всі значення», якщо ми змушені вибрати одне.

Медіана – це таке значення, для якого сума абсолютних різниць усіх значень *менша* за суму різниць для будь-якого іншого значення. Наприклад, для сукупності {1, 3, 6, 8, 9} медіана *Md* = 6. Абсолютні різниці становлять: |1–6|=5, |3–6|=3, |6–6|=0, |8–6|=2, |9–6|=3. Сума всіх цих різниць 5+3+0+2+3=13 менша за суму різниць щодо будь-якого іншого значення. Наприклад, для 1 абсолютні різниці |1–1|=0, |3–1|=2, |6–1|=5, |8–1|=7, |9–1|=8, а їхня сума 0+2+5+7+8=22. Інші розрахунки дадуть подібні результати.

Якщо вибрати медіану, то досягається мінімальне відхилення – за умови, що «відхилення» визначається як *сума абсолютної відмінності* кожного значення від медіанної оцінки. Якщо ж замість кожного значення береться *середнє*, забезпечується мінімальне відхилення – за умови, що «відхилення» визначається як *сума квадратів різниць* кожного значення з середнім.

Використання мір центральної тенденції у якості характеристик випадкової вибірки є умовою необхідною, але недостатньою. Показники описової статистики, крім МЦТ, включають ще одну групу показників – *міри мінливості* (ММ).

Міри мінливості (ММ)

Обмеженість мір центральної тенденції для характеристики сукупностей можна продемонструвати на прикладі двох вибірок (рис. 2.29), які мають *різні розподіли*, проте *однакові* (і це не складно перевірити) МЦТ (значення моди *Mo*, медіани *Md* і середнього $\overline{X}$ дорівнюють 4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Емпіричні дані												МЦТ			ММ	
2	*i*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*Mo*	*Md*	$\overline{X}$	s_x^2	s_x
3	Вибірка 1	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	**4**	**4**	**4**	**0,6**	**0,77**
4	Вибірка 2	2	2	3	4	4	4	4	5	5	5	6	**4**	**4**	**4**	**1,6**	**1,26**

Рис. 2.29. Властивості ММ

Проте вибірки мають істотну різницю значень основних ММ: дисперсій s^2_x і стандартних відхилень s_x (див. два останні стовпчики рис. 2.29). Можна відзначити своєрідну «чутливість» показників ММ щодо властивостей сукупності.

Дисперсія вибірки обсягом *n* визначається як:

$$s_x^2 = \frac{(x_1 - \overline{X})^2 + (x_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (x_n - \overline{X})^2}{n-1}, \qquad (2.3)$$

або $s_x^2 = \dfrac{\sum (x_i - \overline{X})^2}{n-1}$, де $\overline{X}$ **–** середнє арифметичне вибірки.

Дисперсія вибірки s^2_x, що розрахована за цією формулою, є незміщеною оцінкою свого генерального параметра σ^2_x завдяки внесенню поправки Бесселя $n/(n–1)$, тобто:

$$s_x^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{X})^2}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{\sum (x_i - \overline{X})^2}{n-1}. \qquad (2.4)$$

Різницю $n–1$ називають *числом степенів вільності k* – кількість об’єктів або значень у складі обмеженої статистичної сукупності, які можуть вільно варіювати. Якщо обмежень вільності варіації існує декілька (v), то число степенів вільності дорівнюватиме $k= n–v$ (де v – грецька літера «ню»).

Чисельник формули дисперсії можна перетворити у такий спосіб:

$$\sum(x_i-\overline{X})^2=(x_1-\overline{X})^2+(x_2-\overline{X})^2+\ldots+(x_n-\overline{X})^2=$$
$$=x_1^2-2x_1\overline{X}+\overline{X}^2+x_2^2-2x_2\overline{X}+\overline{X}^2+\ldots+x_n^2-2x_n\overline{X}+\overline{X}^2=$$
$$=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2-2x_1\overline{X}-2x_2\overline{X}-\ldots-2x_n\overline{X}+\overline{X}^2+\overline{X}^2+\overline{X}^2=$$
$$=\sum x_i^2-2\overline{X}\sum x_i+n\overline{X}^2=\sum x_i^2-n\overline{X}^2.$$

Тоді формула дисперсії має такий вигляд:

$$s_x^2=\frac{1}{n-1}(\sum x_i^2-n\overline{X}^2)\,. \qquad (2.5)$$

Якщо дані представлено розподілами частот, дисперсія визначається як

$$s_x^2=\frac{1}{n-1}\cdot\sum f_i(x_i-\overline{X})^2\,, \qquad (2.6)$$

де x_i – варіанти незгрупованих частот або центральні значення класових інтервалів у разі згрупованих частот; f_i – диференціальні частоти, $\overline{X}$ – середнє.

Дисперсія служить мірою однорідності сукупностей емпіричних даних. Чим вища однорідність, тим нижче значення дисперсії. Для повністю однорідних сукупностей дисперсія дорівнює нулю.

Дисперсія генеральної сукупності обсягом N визначається як:

$$\sigma_x^2=\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\ldots+(x_N-\mu)^2}{N}\,, \qquad (2.7)$$

або $\sigma_x^2=\dfrac{\sum(x_i-\mu)^2}{N}$, де $\mu=\dfrac{1}{N}\sum x_i$ – середнє арифметичне генеральної сукупності.

Стандартне відхилення вибірки визначається як $s_x=\sqrt{s_x^2}$. (2.8)

Стандартне відхилення генеральної сукупності $\sigma_x=\sqrt{\sigma_x^2}$. (2.9)

Коефіцієнт варіації V_x використовується у разі порівняльної оцінки різноякісних середніх величин і визначається (у тому числі у %) як відношення стандартного відхилення до середнього арифметичного:

$$V_x=s_x/\overline{X}\cdot 100\%\,. \qquad (2.10)$$

Асиметрія A_x характеризує ступінь несиметричності розподілу відносно його середнього. Позитивна асиметрія вказує на відхилення вершини розподілу в бік від'ємних значень, негативна – у бік додатних.

$$A_x = \frac{1}{n \cdot (s_x)^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^3 . \qquad (2.11)$$

Ексцес E_x характеризує відносну опуклість або згладженість розподілу вибірки порівняно з нормальним розподілом. Позитивний ексцес позначає відносно загострений розподіл, негативний – відносно згладжений.

$$E_x = \frac{1}{n \cdot (s_x)^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^4 - 3. \qquad (2.12)$$

«Стандартом» розподілів служить нормальний розподіл $N(\mu,\sigma)$ з нульовою асиметрією і ексцесом. Для нього $A_x = 0$ – нормальний розподіл є симетричним відносно середнього значення, і $E_x = 0$ – розподіл є «ідеальний» – не загострений і не згладжений.

*Зауваження***.** Для визначення вибіркових значень асиметрії A_x та ексцесу E_x застосовують точні розрахункові формули, аналогічні тим, що використовує MS Excel:

Для асиметрії

$$A_x = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \cdot \frac{1}{(s_x)^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^3 \quad \text{або} \qquad (2.12\text{а})$$

$$A_x = K_1 \cdot \frac{1}{n(s_x)^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^3 , \text{ де } K_1 = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} .$$

Для ексцесу

$$E_x = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \cdot \frac{1}{(s_x)^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \qquad (2.12\text{б})$$

або

$$E_x = K_2 \cdot \frac{1}{n(s_x)^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^4 - 3 \cdot K_3 ,$$

$$\text{де } K_2 = \frac{n^2(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \text{ і } K_3 = \frac{(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} .$$

На рис. 2.30 показано, що коефіцієнти K_1, K_2 і K_3 при збільшені обсягу вибірки n асимптотично наближаються до одиниці (приблизно для n>30), а формули (2.12а) і (2.12б) переходять у формули (2.11) і (2.12) відповідно.

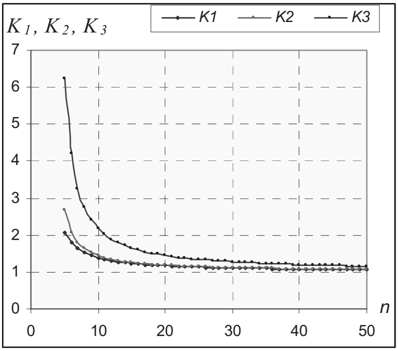


Рис. 2.30. залежність коефіцієнтів K_1, K_2 і K_3
від обсягу вибірки *n*

Пропонуємо самостійно визначити, наскільки можуть різнитися результати точних і «спрощених» розрахунків ММ залежно від обсягу вибірки *n*.

На якісному рівні можна наочно оцінити показники описової статистики завдяки вибірковим розподілам частот. Наприклад, форма розподілів на рис. 2.31 свідчить про однакові показники МЦТ (середні, моди і медіани вибірок однакові) і різні показники ММ (дисперсії і стандартні відхилення різні).

На рис. 2.32 показано розподіли двох однакових за однорідністю вибірок (дисперсії однакові), проте різних за середніми показниками. Ці вибірки мають також нульові значення асиметрії і ексцесу.

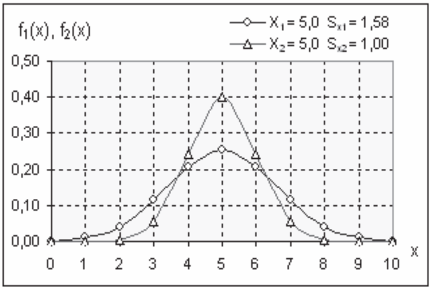


Рис. 2.31. Середні показники однакові,
дисперсії різні

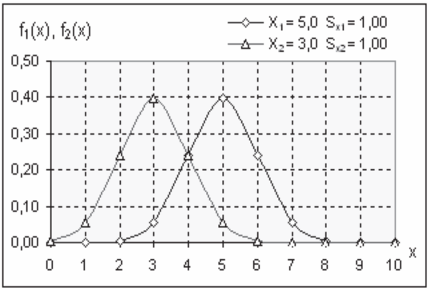


Рис. 2.32. Середні показники різні,
дисперсії однакові

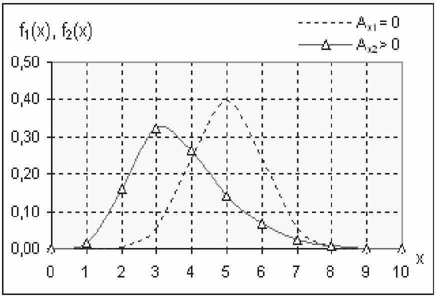


Рис. 2.33. Асиметрія додатна

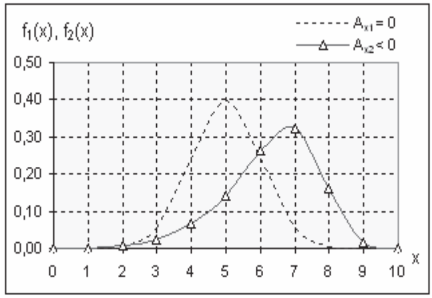


Рис. 2.34. Асиметрія від'ємна

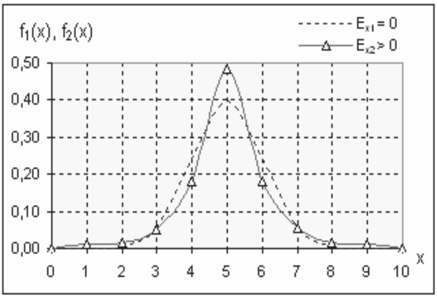


Рис. 2.35. Ексцес додатний

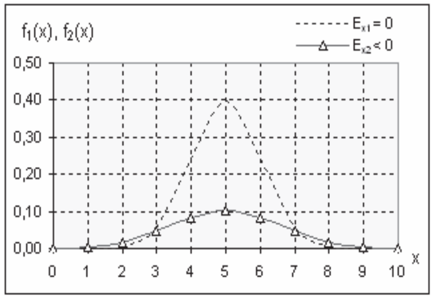


Рис. 2.36. Ексцес від'ємний

На рис. 2.33 – 2.36 продемонстровано, як форма розподілу частот може бути «деформована» відносно форми нормального (стандартного) розподілу. Саме показники асиметрії та ексцесу використовуються для перевірки відповідності емпіричного розподілу нормальному законові (див. розділ 5.2)

Розрахунки та інтерпретація МЦТ і ММ

Розрахунки показників МЦТ і ММ можна здійснити в MS Excel трьома способами з використанням:

- математичних операцій за відповідних формул МЦТ і ММ;
- вбудованих статистичних функцій MS Excel;
- спеціального розділу «Описова статистика» пакету «Аналіз даних».

Спосіб 1. Результати розрахунку МЦТ і ММ представлено на рис. 2.37, відповідні математичні вирази, формули і функції MS Excel – на рис. 2.38 .

	A	B	C	D	E	F
1	Емпіричні дані		Додаткові розрахунки			
2	i	x_i	$(x_i - \bar{X})$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(x_i - \bar{X})^3$	$(x_i - \bar{X})^4$
3	1	1	-1,33	1,78	-2,37	3,16
4	2	1	-1,33	1,78	-2,37	3,16
5	3	1	-1,33	1,78	-2,37	3,16
6	4	2	-0,33	0,11	-0,04	0,01
7	5	2	-0,33	0,11	-0,04	0,01
8	6	2	-0,33	0,11	-0,04	0,01
9	7	2	-0,33	0,11	-0,04	0,01
10	8	2	-0,33	0,11	-0,04	0,01
11	9	3	0,67	0,44	0,30	0,20
12	10	3	0,67	0,44	0,30	0,20
13	11	4	1,67	2,78	4,63	7,72
14	12	5	2,67	7,11	18,96	50,57
15	Суми:	28	0,00	16,67	16,89	68,22
16	МЦТ					
17	Обсяг вибірки	12				
18	Середнє	2,33				
19	Мода	2				
20	Медіана	2				
21	ММ					
22	Дисперсія	1,52				
23	Ст. відхилення	1,23				
24	Асиметрія	0,99				
25	Ексцес	0,65				

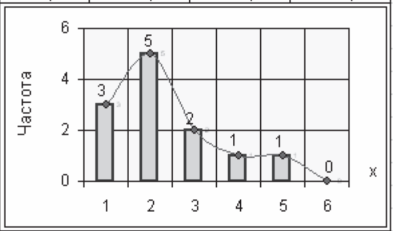


Рис. 2.37. Результати розрахунку МЦТ і ММ

	A	B	C	D	E	F
1	Емпіричні дані		Додаткові розрахунки			
2	i	x_i	$(x_i - \bar{X})$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(x_i - \bar{X})^3$	$(x_i - \bar{X})^4$
3	1	1	=B3-$B$18	=C3^2	=C3^3	=C3^4
4	2	1	=B4-$B$18	=C4^2	=C4^3	=C4^4
5	3	1	=B5-$B$18	=C5^2	=C5^3	=C5^4
6	4	2	=B6-$B$18	=C6^2	=C6^3	=C6^4
7	5	2	=B7-$B$18	=C7^2	=C7^3	=C7^4
8	6	2	=B8-$B$18	=C8^2	=C8^3	=C8^4
9	7	2	=B9-$B$18	=C9^2	=C9^3	=C9^4
10	8	2	=B10-$B$18	=C10^2	=C10^3	=C10^4
11	9	3	=B11-$B$18	=C11^2	=C11^3	=C11^4
12	10	3	=B12-$B$18	=C12^2	=C12^3	=C12^4
13	11	4	=B13-$B$18	=C13^2	=C13^3	=C13^4
14	12	5	=B14-$B$18	=C14^2	=C14^3	=C14^4
15	Суми:	=СУММ(B3:B14)	=СУММ(C3:C14)	=СУММ(D3:D14)	=СУММ(E3:E14)	=СУММ(F3:F14)
16	МЦТ					
17	Обсяг вибірки	=СЧЁТ(B3:B14)				
18	Середнє	=B15/B17				
19	Мода	=МОДА(B3:B14)				
20	Медіана	=МЕДИАНА(B3:B14)				
21	ММ					
22	Дисперсія	=D15/(B17-1)				
23	Ст. відхилення	=КОРЕНЬ(B22)				
24	Асиметрія	=B17/(B17-1)/(B17-2)/B23^3*E15				
25	Ексцес	=B17*(B17+1)/(B17-1)/(B17-2)/(B17-3)/B23^4*F15-3*(B17-1)^2/(B17-2)/(B17-3)				

Рис. 2.38. Математичні вирази для розрахунку МЦТ і ММ

Мода вибірки Mo=2 (значення 2 трапляється у вибірці 5 разів).

Медіана дорівнює

$$Md = \frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2} = \frac{x_{12/2} + x_{12/2+1}}{2} = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Середнє арифметичне вибірки $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{12} \cdot 28 = 2{,}33$.

Дисперсія вибірки $s_x^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{16{,}67}{12-1} = \frac{16{,}67}{11} \approx 1{,}52$.

Стандартне відхилення вибірки $s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{1{,}52} \approx 1{,}23$.

Асиметрія вибірки

$$A_x = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \cdot \frac{1}{(s_x)^3} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^3 = \frac{12}{(12-1)(12-2)} \cdot \frac{1}{(1{,}23)^3} \cdot 16{,}87 = 0{,}99.$$

Ексцес $E_x = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \cdot \frac{1}{(s_x)^4} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} =$

$$= \frac{15(15+1)}{(15-1)(15-2)(15-3)} \cdot \frac{1}{(1{,}41)^4} \cdot 147{,}51 - \frac{3(15-1)^2}{(15-2)(15-3)} \approx 0{,}36.$$

Спосіб 2. Результати розрахунків показників описової статистики для чотирьох вибірок представлено на рис. 2.39, графіки розподілу – на рис. 2.40-2.43. Для розрахунків були використані такі статистичних функцій MS Excel:

Обсяг вибірки	=СЧЁТ()	Дисперсія	=ДИСП()
Середнє	=СРЗНАЧ()	Ст. відхилення	=СТАНДОТКЛОН()
Мода	=МОДА()	Асиметрія	=СКОС()
Медіана	=МЕДИАНА()	Ексцес	=ЭКСЦЕСС()

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	i	X_1	X_2	X_3	X_4	Розподіли				
2						x_i	m_1	m_2	m_3	m_4
3	1	4	1	1	1	0	0	0	0	0
4	2	2	2	2	2	1	1	2	1	1
5	3	4	3	2	3	2	3	3	4	2
6	4	5	6	3	3	3	5	5	11	4
7	5	3	3	3	4	4	12	6	7	6
8	6	7	4	3	4	5	5	6	3	14
9	7	3	5	3	4	6	3	5	2	2
10	8	4	5	3	4	7	1	3	2	1
11	9	4	4	4	5	8	0	0	0	0
12	10	4	7	5	5		30	30	30	30
13	11	3	5	5	5	x_i	f_1	f_2	f_3	f_4
14	12	5	5	5	5	0	0,00	0,00	0,00	0,00
15	13	5	6	6	6	1	0,03	0,07	0,03	0,03
16	14	6	6	3	5	2	0,10	0,10	0,13	0,07
17	15	6	6	7	6	3	0,17	0,17	0,37	0,13
18	16	2	7	7	7	4	0,40	0,20	0,23	0,20
19	17	1	1	3	5	5	0,17	0,20	0,10	0,47
20	18	2	2	2	2	6	0,10	0,17	0,07	0,07
21	19	4	3	2	3	7	0,03	0,10	0,07	0,03
22	20	6	3	3	3	8	0,00	0,00	0,00	0,00
23	21	3	3	3	4		1,00	1,00	1,00	1,00
24	22	4	5	4	5	МЦТ				
25	23	4	7	4	5	$\overline{X}$ =	4,00	4,27	3,70	4,33
26	24	4	5	4	5	Mo =	4,00	4,00	3,00	5,00
27	25	5	6	3	5	Md =	4,00	4,00	3,00	5,00
28	26	5	4	6	5	ММ				
29	27	3	4	4	4	σ^2 =	1,79	2,96	2,15	1,68
30	28	4	2	3	5	σ =	1,34	1,72	1,47	1,30
31	29	4	4	4	5	A_x =	0,00	-0,18	0,70	-0,68
32	30	4	4	4	5	E_x =	0,20	-0,75	0,26	0,64

Рис. 2.39. Розрахунки розподілу, МЦТ і ММ за допомогою функцій табличного процесора MS Excel

Розподіли розраховано за допомогою функції =ЧАСТОТА() і представлено на рис 2.40-2.43.

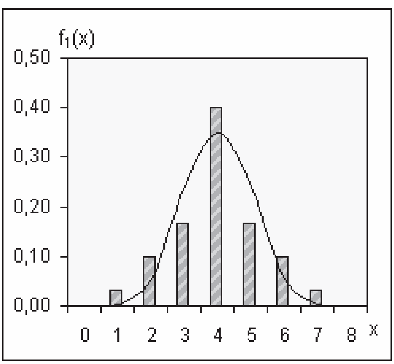


Рис. 2.40. $A_x = 0$; $E_x = 0{,}20$

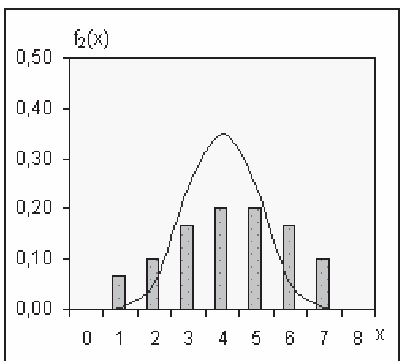


Рис. 2.41. $A_x = -0{,}18$; $E_x = -0{,}75$

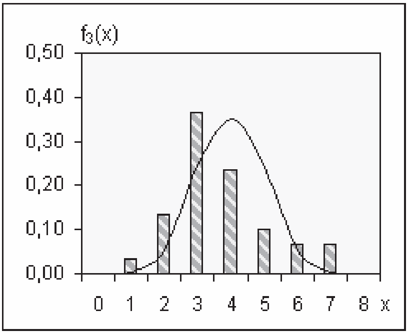


Рис. 2.42. $A_x = +0{,}70$; $E_x = +0{,}26$

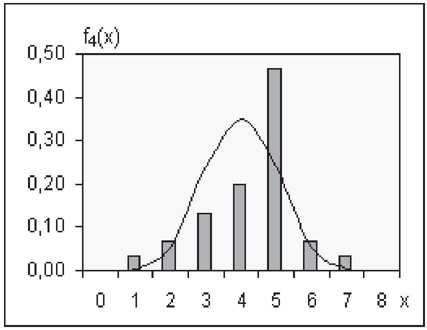


Рис. 2.43. $A_x = –0{,}68$; $E_x = +0{,}64$

Як видно, всі вибірки унімодальні, характеризуються приблизно однаковими МЦТ (див. комірки F25:J27). Розподіл вибірки $f_1(x)$ має нульову асиметрію (0,00), малий додатний ексцес (0,20) і серед чотирьох вибірок найбільш відповідає властивостям нормального розподілу (рис. 2.40).

Розподіл $f_2(x)$ характеризується незначною від'ємною асиметрією (–0,18) і суттєвим від'ємним ексцесом (–0,75) (рис. 2.41). Розподіл $f_3(x)$ «деформований» у лівий бік з асиметрією (0,70) і помірним додатним ексцесом (0,26) (рис. 2.42). Розподіл $f_4(x)$ має від'ємну асиметрію (–0,68) ще й додатний позитивний ексцес (0,64). У порівнянні зі «стандартом» він менш за все відповідає вимогам нормальності серед досліджуваних вибірок.

Спосіб 3. Отримати показники МЦТ і ММ вибірки за допомогою пакета «Аналіз даних» розділ «Описова статистика» можна у такій послідовності дій:

- виконати команди головного меню Excel [Сервіс –> Аналіз даних], вибрати розділ «Описова статистика (рис. 2.44), викликати діалогове вікно;

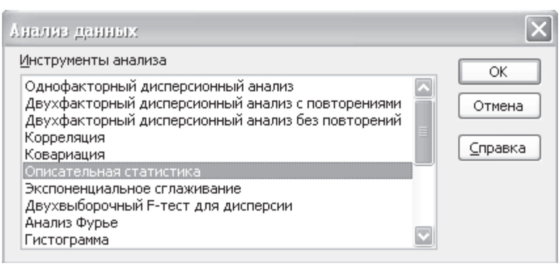


Рис. 2.44. Розділ «Описова статистика»

• встановити у діалоговому вікні «Описова статистика» (рис. 2.45) вхідні дані та параметри виводу, виконати команду ОК і отримати результати у комірках стовпчиків C:D (рис. 2.46);

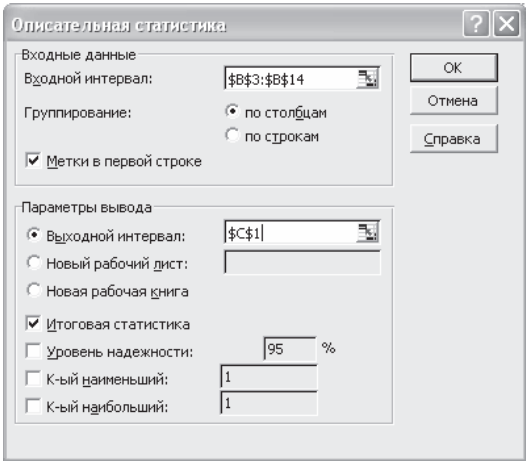


Рис. 2.45. Параметри діалогового вікна

• порівняти результати з розрахунками емпіричних МЦТ і ММ попереднього способу 1 (рис. 2.37), зробити висновки.

	A	B	C	D
1	*Емпіричні дані*		*Показники вибірки*	
2	*i*	x_i	Среднее	2,33
3	1	1	Стандартная ошибка	0,36
4	2	1	Медиана	2
5	3	1	Мода	2
6	4	2	Стандартное отклонение	1,23
7	5	2	Дисперсия выборки	1,52
8	6	2	Эксцесс	0,65
9	7	2	Асимметричность	0,99
10	8	2	Интервал	4
11	9	3	Минимум	1
12	10	3	Максимум	5
13	11	4	Сумма	28
14	12	5	Счет	12

Рис. 2.46. Результати розрахунку основних показників описової статистики

Отже, серед розглянутих способів розрахунку статистик (показників МЦТ і ММ), найбільш ефективним і гнучким вважаються засоби з використанням вбудованих статистичних функцій табличного процесора MS Excel.

Початкові та центральні моменти

Для системної характеристики варіаційного ряду використовують спеціальні показники – *початкові* та *центральні моменти*.

Початковий момент k-го порядку варіаційного ряду визначається як:

$$v_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot f_i \,. \tag{2.13}$$

Центральний момент k-го порядку визначається за формулою:

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^k \cdot f_i \,, \tag{2.14}$$

де x_i – варіанти розподілу; f_i – диференціальні відносні частоти, $\overline{X}$ – середнє арифметичне.

Очевидно, що *перший початковий момент* (k=1) має сенс середнього арифметичного варіаційного ряду

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i = \overline{X} \,. \tag{2.15}$$

Перший центральний момент (k=1) дорівнює нулю, що зумовлено властивостями середнього

$$m_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X}) \cdot f_i = 0 \,. \tag{2.16}$$

Другий центральний момент (k=2) – це *дисперсія* s_x^2 варіаційного ряду

$$m_2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2 \cdot f_i = s_x^2 \,. \tag{2.17}$$

Третій центральний момент (k=3) характеризує асиметрію розподілу

$$m_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^3 f_i \,.$$

Якщо розділити *третій центральний момент m_3* на куб середньоквадратичного відхилення $(s_x)^3$, то отримаємо *коефіцієнт асиметрії* розподілу A_x:

$$\frac{m_3}{(s_x)^3} = \frac{1}{(s_x)^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^3 f_i = A_x . \qquad (2.18)$$

Четвертий центральний момент m_4 дає можливість оцінити «загостреність» варіаційного ряду, тобто оцінити ексцес

$$m_4 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^4 f_i .$$

Коефіцієнт ексцесу E_x визначається через 4-й центральний момент m_4 :

$$\frac{m_4}{(s_x)^4} - 3 = \left[\frac{1}{(s_x)^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^3 f_i\right] - 3 = E_x . \qquad (2.19)$$

Між центральними і початковими моментами існує зв'язок:

$m_1 = 0$;

$m_2 = v_2 - v_1^2$,

що витікає з перетворень:

$$m_2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 f_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{X} + \overline{X}^2) f_i = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 f_i - \sum_{i=1}^{n}(2x_i\overline{X} - \overline{X}^2) f_i =$$

$$= v_2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i\overline{X} + x_i\overline{X} - \overline{X}^2) f_i = v_2 - \overline{X}\sum_{i=1}^{n}x_i f_i - \overline{X}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X}) f_i = v_2 - v_1 v_1 - 0 = v_2 - v_1^2$$

Отже, якщо $m_2 = s_x^2$, $v_2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \cdot f_i$, $v_1 = \sum_{i=1}^{n}x_i \cdot f_i$, то можна отримати ще одне співвідношення, яке використовується для розрахунку дисперсії:

$$s_x^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \cdot f_i - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i \cdot f_i\right)^2 .$$

Центральні моменти 3-го і 4-го порядку теж можна записати за допомогою початкових моментів:

$$m_3 = v_3 - 3v_1 v_2 + 2v_1^3, \qquad (2.20)$$

$m_4 = v_4 - 4v_1 v_3 + 6v_1^2 v_2 - 3v_1^4$ і т.д.

Практика статистичних досліджень обмежується, як правило, використанням моментів до 4-го порядку.

На основі порівняння значень теоретичних і вибіркових моментів виконується оцінювання параметрів розподілів випадкових величин (див., наприклад, розділ 4 «Методи статистичного оцінювання»).

Квантилі

Квантилем називається значення *ранжированої* змінної, що відокремлює від варіаційного ряду певну частку обсягу сукупності. Квантиль – загальне поняття. В математичній статистиці використовуються такі квантилі:

- *процентилі* ($P_1, P_2, \ldots, P_{99}$);
- *децилі* ($D_1, D_2, \ldots, D_9$);
- *квінтилі* (K_1, K_2, K_3, K_4);
- *квартилі* (Q_1, Q_2, Q_3).

Найбільш поширеними є *процентилі* (*персентилі*) і *квартилі*.

Процентилі ділять упорядковану сукупність на *сто* частин, тобто відокремлюють від сукупності по 0,01 частині (по 1%).

Квартилі ділять сукупність на *чотири* частини. Перший квартиль Q_1 відокремлює зліва 0,25 обсягу сукупності. Другий квартиль Q_2 ділить сукупність на дві рівні за обсягом частини (по 0,5), він називається *медіаною*. Нарешті, третій квартиль Q_3 відокремлює зліва 0,75 обсягу сукупності.

Між різними квантилями існують певні співвідношення, наприклад, між *квартилями* і *процентилями* такі: $Q_1 = P_{25}$, $Q_2 = P_{50}$, $Q_3 = P_{75}$. Тому досить знати лише процедуру знаходження, наприклад, процентилей, щоб визначити будь-які потрібні квантилі. Знаходження персентилей є найбільш простим. Перед початком обчислення будь-якого процентиля слід упорядкувати дані за збільшенням. P-й процентиль є межа, нижче за яку лежать P відсотків значень. Обчислювати квантилі можна графічно або за таблицями. Так з рис. 2.47 видно, що 25-й процентиль P_{25} і 1-й квартиль Q_1 дорівнюють значенню 3 (P_{25}=3 і Q_1=3) Отже, нижче за це значення знаходяться 25% усіх значень. Аналогічно можна знайти інші співвідношення, наприклад P_{75} і Q_3 (75-й процентиль і 3-й квартиль) дорівнюють 6. Нижче за це значення знаходяться 75% всіх значень.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Вибірка			Розрахунки			
2	*i*	Первинні дані	Упорядковані дані	Номери квантилів		Значення квантилів	
3				Процентиль	Квартиль	Процентиль	Квартиль
4	1	7	**1**	0,00	0	**1**	**1**
5	2	3	2	0,05		**2**	
6	3	6	2	0,10		**2**	
7	4	4	3	0,15		**3**	
8	5	5	3	0,20		**3**	
9	6	6	**3**	0,25	1	**3**	**3**
10	7	4	4	0,30		**4**	
11	8	6	4	0,35		**4**	
12	9	4	4	0,40		**4**	
13	10	1	4	0,45		**4**	
14	11	5	**4**	0,50	2	**4**	**4**
15	12	6	5	0,55		**5**	
16	13	3	5	0,60		**5**	
17	14	4	5	0,65		**5**	
18	15	5	5	0,70		**5**	
19	16	2	**5**	0,75	3	**5**	**5**
20	17	3	6	0,80		**6**	
21	18	2	6	0,85		**6**	
22	19	4	6	0,90		**6**	
23	20	5	6	0,95		**6**	
24		5	**7**	1,00	4	**7**	**7**

Рис. 2.47. Співвідношення квантилів

Для великих обсягів зручніше користуватися функціями MS Excel =ПЕРСЕНТИЛЬ() і =КВАРТИЛЬ(). На рис. 2.47 у комірки F4 і G4 внесено =ПЕРСЕНТИЛЬ($C$4:$C$23;D4) і =КВАРТИЛЬ($C$4:$C$23;E4) відповідно.

Функція =ПЕРСЕНТИЛЬ(*масив*; *k*) повертає *k*-ий процентиль для значень із *масиву* даних (значення *k* задається в інтервалі від 0 до 1 включно). Цю функцію можна використовувати для визначення межі прийнятності, наприклад, зараховувати курс навчальної дисципліни тільки тим студентам, які набрали балів не менш, ніж 75-й процентить. Якщо *k* не є кратним $1/(n - 1)$, то функція =ПЕРСЕНТИЛЬ() виконує інтерполяцію до *k*-ого процентиля. Для характеристик розподілів використовують квартилі. Функція MS Excel =КВАРТИЛЬ(масив; *k*) повертає відповідне до табл. 2.3 значення квартиля.

Таблиця 2.3

Значення функції =КВАРТИЛЬ()MS Excel

Значення *k*	Значення квартиля
0	Мінімальне значення
1	Першу квартиль (25-у процентиль)
2	Значення медіани (50-у процентиль)
3	Третю квартиль (75-у процентиль)
4	Максимальне значення

Через квартилі можуть визначатися числові характеристики центральної тенденції, мінливості. Наприклад, *середнє квартильне відхилення* – це міра розкиду в розподілах, яка параметром центральної тенденції має медіану *Md*.

«Чутливою» мірою розсіяння є *напівінтерквартильне* відхилення *E*. Воно визначається як половина інтервалу, якому відповідає половина обсягу у сукупності, тобто $E = 0{,}5\cdot(Q_3 - Q_1)$, де Q_3 і Q_1 – 3-й і 1-й квартилі.

Нормовані дані

Нормовані дані – це дані, наприклад, масиву *X* (див. рис. 2.48), що отримані шляхом математичного перетворення їх за формулою

$$z_j = \frac{x_j - \overline{X}}{s_x}, \tag{2.21}$$

де x_j – значення *j*-го елемента первинного масиву даних *X*;

$\overline{X}$ і s_x – середнє арифметичне і стандартне відхилення масиву X_1;

z_j – нормоване значення.

Так, нормоване значення1-го елемента z_1 дорівнюватиме (рис. 2.48):

$$z_1 = \frac{x_1 - \overline{X}}{s_x} = \frac{1 - 3{,}79}{1{,}63} \approx -1{,}71.$$

Нормовані дані можна отримати у такій послідовності:

- для емпіричних даних (стовпчики A:B рис. 2.48) розрахувати значення середнього $\overline{X}$ і стандартного відхилення s_x у рядках 16 і 17 за допомогою функцій =СРЗНАЧ() і =СТАНДОТКЛОН();

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	j	X	Z	i	X_i	f_x	Z_i	f_z
2	1	1	-1,71	1	0	0,00	-2,33	0,00
3	2	2	-1,10	2	1	0,07	-1,71	0,07
4	3	2	-1,10	3	2	0,14	-1,10	0,14
5	4	3	-0,48	4	3	0,21	-0,48	0,21
6	5	3	-0,48	5	4	0,29	0,13	0,29
7	6	3	-0,48	6	5	0,14	0,75	0,14
8	7	4	0,13	7	6	0,07	1,36	0,07
9	8	4	0,13	8	7	0,07	1,98	0,07
10	9	4	0,13	9	8	0,00	2,59	0,00
11	10	4	0,13					
12	11	5	0,75	Суми:		1,00		1,00
13	12	5	0,75					
14	13	6	1,36					
15	14	7	1,98					
16	$\bar{X}$ =	3,79	0,00					
17	s_x =	1,63	1,00					

Рис. 2.48. Результати розрахунку стандартизованих значень *Z*

- у комірку С2 внести вираз =(B2-$B$16)/$B$17 і отримати відповідне нормоване значення –1,71;
- аналогічні вирази внести у комірку С3:С15 (рис. 2.49);
- розрахувати у комірку С16 і С17 середні значення і стандартні відхилення нормованих змінних *Z* і переконатися, що вони становлять 0 і 1;

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	j	X	Z	i	X_i	f_x	Z_i	f_z
2	1	1	=(B2-$B$16)/$B$17	1	0	=ЧАСТОТА(B2:B15;E2:	=(E2-$B$16)/$B$17	=ЧАСТОТА(C2:C15;G2
3	2	2	=(B3-$B$16)/$B$17	2	1	=ЧАСТОТА(B2:B15;E2:	=(E3-$B$16)/$B$17	=ЧАСТОТА(C2:C15;G2
4	3	2	=(B4-$B$16)/$B$17	3	2	=ЧАСТОТА(B2:B15;E2:	=(E4-$B$16)/$B$17	=ЧАСТОТА(C2:C15;G2
5	4	3	=(B5-$B$16)/$B$17	4	3	=ЧАСТОТА(B2:B15;E2:	=(E5-$B$16)/$B$17	=ЧАСТОТА(C2:C15;G2
6	5	3	=(B6-$B$16)/$B$17	5	4	=ЧАСТОТА(B2:B15;E2:	=(E6-$B$16)/$B$17	=ЧАСТОТА(C2:C15;G2
7	6	3	=(B7-$B$16)/$B$17	6	5	=ЧАСТОТА(B2:B15;E2:	=(E7-$B$16)/$B$17	=ЧАСТОТА(C2:C15;G2
8	7	4	=(B8-$B$16)/$B$17	7	6	=ЧАСТОТА(B2:B15;E2:	=(E8-$B$16)/$B$17	=ЧАСТОТА(C2:C15;G2
9	8	4	=(B9-$B$16)/$B$17	8	7	=ЧАСТОТА(B2:B15;E2:	=(E9-$B$16)/$B$17	=ЧАСТОТА(C2:C15;G2
10	9	4	=(B10-$B$16)/$B$17	9	8	=ЧАСТОТА(B2:B15;E2:	=(E10-$B$16)/$B$1	=ЧАСТОТА(C2:C15;G2
11	10	4	=(B11-$B$16)/$B$17					
12	11	5	=(B12-$B$16)/$B$17	Суми:		=СУММ(F2:F11)		=СУММ(H2:H11)
13	12	5	=(B13-$B$16)/$B$17					
14	13	6	=(B14-$B$16)/$B$17					
15	14	7	=(B15-$B$16)/$B$17					
16	$\bar{X}$ =	=СРЗН	=СРЗНАЧ(C2:C15)					
17	s_x =	=СТАН	=СТАНДОТКЛОН(					

Рис. 2.49. Формули для розрахунку стандартизованих значень *Z*

- розрахувати у стовпчиках D:H розподіли частот f_x первинних і f_z нормованих даних з використанням функції =ЧАСТОТА() (див. рис. 2.48 – 2.49) і побудувати відповідні графіки (див. рис. 2.50).

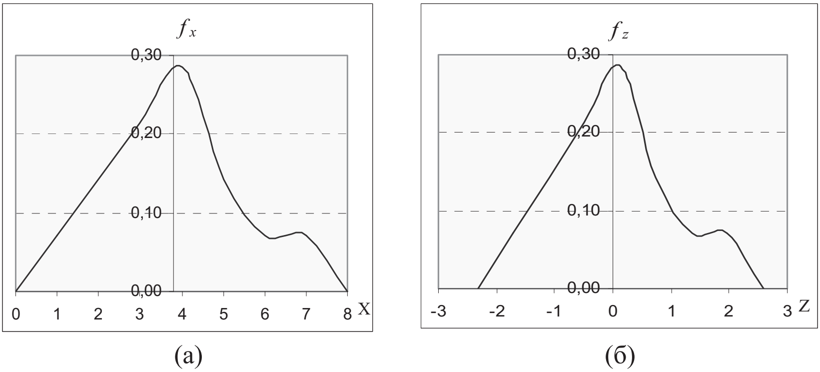


Рис. 2.50. Графіки розподілу даних: а) первинних; б) стандартизованих

З рис. 2.50 можна переконатися, що графіки варіаційних розподілів первинних і нормованих даних ідентичні за формою, осі ординат проходять по значенням середніх: для первинних це значення складає 3,79, для нормованих – 0,00. Різними є і показники середньоквадратичного відхилення – 1,63 і 1,00 відповідно. Метод нормалізації доволі часто використовується в статистичних методах (див., наприклад, розділ 2.3).

Запитання. Завдання.

1. Дайте визначення і охарактеризуйте особливості показників МЦТ.

2. Як розрахувати моду, медіану і середнє арифметичне вибірки.

3. Поясніть поняття «унімодальність» і «бімодальність» розподілу.

4. Як визначити середнє арифметичне, якщо дані представлено розподілами частот?

5. Охарактеризуйте вибіркову дисперсію і стандартне відхилення, запишіть розрахункові формули.

6. Які властивості характеризують показники асиметрії і ексцесу?

7. Що таке початкові та центральні моменти?

8. Які показники вибірки можна визначати за допомогою моментів?

9. Що таке «квантиль», які квантилі застосовує математична статистика?

10. Яке співвідношення існує між квартилями і процентилями?

11. Що означає поняття «нормовані дані», яка формула перетворення?

12. Виконайте математичні процедури завдань за трьома способами розрахунку показників МЦТ і ММ в MS Excel.

13. Виконайте лабораторну роботу № 3.

2.3. КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ

Завданням описової статистики є не лише систематизація емпіричних даних у вигляді розподілу частот та розрахунки типових показників МЦТ і варіацій ознак ММ, а й виявлення *зв'язку* між змінними, оцінювання його *напряму* та *інтенсивності*. Порівнюючи різні види зв'язків, можна виділити три типи залежностей між змінними *X* і *Y*:

функціональна залежність визначає *значення* змінної *Y* від *X* однозначно;

кореляційна залежність визначає *середнє значення* змінної *Y* від *X*;

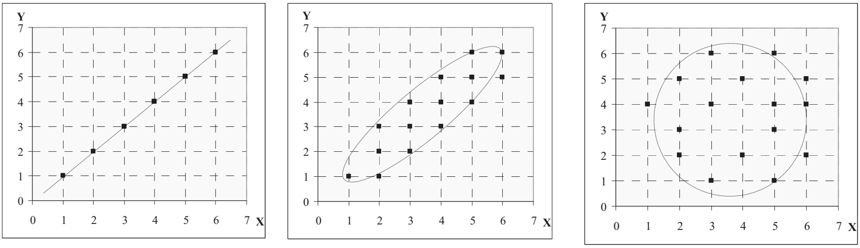
стохастична залежність визначає *розподіл* змінної *Y* від *X*.

Отже, найбільш загальною вважається стохастична залежність. Кореляційна залежність є залежністю стохастичною, функціональна – розглядається як окремий випадок кореляційної залежності.

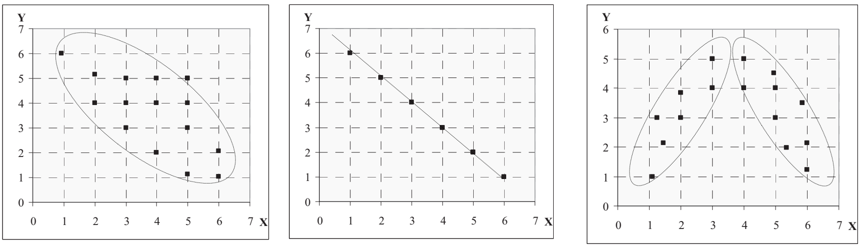
Сутність кореляції

Кореляція (від лат. correlatio – співвідношення) – це статистична залежність між випадковими величинами, що носить імовірнісний характер.

Кореляційні зв'язки можна вивчати на якісному рівні з діаграм розсіяння емпіричних значень змінних *X* і *Y* (рис. 2.51) і відповідним чином їх інтерпретувати. Так, наприклад, якщо підвищення рівня однієї змінною супроводжується підвищенням рівня іншої, то йдеться про *позитивну* кореляцію або *прямий* зв'язок (рис. 2.51 а, б). Якщо ж зростання однієї змінної супроводжується зниженням значень іншої, то маємо справу з *негативною* кореляцією або *зворотним* зв’язком (рис. 2.51 г, ґ). *Нульовою* називається кореляція за відсутності зв'язку змінних (рис. 2.51 в). Проте нульова загальна кореляція може свідчити лише про відсутність *лінійної* залежності, а не взагалі про відсутність будь якого *статистичного* зв’язку .



а) $r_{xy} = +1{,}00$ б) $r_{xy} \approx +0{,}88$ в) $r_{xy} \approx 0$



г) $r_{xy} \approx -0{,}60$ ґ) $r_{xy} = -1{,}00$ д)

Рис. 2.51. Діаграми розсіяння емпіричних значень змінних X і Y:

а) строга позитивна кореляція; б) сильна позитивна кореляція;
в) нульова кореляція; г) помірна негативна кореляція;
ґ) строга негативна кореляція; д) нелінійна кореляція

У психолого-педагогічних дослідженнях здебільшого спостерігаються зв'язки *нелінійні* (див. рис. 2.51 д). Наприклад, зростання мотивації спочатку підвищує ефективність навчення, а потім наступає зниження продуктивності (ефект «перемотивації» – закон Йеркса–Додсона). Кількісна міра кореляційного зв’язку оцінюється за значеннями коефіцієнтами кореляції у межах від – 1 до +1. Від’ємні значення коефіцієнтів указують на зворотний зв'язок, додатні – на прямий. Нульове значення може свідчити про відсутність зв'язку. Інтенсивність зв'язку (слабкий зв'язок – помірний – суттєвий – сильний) оцінюється за абсолютним значенням коефіцієнтів кореляції.

Методи розрахунку міри кореляційних зв’язків тісно пов'язані із вживаними вимірювальними шкалами (табл. 2.4)[8].

Таблиця 2.4

Коефіцієнти кореляції залежно від типів вимірювальних шкал

Шкали ознаки Y	Шкали ознаки X		
	Інтервальна (відношень)	Рангова	Номінальна
Інтервальна (відношень)	Коефіцієнт Пірсона r_{xy}; Дихотомічний коефіцієнт кореляції φ; Тетрахоричний коефіцієнт кореляції r_{tet}		
Рангова	Коефіцієнт Спірмена r_s (при умові, якщо для x шкалу інтервалів або відношень перетворити в рангову шкалу)	Коефіцієнти кореляції Спірмена r_s; τ Кендалла; Коефіцієнт конкордації W	
Номінальна	Точково-бісеріальний коефіцієнт кореляції r_{pb}; Бісеріальний коефіцієнт кореляції r_{bis}	Рангово-бісеріальний коефіцієнт кореляції r_b	Коефіцієнт асоціації Φ; Коефіцієнт контингенції Юла Q; Коефіцієнти спряженості Чупрова K і Пірсона C

Вивчення зв'язку між ознаками, які приймають випадкові значення, починається з оцінювання його лінійності.

Лінійна кореляція

Лінійний кореляційний зв’язок для емпіричних даних, виміряних за шкалою інтервалів або відношень, оцінюється за допомогою коефіцієнта кореляції Пірсона r_{xy}

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}, \qquad (2.22)$$

де x_i і y_i – значення змінних X і Y; $\overline{x}$ і $\overline{y}$ – середні X і Y; n – обсяг вибірки.

[8] Зазначені методи розрахунку з використанням комп’ютерної техніки можна знайти у підручнику [56].

Формула (2.22) може бути перетворена, якщо замінити значення змінних x_i і y_i нормованими значеннями z_x і z_y, і виглядатиме так:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_x \cdot z_y)}{n-1}, \qquad (2.23)$$

де $z_x = \frac{x-\overline{X}}{s_x}$ і $z_y = \frac{y-\overline{Y}}{s_y}$ – нормовані значення змінних X і Y.

Приклад 2.7. Оцінити зв'язок між змінними X і Y за емпіричними даними таблиці рис. 2.52 двома способами з використанням формул (2.22) і (2.23).

Спосіб 1.

Послідовність рішення:

- оцінити характер лінійності зв'язку між ознаками X і Y за допомогою діаграми розсіяння (рис. 2.52);

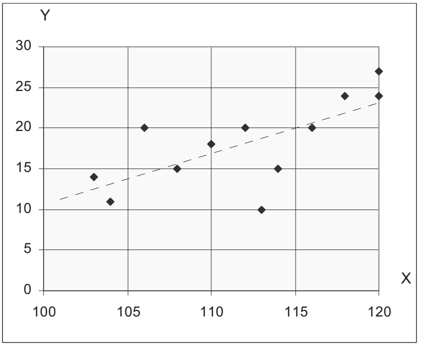


Рис. 2.52. Діаграма розсіяння ознак

- переконатися, що кореляція лінійна, і продовжити розрахунки коефіцієнта кореляції Пірсона r_{xy} (рис. 2.53 і 2.54);
- у комірках B16 і C16 розрахувати *середні значення* $\overline{x}$ і $\overline{y}$

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 112{,}00; \qquad \overline{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = 18{,}17;$$

- у комірках F15 і G15 розрахувати *суми квадратів різниць*:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 386{,}00; \qquad \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = 311{,}67;$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Емпіричні дані			Розрахунки				
2	i	x_i	y_i	$(x_i - X)$	$(y_i - Y)$	$(x_i - X)^2$	$(y_i - Y)^2$	$(x_i - X)\times(y_i - Y)$
3	1	113	10	1,00	-8,17	1,00	66,69	-8,17
4	2	114	15	2,00	-3,17	4,00	10,03	-6,33
5	3	106	20	-6,00	1,83	36,00	3,36	-11,00
6	4	108	15	-4,00	-3,17	16,00	10,03	12,67
7	5	120	24	8,00	5,83	64,00	34,03	46,67
8	6	104	11	-8,00	-7,17	64,00	51,36	57,33
9	7	116	20	4,00	1,83	16,00	3,36	7,33
10	8	112	20	0,00	1,83	0,00	3,36	0,00
11	9	110	18	-2,00	-0,17	4,00	0,03	0,33
12	10	118	24	6,00	5,83	36,00	34,03	35,00
13	11	103	14	-9,00	-4,17	81,00	17,36	37,50
14	12	120	27	8,00	8,83	64,00	78,03	70,67
15	Суми:	1344	218	0,00	0,00	386,00	311,67	242,00
16	Середні:	112,00	18,17					
17	r_{xy} =	0,70						

Рис. 2.53. Результати розрахунку коефіцієнта кореляції r_{xy}

- у комірці H18 розрахувати *суму добутків різниць*:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\cdot(y_i - \overline{y}) = 242{,}00\,;$$

- у комірці B17 розрахувати *коефіцієнт кореляції* r_{xy} за формулою:

$$r_{xy} = \frac{242{,}00}{\sqrt{386{,}00\cdot 311{,}67}} \approx 0{,}70\,.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Емпіричні дані			Розрахунки				
2	i	x_i	y_i	$(x_i - X)$	$(y_i - Y)$	$(x_i - X)^2$	$(y_i - Y)^2$	$(x_i - X)\times(y_i - Y)$
3	1	113	10	=B3-B$16	=C3-C$16	=D3^2	=E3^2	=D3*E3
4	2	114	15	=B4-B$16	=C4-C$16	=D4^2	=E4^2	=D4*E4
5	3	106	20	=B5-B$16	=C5-C$16	=D5^2	=E5^2	=D5*E5
6	4	108	15	=B6-B$16	=C6-C$16	=D6^2	=E6^2	=D6*E6
7	5	120	24	=B7-B$16	=C7-C$16	=D7^2	=E7^2	=D7*E7
8	6	104	11	=B8-B$16	=C8-C$16	=D8^2	=E8^2	=D8*E8
9	7	116	20	=B9-B$16	=C9-C$16	=D9^2	=E9^2	=D9*E9
10	8	112	20	=B10-B$16	=C10-C$16	=D10^2	=E10^2	=D10*E10
11	9	110	18	=B11-B$16	=C11-C$16	=D11^2	=E11^2	=D11*E11
12	10	118	24	=B12-B$16	=C12-C$16	=D12^2	=E12^2	=D12*E12
13	11	103	14	=B13-B$16	=C13-C$16	=D13^2	=E13^2	=D13*E13
14	12	120	27	=B14-B$16	=C14-C$16	=D14^2	=E14^2	=D14*E14
15	Суми:	=СУММ(B3:B14)	=СУММ(C3:C14)	=СУММ(D	=СУММ(E	=СУММ	=СУММ	=СУММ(H3:H14)
16	Середні:	=СРЗНАЧ(B3:B14)	=СРЗНАЧ(C3:C14)					
17	r_{xy} =	=H15/КОРЕНЬ(F15*G15)						

Рис. 2.54. Розрахункові формули r_{xy}

Значення $r_{xy} \approx +0{,}70$ свідчить про *суттєвий прямий зв'язок* між ознаками.

Спосіб 2.

Послідовність рішення:

• Результати розрахунку r_{xy} за нормованими даними показано на рис. 2.55, розрахункові формули рис. 2.56.

	A	B	C	D	E
1	Первині емпіричні дані			Нормовані дані	
2	i	x_i	y_i	z_x	z_y
3	1	113	10	0,17	-1,53
4	2	114	15	0,34	-0,59
5	3	106	20	-1,01	0,34
6	4	108	15	-0,68	-0,59
7	5	120	24	1,35	1,10
8	6	104	11	-1,35	-1,35
9	7	116	20	0,68	0,34
10	8	112	20	0,00	0,34
11	9	110	18	-0,34	-0,03
12	10	118	24	1,01	1,10
13	11	103	14	-1,52	-0,78
14	12	120	27	1,35	1,66
15	Суми:	1344	218		
16	Середні:	112,00	18,17	0,00	0,00
17	Ст. відхил.	5,92	5,32	1,00	1,00
18	r_{xy} =	0,70			

Рис. 2.55. Результати розрахунку r_{xy} за нормованими даними

• у комірках B16 і C16 розрахувати *середні значення* $\bar{x}$ і $\bar{y}$;

• у комірках B17 і C17 розрахувати *стандартні відхилення* s_x і s_y;

	A	B	C	D	E
1	Первині емпіричні дані			Нормовані дані	
2	i	x_i	y_i	z_x	z_y
3	1	113	10	=(B3-B$16)/B$17	=(C3-C$16)/C$17
4	2	114	15	=(B4-B$16)/B$17	=(C4-C$16)/C$17
5	3	106	20	=(B5-B$16)/B$17	=(C5-C$16)/C$17
6	4	108	15	=(B6-B$16)/B$17	=(C6-C$16)/C$17
7	5	120	24	=(B7-B$16)/B$17	=(C7-C$16)/C$17
8	6	104	11	=(B8-B$16)/B$17	=(C8-C$16)/C$17
9	7	116	20	=(B9-B$16)/B$17	=(C9-C$16)/C$17
10	8	112	20	=(B10-B$16)/B$17	=(C10-C$16)/C$17
11	9	110	18	=(B11-B$16)/B$17	=(C11-C$16)/C$17
12	10	118	24	=(B12-B$16)/B$17	=(C12-C$16)/C$17
13	11	103	14	=(B13-B$16)/B$17	=(C13-C$16)/C$17
14	12	120	27	=(B14-B$16)/B$17	=(C14-C$16)/C$17
15	Суми:	=СУММ(B3:B14)	=СУММ(C3:C14)		
16	Середні:	=СРЗНАЧ(B3:B14)	=СРЗНАЧ(C3:C14)	=СРЗНАЧ(D3:D14)	=СРЗНАЧ(E3:E14)
17	Ст. відхил.	=СТАНДОТКЛОН	=СТАНДОТКЛОН	=СТАНДОТКЛОН(D3:D14)	=СТАНДОТКЛОН(E3:E14)
18	r_{xy} =	=СУММПРОИЗВ(D3:D14;E3:E14)/(СЧЁТ(A3:A14)-1)			

Рис. 2.56. Формули розрахунку r_{xy} за нормованими даними

• у стовпчиках D і E розрахувати нормовані дані z_x і z_y (зверніть увагу, що середнє нормованих даних дорівнює 0, а стандартне відхилення – 1,00);

- у комірці B18 розрахувати коефіцієнт кореляції r_{xy} за формулою (2.23);

Висновки. Одне те саме значення $r_{xy} \approx +0{,}70$ розраховано двома способами. Методи розрахунку за нормованими даними виглядають більш лаконічно. Значення парного *коефіцієнта кореляції Пірсона* r_{xy} можна також отримати за допомогою спеціальної функції MS Excel =ПИРСОН().

Нелінійна кореляція

Приклад 2.8. Оцінити зв'язок між віком (змінна X) і результатами допоміжного тесту «цифра-знак» шкали інтелекту дорослих Векслера (змінна Y). Упорядковані за віком дані 15 осіб представлено у таблиці рис. 2.58.

Послідовність рішення:

- оцінити характер лінійності (нелінійності) зв'язку між значеннями ознак віку (X) і тесту (Y) за допомогою діаграми розсіяння (рис. 2.57);

Рис. 2.57. Діаграма розсіяння ознак

- переконатися, що кореляція нелінійна – спочатку результати тестування круто зростають для осіб віком від 10 до 22 років, досягають максимального значення, а потім повільно зменшуються. Якісна картина дає підстави для застосування кількісної міри нелінійності – *кореляційного відношення*, чисельне значення якого знаходиться у межах від 0 до 1:

$$\eta^2_{y,x} = 1 - SS_{внутр} / SS_{загал}, \qquad (2.24)$$

де $SS_{внутр} = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$ – внутрішньогрупова сума квадратів відхилень y_i від середнього $\overline{y}$; $SS_{загал} = s_y^2 \cdot (n-1)$ – загальна сума квадратів;

- розрахувати квадрати різниць s_i окремо для кожної вікової групи (вікові групи виділено зафарбованими рядками, результати розрахунків і відповідних формул показано на рис. 2.58 і 2.59);
- внести у комірку D3 вираз =(C3-СРЗНАЧ($C$3:$C$4))^2. Аналогічний вираз внести у комірки D4 (вікова група 10 містить лише два значення тесту);

	A	B	C	D
1	i	Вік	Тест	s_i
2		x_i	y_i	
3	1	10	7	1,00
4	2	10	9	1,00
5	3	14	8	0,00
6	4	18	9	1,00
7	5	18	11	1,00
8	6	22	11	0,00
9	7	22	11	0,00
10	8	26	9	1,00
11	9	26	11	1,00
12	10	30	9	0,11
13	11	30	9	0,11
14	12	30	10	0,44
15	13	34	7	1,00
16	14	34	9	1,00
17	15	38	8	0,00
18			SSвнутр =	8,67
19			SSзагал =	26,40
20	*Кореляційне відношення* η^2_{yx} =			0,67
21	Коефіцієнти кореляції для віку		від 10 до 38	-0,04
22			від 10 до 22	0,83
23			від 26 до 38	-0,69

Рис. 2.58. Кореляційне відношення $\eta^2_{y,x} \approx 0{,}67$

	A	B	C	D
1	i	Вік	Тест	s_i
2		x_i	y_i	
3	1	10	7	=(C3-СРЗНАЧ($C$3:$C$4))^2
4	2	10	9	=(C4-СРЗНАЧ($C$3:$C$4))^2
5	3	14	8	=(C5-СРЗНАЧ($C$5:$C$5))^2
6	4	18	9	=(C6-СРЗНАЧ($C$6:$C$7))^2
7	5	18	11	=(C7-СРЗНАЧ($C$6:$C$7))^2
8	6	22	11	=(C8-СРЗНАЧ($C$8:$C$9))^2
9	7	22	11	=(C9-СРЗНАЧ($C$8:$C$9))^2
10	8	26	9	=(C10-СРЗНАЧ($C$10:$C$11))^2
11	9	26	11	=(C11-СРЗНАЧ($C$10:$C$11))^2
12	10	30	9	=(C12-СРЗНАЧ($C$12:$C$14))^2
13	11	30	9	=(C13-СРЗНАЧ($C$12:$C$14))^2
14	12	30	10	=(C14-СРЗНАЧ($C$12:$C$14))^2
15	13	34	7	=(C15-СРЗНАЧ($C$15:$C$16))^2
16	14	34	9	=(C16-СРЗНАЧ($C$15:$C$16))^2
17	15	38	8	=(C17-СРЗНАЧ($C$17:$C$17))^2
18			SSвнутр =	=СУММ(D3:D17)
19			SSзагал =	=ДИСП(C3:C17)*(A17-1)
20	*Кореляційне відношення* η^2_{yx} =			=1-D18/D19
21	Коефіцієнти кореляції для віку		від 10 до 38	=ПИРСОН(B3:B17;C3:C17)
22			від 10 до 22	=ПИРСОН(B3:B9;C3:C9)
23			від 26 до 38	=ПИРСОН(B10:B17;C10:C17)

Рис. 2.59. Формули розрахунку кореляційного відношення $\eta^2_{y,x}$

- визначити s_i для інших вікових груп, де x = 14, 18, 22, 26, 30, 34 і 38;
- у комірці D18 розрахувати $SS_{внутр}$ (вираз =СУММ(D3:D17));
- у комірці D19 розрахувати $SS_{загал}$ (вираз =ДИСП(C3:C17)*(A17-1));
- у комірці D20 отримати *відношення* $\eta^2_{y,x}$ (внести вираз =1-D18/D19);
- у комірці D21 розрахувати коефіцієнт кореляції Пірсона для всього ма-

сиву за допомогою функції MS Excel =ПИРСОН(B3:B17;C3:C17). Коефіцієнт кореляції дорівнюватиме приблизно нулю ($r_{xy} \approx -0{,}04$), що свідчить про (нібито) відсутність будь-якого зв'язку між змінними;

- розрахувати коефіцієнти кореляції окремо для частин масиву: у комірці D22 для віку від 10 до 22, у комірці D23 для віку від 26 до 38 .

Отже, для віку від 10 до 22 років коефіцієнт кореляції має високе додатне значення ($r_{xy} \approx +0{,}83$), що підтверджує прямий зв'язок, який можна спостерігати на діаграмі. Для віку від 26 до 38 років коефіцієнт кореляції має від'ємне значення ($r_{xy} \approx -0{,}69$), що інтерпретується як зворотний зв'язок. Значення *кореляційного відношення* $\eta^2_{y,x} \approx 0{,}67$ підтверджує високій рівень не лінійності зв’язку змінних *X Y*.

Слід звернути увагу на те, що для коефіцієнта $\eta^2_{y,x}$ спочатку вказують індекс *y*, а потім – *x*, який є мірою прогнозування *Y* по *X*. Важливо зазначити, що для лінійного кореляційного зв'язку виконується співвідношення $r_{xy} = r_{yx}$, проте $\eta^2_{y,x}$ і $\eta^2_{x,y}$ матимуть різні значення. Якщо звернутися до діаграми розсіяння (рис. 2.57), то можна відзначити той факт, що для особи, наприклад, віком 10 років (*X*=10), можна прогнозувати середню оцінку тесту у 8 балів (*Y*=(7+9)/2=8), у той час як для оцінки тесту, наприклад, у 8 балів вік особи може бути як близько 10, так і близько 38 років.

Розрахунки важливих для психолого-педагогічних досліджень коефіцієнтів кореляції приведено разом з оцінкою їхньої вірогідності у розділі 5.6.

Коефіцієнти взаємної зв'язаності

Коефіцієнти взаємної зв'язаності, наприклад, Чупрова *K* і Пірсона *C* застосовуються для оцінки зв'язку у ситуаціях, коли кожна якісна ознака складається більш ніж з двох груп. Коефіцієнт Чупрова *K* використовується у разі неоднакової кількості рядків і стовпчиків таблиці спряженості ($k_1 \neq k_2$):

$$K = \sqrt{\frac{\varphi^2}{\sqrt{(k_1 - 1)(k_2 - 1)}}}, \qquad (2.25)$$

де k_1 і k_2 – кількість груп першої і другої ознаки (параметри X і Y).

Коефіцієнт взаємної зв'язаності Пірсона C застосовується, коли кількість рядків і кількість стовпців у таблиці спряженості збігаються ($k_1 = k_2$):

$$C = \sqrt{\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}}, \text{ де } \quad \varphi^2 = \sum_{y=1}^{k1} \left(\frac{\sum_{x=1}^{k2} \left(\frac{n_{xy}^2}{n_x} \right)}{n_y} \right) - 1. \qquad (2.26)$$

Значення коефіцієнтів Чупрова K і Пірсона C змінюються від 0 до 1.

Приклад 2.9. Оцінити зв'язаність між приналежністю осіб до певної соціальної групи та їх психічними станами (табл. 2.5).

Таблиця 2.5

Розподіл груп за психічними станами

Соціальні групи (параметр Y)	Психічні стани (параметр X)				Всього:
	Монотонія	Нудьга	Самотність	Астенія	
студенти	10	43	7	5	65
службовці	42	14	25	6	87
пенсіонери	51	11	10	33	105
Всього	103	68	42	44	257

Послідовність рішення:

- Для ситуації з *неоднаковою* кількістю рядків і стовпчиків ($k_1 \neq k_2$) використати коефіцієнт взаємної зв'язаності Чупрова K.
- Внести емпіричні дані у таблицю рис. 9.20 і виконати такі дії:

– розписати докладніше вираз φ^2, виходячи з умов $k_1 = 3$ і $k_2 = 4$:

$$\varphi^2 = \sum_{y=1}^{k1} \left(\frac{\sum_{x=1}^{k2} \left(\frac{n_{xy}^2}{n_x} \right)}{n_y} \right) - 1 = \frac{\sum_{x=1}^{k2} \left(\frac{n_{xy}^2}{n_x} \right)}{n_1} + \frac{\sum_{x=1}^{k2} \left(\frac{n_{xy}^2}{n_x} \right)}{n_2} + \frac{\sum_{x=1}^{k2} \left(\frac{n_{xy}^2}{n_x} \right)}{n_3} - 1. \qquad (2.27)$$

– розрахувати окремі складові (рис. 2.60 і 2.61):

$$A_1 = \frac{\sum_{x=1}^{k2}\left(\frac{n_{xy}^2}{n_x}\right)}{n_1} = \frac{\frac{3^2}{14}+\frac{9^2}{12}+\frac{3^2}{8}+\frac{1^2}{11}}{16} \approx 0{,}538;$$

$$A_2 = \frac{\sum_{x=1}^{k2}\left(\frac{n_{xy}^2}{n_x}\right)}{n_2} = \frac{\frac{8^2}{14}+\frac{2^2}{12}+\frac{4^2}{8}+\frac{2^2}{11}}{16} \approx 0{,}454;$$

$$A_3 = \frac{\sum_{x=1}^{k2}\left(\frac{n_{xy}^2}{n_x}\right)}{n_3} = \frac{\frac{3^2}{14}+\frac{1^2}{12}+\frac{1^2}{8}+\frac{8^2}{11}}{13} \approx 0{,}513.$$

	A	B	C	D	E	F
1	Соціальні групи	Психічні стани (параметр X)				Всього:
2	(параметр Y)	Монотонія	Нудьга	Самотність	Астенія	
3	студенти	3	9	3	1	16
4	службовці	8	2	4	2	16
5	пенсіонери	3	1	1	8	13
6	Всього	14	12	8	11	45
7	k_1 =	3				
8	k_2 =	4				
9	A_1 =	0,54				
10	A_2 =	0,45				
11	A_3 =	0,51				
12	φ^2 =	0,51				
13	K =	0,45				

Рис. 2.60. Результати розрахунку коефіцієнта Чупрова *K*

	A	B	C	D	E	F
1	Соціальні групи	Психічні стани (параметр X)				Всього:
2	(параметр Y)	Монотонія	Нудьга	Самотність	Астенія	
3	студенти	3	9	3	1	=СУММ(B3:E3)
4	службовці	8	2	4	2	=СУММ(B4:E4)
5	пенсіонери	3	1	1	8	=СУММ(B5:E5)
6	Всього	=СУММ(B3:B5)	=СУММ(C3:C5)	=СУММ(D3:D5)	=СУММ(E3:E5)	=СУММ(F3:F5)
7	k_1 =	=СЧЁТ(B3:B5)				
8	k_2 =	=СЧЁТ(B3:E3)				
9	A_1 =	=(B3^2/B$6+C3^2/C$6+D3^2/D$6+E3^2/E$6)/F3				
10	A_2 =	=(B4^2/B$6+C4^2/C$6+D4^2/D$6+E4^2/E$6)/F4				
11	A_3 =	=(B5^2/B$6+C5^2/C$6+D5^2/D$6+E5^2/E$6)/F5				
12	φ^2 =	=СУММ(B9:B11)-1				
13	K =	=КОРЕНЬ((B12)/КОРЕНЬ((B7-1)*(B8-1)))				

Рис. 2.61. Формули для розрахунку коефіцієнта Чупрова *K*

– визначити параметр φ^2:

$$\varphi^2 = 0{,}538+0{,}454+0{,}513-1 \approx 0{,}505.$$

– отримати чисельне значення коефіцієнта взаємної зв'язаності Чупрова *K*

$$K = \sqrt{\frac{\varphi^2}{\sqrt{(k_1-1)(k_2-1)}}} = \sqrt{\frac{0{,}505}{\sqrt{(3-1)(4-1)}}} \approx 0{,}45\,.$$

Висновки. Значення коефіцієнта Чупрова $K \approx 0{,}45$ свідчить про помірну взаємну зв’язаність між параметрами *Y* і *X*. Направлення зв'язаності коефіцієнт *K* не вказує. Це можна оцінити за формою спільного розподілу.

Запитання. Завдання.

1. Що таке кореляція? Охарактеризуйте особливості кореляційного зв'язку.

2. Які види зв’язків (три типи залежностей) між змінними *X* і *Y* можна виділити?

3. Доведіть, що вибірковий коефіцієнт кореляції є випадковою величиною.

4. Який кореляційний зв’язок називають прямим, а який – зворотним?

5. Як якісно оцінити лінійність (нелінійність) кореляції?

6. В яких межах знаходиться чисельне значення коефіцієнтами кореляції?

7. Як кількісно оцінити лінійність (нелінійність) кореляції?

8. Запишіть формулу коефіцієнта лінійної кореляції Персона.

9. В яких межах знаходиться чисельне значення кореляційного відношення?

10. Охарактеризуйте особливості використання коефіцієнтів взаємної зв'язаності Чупрова К і Пірсона С.

11. В яких межах знаходиться значення коефіцієнтів взаємної зв'язаності Чупрова К і Пірсона С?

12. Повторіть математичні процедури завдань за прикладами 2.7 – 2.9.

13. Виконайте лабораторні роботи № 4 – № 6.

2.4. РЕГРЕСІЯ

Статистичні зв’язки між змінними досліджуються не лише методами кореляційного, а й регресійного аналізу, які доповнюють один одного. Основне завдання *кореляційного* аналізу – визначення зв’язку між випадковими змінними і оцінювання його інтенсивності та напряму. Основне завдання *регресійного* аналізу є встановлення форми і вивчення залежності змінних.

Регресія дозволяє за величиною однієї ознаки (змінна X) знаходити середні (очікувані) значення іншої ознаки (змінна Y), зв'язаної з X кореляційно. Оскільки в дослідженнях конкретний вид взаємозв'язків невідомий, одне з головних завдань регресійного аналізу полягає у доборі відповідного виразу $Y = f(X)$, графік якого проходить через емпіричні точки (або досить близько до них) і таким чином зв'язує змінні X і Y.

Вираз $Y = f(X)$ має назву *рівняння регресії*, функція $f(X)$ – *функція регресії*, а їхні графіки – *лінії регресії*. Регресійний аналіз виявляє кількісну залежність ознаки-фактора (залежної змінної) від одного або декількох ознак-факторів (незалежної змінної). Ця залежність може бути одномірною чи багатомірною (множинною), як лінійною, так і нелінійною.

Одномірна лінійна регресія

Одномірна лінійна регресія припускає тільки дві змінні, наприклад, незалежну X і залежну Y, а також рівняння лінійного типу $\tilde{Y}=a_0 + a_1 \cdot X$. Лінійна регресії дає можливість виявляти, на скільки змінюється середня величина однієї ознаки при зміні іншої. Побудова лінійної регресії полягає у розрахунках коефіцієнтів лінійної регресії a_0 і a_1:

$$a_1 = \frac{\sum(x_i - \overline{X})\cdot(y_i - \overline{Y})}{\sum(x_i - \overline{X})^2}; \tag{2.28}$$

$$a_0 = \overline{Y} - a_1 \cdot \overline{X}, \tag{2.29}$$

де $\overline{Y}$ і $\overline{X}$ – середні значення змінних Y і X.

Вибір значень коефіцієнтів a_0 і a_1 виконується за методом «найменших квадратів» так, щоб сума $\sum(y_i - \widetilde{Y}_i)^2 = \sum(y_i - a_0 - a_1 \cdot X_i)^2$ була мінімальною.

Якщо незалежною ознакою виступає Y а залежною – X, то рівняння лінійної регресії буде мати інший вигляд типу $\widetilde{X} = b_0 + b_1 \cdot Y$. Коефіцієнти лінійної регресії b_0 і b_1 відрізнятимуться від коефіцієнтів a_0 і a_1.

Приклад 2.10. Оцінити залежність успішності навчання (Y) від затраченого часу (X). Емпіричні дані представлено в таблиці рис. 2.62.

Послідовність рішення:

- Виконати розрахунки коефіцієнтів регресії a_0 і a_1 :

– у комірки B15 і C15 внести =СРЗНАЧ(B3:B13) і =СРЗНАЧ(C3:C13) і отримати середні значення масивів $\overline{X} \approx 2{,}39$ і $\overline{Y} \approx 4{,}09$;

– у комірках D3:H13 розрахувати різниці, добутки і квадрати різниць за допомогою відповідних формул, що показано на рис. 2.63;

– у комірках F14:H14 розрахувати суми добутків і квадратів різниць;

– у комірках D17 і D17 розрахувати коефіцієнти лінійної регресії a_1 і a_0 за допомогою виразів =F14/G14 і =C15-D17*B15:

$$a_1 = 7{,}11/5{,}19 \approx 1{,}37 \quad \text{і} \quad a_0 = 4{,}09 – 1{,}37 \cdot 2{,}39 \approx 0{,}82;$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Емпіричні дані			Розрахунки					Регресія	
2	i	x_i	y_i	(x_i-X)	(y_i-Y)	$(x_i-X)(y_i-Y)$	$(x_i-X)^2$	$(y_i-Y)^2$	Y	X
3	1	2,1	5	-0,29	0,91	-0,26	0,08	0,83	3,69	2,77
4	2	3,4	5	1,01	0,91	0,92	1,02	0,83	5,47	2,77
5	3	1,5	3	-0,89	-1,09	0,97	0,79	1,19	2,87	1,93
6	4	2,9	6	0,51	1,91	0,97	0,26	3,64	4,79	3,19
7	5	2,5	3	0,11	-1,09	-0,12	0,01	1,19	4,24	1,93
8	6	1,4	3	-0,99	-1,09	1,08	0,98	1,19	2,73	1,93
9	7	2,5	5	0,11	0,91	0,10	0,01	0,83	4,24	2,77
10	8	2,2	3	-0,19	-1,09	0,21	0,04	1,19	3,83	1,93
11	9	3	5	0,61	0,91	0,55	0,37	0,83	4,93	2,77
12	10	3,3	5	0,91	0,91	0,83	0,83	0,83	5,34	2,77
13	11	1,5	2	-0,89	-2,09	1,86	0,79	4,37	2,87	1,51
14	Суми					7,11	5,19	16,91		
15	Середні	2,39	4,09							
16			r_{xy} =	0,76						
17			a_1 =	1,37			b_1 =	0,42		
18			a_0 =	0,82			b_0 =	0,67		

Рис. 2.62. Розрахунки лінійної регресії

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Емпіричні дані			Розрахунки					Регресія	
2	i	x_i	y_i	$(x_i-\bar{X})$	$(y_i-\bar{Y})$	$(x_i-\bar{X})(y_i-\bar{Y})$	$(x_i-\bar{X})^2$	$(y_i-\bar{Y})^2$	$\tilde{Y}$	$\tilde{X}$
3	1	2,1	5	=B3-B$15	=C3-C$15	=D3*E3	=D3^2	=E3^2	=$D$18+$D$17*B3	=$H$18+$H$17*C3
4	2	3,4	5	=B4-B$15	=C4-C$15	=D4*E4	=D4^2	=E4^2	=$D$18+$D$17*B4	=$H$18+$H$17*C4
5	3	1,5	3	=B5-B$15	=C5-C$15	=D5*E5	=D5^2	=E5^2	=$D$18+$D$17*B5	=$H$18+$H$17*C5
6	4	2,9	6	=B6-B$15	=C6-C$15	=D6*E6	=D6^2	=E6^2	=$D$18+$D$17*B6	=$H$18+$H$17*C6
7	5	2,5	3	=B7-B$15	=C7-C$15	=D7*E7	=D7^2	=E7^2	=$D$18+$D$17*B7	=$H$18+$H$17*C7
8	6	1,4	3	=B8-B$15	=C8-C$15	=D8*E8	=D8^2	=E8^2	=$D$18+$D$17*B8	=$H$18+$H$17*C8
9	7	2,5	5	=B9-B$15	=C9-C$15	=D9*E9	=D9^2	=E9^2	=$D$18+$D$17*B9	=$H$18+$H$17*C9
10	8	2,2	3	=B10-B$1	=C10-C$1	=D10*E10	=D10^2	=E10^2	=$D$18+$D$17*B10	=$H$18+$H$17*C10
11	9	3	5	=B11-B$1	=C11-C$1	=D11*E11	=D11^2	=E11^2	=$D$18+$D$17*B11	=$H$18+$H$17*C11
12	10	3,3	5	=B12-B$1	=C12-C$1	=D12*E12	=D12^2	=E12^2	=$D$18+$D$17*B12	=$H$18+$H$17*C12
13	11	1,5	2	=B13-B$1	=C13-C$1	=D13*E13	=D13^2	=E13^2	=$D$18+$D$17*B13	=$H$18+$H$17*C13
14	Суми					=СУММ(F3:I	=СУММ	=СУММ(H3:H13)		
15	Середні	=СР3	=СРЗНАЧ(C3:C13)							
16			r_{xy} =	=F14/КОРЕНЬ(G14*H14)						
17			a_1 =	=F14/G14			b_1 =	=F14/H14		
18			a_0 =	=C15-D17*B15			b_0 =	=B15-H17*C15		

Рис. 2.63. Формули для розрахунку лінійної регресії

– виконати у комірках I3:I13 розрахунки теоретичного значення $\tilde{Y}$ за регресійним рівнянням $\tilde{Y}$=0,82+1,37·X. Для цього у комірку I3 внести вираз =$D$18+$D$17*B3. Аналогічні вирази внести в інші комірки стовпчика I;

– у комірках H17:H18 аналогічним способом розрахувати коефіцієнти регресії b_0 і b_1 регресійного рівняння $\tilde{X} = b_0 + b_1 \cdot Y$;

– у комірці D21 розрахувати коефіцієнт кореляції за допомогою виразу =F14/КОРЕНЬ(G14*H14) або =ПИРСОН(B3:B13;C3:C13), отримати $r_{xy} \approx 0,76$;

– побудувати графіки лінійної регресії (рис. 2.64).

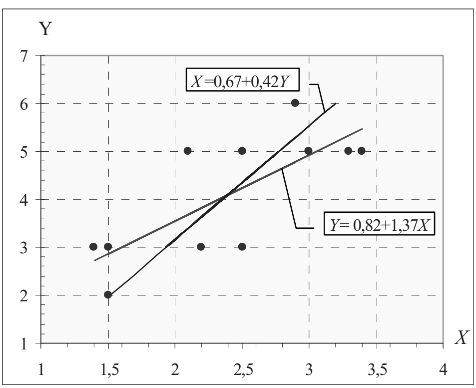


Рис. 2.64. Графіки лінійної регресії

Висновки. Рівняння регресії $\tilde{Y}$=0,82+1,37·X а також $\tilde{X}$=0,67 + 0,42·Y (графіки регресії) дають можливість аналітичного прогнозування значень залежної змінної за допомогою незалежної змінної. Отримані регресійні рівняння мають різні коефіцієнти регресії і виконують різні прогнозуючи функції: перше прогнозує Y за значеннями X, друге – навпаки, X за значеннями Y (звичайно, якщо таке прогнозування має сенс).

Множинна регресія

Множинна регресія – це оцінювання, наприклад, змінної Y лінійною комбінацією m незалежних змінних $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Найпростіший варіант регресії має місце для m=2, коли необхідно спрогнозувати залежність однієї змінної Y від двох змінних X_1 і X_2. Рівняння такої множинної регресії має вигляд:

$$\tilde{Y} = B_1 \cdot X_1 + B_2 \cdot X_2 + B_0, \tag{2.30}$$

де $B_1 = b_1 \cdot s_y / s_1$; $B_2 = b_2 \cdot s_y / s_2$; $B_0 = \overline{Y} - \hat{A}_1 \cdot \overline{X}_1 - \hat{A}_2 \cdot \overline{X}_2$;

$$b_1 = (r_{y1} - r_{y2} \cdot r_{12})/(1 - r_{12}^2); \qquad b_2 = (r_{y2} - r_{y1} \cdot r_{12})/(1 - r_{12}^2);$$

$s_y, s_1, s_2, \overline{Y}, \overline{X}_1, \overline{X}_2$ – стандартні відхилення і середні значення Y, X_1 і X_2;

r_{y1}, r_{y2}, r_{12} – коефіцієнти парної кореляції Пірсона між Y і X_1, Y і X_2, X_1 і X_2.

Для оцінювання зв'язку, з одного боку, змінної Y, а з іншого – двох змінних X_1 і X_2, використовують *коефіцієнт множинної кореляції*:

$$R_{y-1,2} = \sqrt{b_1 \cdot r_{y1} + b_2 \cdot r_{y2}}\,. \tag{2.31}$$

Приклад 2.11. Спрогнозувати залежність змінної Y від комбінації незалежних змінних X_1 і X_2 за емпіричними даними рис. 2.65.

Послідовність рішення:

- *Виконати розрахунки* коефіцієнтів множинної регресії і множинної кореляції (рис. 2.65 і 2.66):

– у комірки B15:D15 внести =СРЗНАЧ(B3:B14), =СРЗНАЧ(C3:C14) і =СРЗНАЧ(D3:D14), отримати середні значення $\overline{Y} \approx 4,00$, $\overline{X}_1 \approx 5,83$ і $\overline{X}_2 \approx 3,17$;

– у комірки B16:D16 внести функції =СТАНДОТКЛОН(B3:B14),

=СТАНДОТКЛОН(C3:C14), =СТАНДОТКЛОН(D3:D14) і отримати стандартні відхилення $s_y \approx 0,74$; $s_1 \approx 2,17$ і $s_2 \approx 1,11$;

– у комірках B17:B19 розрахувати коефіцієнти парної кореляції Пірсона за допомогою функції MS Excel =ПИРСОН() з відповідними аргументами і отримати такі значення $r_{y1} \approx 0,68$; $r_{y2} \approx 0,11$ і $r_{12} \approx –0,21$;

– у комірки B20 і B21 внести вирази =(B17-B18*B19)/(1-B19^2) і =(B18-B17*B19)/(1-B19^2), отримати значення $b_1 \approx 0,74$ і $b_2 \approx 0,27$;

– у комірки E20:E22 внести вирази =B20*B16/C16, =B21*B16/D16 і =B15-E20*C15-E21*D15, отримати значення коефіцієнтів множинної регресії $B_1 \approx 0,25$; $B_2 \approx 0,18$ і $B_0 \approx 1,97$;

	A	B	C	D	E
1	Емпіричні дані				Регресія
2	i	Y	X_1	X_2	$\tilde{Y}$
3	1	4	8	1	4,16
4	2	3	2	3	3,01
5	3	5	6	4	4,19
6	4	5	8	2	4,34
7	5	4	7	3	4,26
8	6	3	4	4	3,69
9	7	4	5	3	3,76
10	8	5	8	5	4,87
11	9	4	7	2	4,09
12	10	4	8	4	4,69
13	11	3	4	3	3,51
14	12	4	3	4	3,43
15	Середні	4,00	5,83	3,17	
16	Ст. відх.	0,74	2,17	1,11	
17	r_{y1} =	0,68			
18	r_{y2} =	0,11			
19	r_{12} =	-0,21			
20	b_1 =	0,74		B_1 =	0,25
21	b_2 =	0,27		B_2 =	0,18
22	$R_{y\text{-}1,2}$ =	0,73		B_0 =	1,97

Рис. 2.65. Параметри регресії та множинна кореляція $R_{y\text{-}1,2}$

– виконати у комірках E3:E14 розрахунки теоретичного значення $\tilde{Y}$ за рівнянням множинної регресії типу $\tilde{Y}=0,251 \cdot X_1+0,18 \cdot X_2+1,97$. Для цього у комірку E3 внести вираз =$E$20*C3+$E$21*D3+$E$22. Аналогічні вирази внести в комірки E4:E14;

– у комірку B22 внести вираз =КОРЕНЬ(B20*B17+B21*B18) і отримати значення коефіцієнта множинної кореляції $R_{y\text{-}1,2} \approx 0,73$.

	A	B	C	D	E
1	Емпіричні дані				Регресія
2	i	Y	X_1	X_2	$\tilde{Y}$
3	1	4	8	1	=$E$20*C3+$E$21*D3+$E$22
4	2	3	2	3	=$E$20*C4+$E$21*D4+$E$22
5	3	5	6	4	=$E$20*C5+$E$21*D5+$E$22
6	4	5	8	2	=$E$20*C6+$E$21*D6+$E$22
7	5	4	7	3	=$E$20*C7+$E$21*D7+$E$22
8	6	3	4	4	=$E$20*C8+$E$21*D8+$E$22
9	7	4	5	3	=$E$20*C9+$E$21*D9+$E$22
10	8	5	8	5	=$E$20*C10+$E$21*D10+$E$22
11	9	4	7	2	=$E$20*C11+$E$21*D11+$E$22
12	10	4	8	4	=$E$20*C12+$E$21*D12+$E$22
13	11	3	4	3	=$E$20*C13+$E$21*D13+$E$22
14	12	4	3	4	=$E$20*C14+$E$21*D14+$E$22
15	Середні	=СРЗНАЧ(B3:B14)	=СРЗНАЧ(C3:C14)	=СРЗНАЧ(D3:D14)	
16	Ст. відх.	=СТАНДОТКЛОН	=СТАНДОТКЛОН	=СТАНДОТКЛОН(D3:D14)	
17	r_{y1} =	=ПИРСОН(B3:B14;C3:C14)			
18	r_{y2} =	=ПИРСОН(B3:B14;D3:D14)			
19	r_{12} =	=ПИРСОН(C3:C14;D3:D14)			
20	b_1 =	=(B17-B18*B19)/(1-B19^2)		B_1 =	=B20*B16/C16
21	b_2 =	=(B18-B17*B19)/(1-B19^2)		B_2 =	=B21*B16/D16
22	$R_{y-1,2}$ =	=КОРЕНЬ(B20*B17+B21*B18)		B_0 =	=B15-E20*C15-E21*D15

Рис. 2.66. Формули для розрахунку регресії та множинної кореляції

Регресійне рівняння $\tilde{Y}$=0,251·X_1+0,18·X_2 +1,97 дає можливість прогнозування змінної Y за змінними X_1 і X_2. Наприклад, прогнозованими значеннями можуть бути такі: $\tilde{Y} \approx 2{,}83$ для X_1=2 і X_2=2 і $\tilde{Y} \approx 3{,}08$ для X_1=3 і X_2=2 та ін. Коефіцієнт множинної кореляції $R_{y-1,2} \approx 0{,}73$ свідчить про суттєвий прямий зв'язок між змінної Y, з одного боку, і змінними X_1 і X_2, з другого, проте оцінити вклад у кореляцію кожної змінної окремо не представляється можливим.

Запитання. Завдання.

1. Розкрийте ідею методів регресії як засобу прогнозування.
2. Охарактеризуйте прогнозуючі можливості одномірної лінійної регресії.
3. Охарактеризуйте прогнозуючі можливості множинної регресії.
4. Повторіть математичні процедури завдань за прикладами 2.10 – 2.11.
5. Виконайте лабораторну роботу № 7.

3. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Основним завданням математичної статистики є опис і пояснення імовірнісної поведінки об’єктів досліджень. Математична статистика вирішує це завдання вивченням *генеральної* сукупності за допомогою *вибіркової* сукупності – *вибірки*. Досліджуючи ту чи іншу вибірку, мають на увазі її *випадкову* (*імовірнісну*) природу, тобто вибірку розглядають як сукупність *випадкових значень*, що характеризує певні властивості генеральної сукупності. Для отримання випадкових значень організують *випробування* (іспити, спостереження тощо) при певних (відомих) умовах. Отже, оцінюючи генеральну сукупність за допомогою вибірки за її імовірнісними властивостями, ми постійно маємо справу із сукупністю набутих значень *випадкових подій*, отриманих у результаті *випробовувань.*

Враховуючи те, що властивості випадкових подій вивчає теорія ймовірностей, яка вважається теоретичною базою статистичних досліджень, розглянемо основні поняття і закономірності цієї галузі математичних знань.

Нагадаємо, що *сукупність* отриманих у випробуваннях *емпіричних значень випадкової величини* також називають *вибіркою*, яка підлягає статистичній обробці. Слово «емпірична» означає те, що статистичні обчислення проводяться за даними випробувань (дослідів або спостережень). З цієї ж причини для поняття «сукупність вибіркових значень» використовують термін «*вибіркова функція*» розподілу. Наприклад, у результаті повторних вимірювань деякої величини отримано n значень: x_1, x_2, … x_n. Ці значення природно вважати реалізацією набору з n незалежних однаково розподілених випадкових величин з невідомою *функцією розподілу* $F(x)$, властивості якої необхідно визначити, знайти.

Щоб оцінки були вірогідними, *вибірка* має бути *представницькою* (*репрезентативною*). Її імовірнісні властивості повинні збігатися або бути близькими до властивостей генеральної сукупності. Це можна досягти, якщо гарантувати всім об'єктам генеральної сукупності однакову ймовірність потрапити у вибірку.

3.1. ВИПРОБУВАННЯ ТА ПОДІЇ

Основні поняття і означення

З точки зору теорії ймовірностей дослідження властивостей *генеральної сукупності* шляхом вивчення властивостей *вибірки* виконують за допомогою моделювання ситуації *випадкових подій*, отриманих у результаті *випробувань*.

Випробування – це здійснення певних дій або умов, які можна відновити довільне число разів (наприклад, виконання студентами або учнями тесту).

Елементарна подія (ω) – можливий результат випробування (наприклад, результат виконання одного завдання: «виконано» – «не виконано», «1» – «0»). Поняття елементарної події належить до основних понять теорії ймовірностей і не визначається через інші простіші поняття.

Сформулюємо спочатку основні поняття алгебри подій, пов’язаних з випробовуваннями, на описовому рівні.

Сукупність усіх можливих елементарних подій $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ утворює **простір елементарних подій** $\Omega(\omega \in \Omega)$. Запис у дужках читається: «Елементи ω належать до простору Ω». У подальшому вважатиме, що простір елементарних подій Ω є величина скінчена.

Випадковою подією A називається всякий результат випробування, що може *відбутися* або *не відбутися*. Випадковою може бути як елементарна подія ω (наприклад, результат виконання студентом одного завдання), так і сукупність $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ із простору подій $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ (наприклад, виконання декількох m завдань із n запропонованих, де $m \leq n$). Для випадкової події A можна записати $A(\omega \in A)$, тобто елементи ω належать до події A. У свою чергу подія $A(A \in \Omega)$ належить до простору подій Ω.

Достовірною є подія V, яка у випробуванні неодмінно *повинна відбутися*.

Неможливою називається подія U, яка у випробуванні *не може відбутися*.

Подія $\overline{A}$ називається **протилежною** події A, якщо вона полягає в *непояві* події A.

Добутком $A \cdot B$ подій A і B називається подія C, що полягає в *спільній появі* і події A, і події B, тобто $C = A \cdot B$.

Сумою $A + B$ подій A і B називається подія C, що полягає в *появі хоча б однієї* з подій A або B, тобто $C = A + B$.

Події називаються **незалежними**, якщо настання однієї ніяким чином *не впливає* на появу іншої, інакше вони є **залежними**.

Події є **несумісними**, якщо в результаті випробовувань вони *не можуть відбутися одночасно* інакше вони вважаються **сумісними**. Ніякі дві несумісні події не можуть відбутися разом.

Повною групою подій називається така *сукупність попарно несумісних подій*, для якої їхня сума є *достовірною* подією Ω. Інакше кажучи, у результаті випробовувань для повної групи декількох подій *неодмінно повинна відбутися* хоча б одна з них.

Отже, першим кроком при побудові імовірнісної моделі реального явища є виокремлення у *випробуваннях* можливих як елементарних, так і складних випадкових *подій*, визначення їхніх властивостей (залежні – незалежні, сумісні – несумісні і т.п.), а також можливих результатів операцій над подіями (суми, добутку, доповнення та ін.). Проте, представлений вище понятійний апарат алгебри подій на описовому рівні не здатний до кількісної оцінки цих подій, а, значить, не дає коректної можливості у побудові імовірнісних моделей об'єктів реальності.

Прийнятий у сучасній математичній науці аксіоматичний підхід до теорії ймовірностей, розробником якого був Андрій Миколайович Колмогоров (1903-1987), базується на теорії множин. І хоча основи теорії ймовірностей було сформовано раніше (XVII-XVIII ст.), ніж створено теорію множин (в основному в XX ст.), остання дає можливість розглядати теорію ймовірностей і математичну статистику як невід'ємну частину математики, проводити докази, доводити теореми, формулювати означення на рівні математичної строгості. Проілюструємо основні операції над подіями за допомогою математичного апарату теорії множин.

Операції над подіями

Основні операції над подіями можна продемонструвати прикладами алгебри подій – *алгебри Буля* – у вигляді *діаграм Венна* (рис. 3.1).

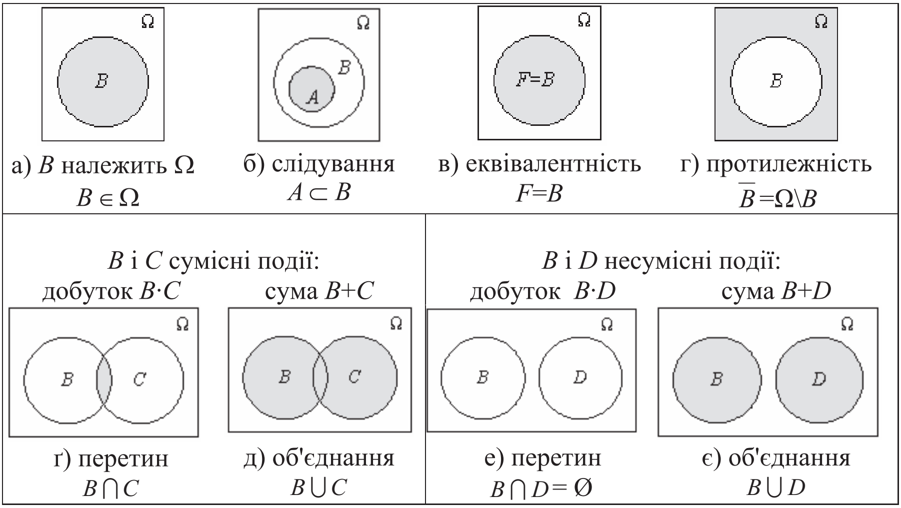


Рис. 3.1. Операції над подіями

З математичної точки зору події розглядаються як підмножини (A, B, C, ...) множини Ω елементарних подій ω. Отже, простір елементарних подій – це деяка множина Ω, а елементарні події – це її елементи ω.

Операції над подіями можна розглядати як операції над відповідними підмножинами, наприклад, підмножиною A і підмножиною B повної множини Ω елементарних подій ω.

Якщо в результаті випробувань відбувається елементарна подія ω, яка належить множині A, то стверджується, що подія A також відбулася.

Розглянемо основні операції над подіями з точки зору теорії множин.

Приклад 3.1. Задано простір елементарних подій (множина Ω) як сукупність натуральних чисел $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. У результаті випробувань зафіксовано низку подій. Події A, B, C, D і F як підмножини множини Ω включали такі елементи: $A=\{2,3\}$; $B=\{2,3,4,5\}$; $C=\{3,4,5,6\}$, $D=\{6,7,8,9\}$ і $F=\{2,3,4,5\}$. З’ясувати властивості основних операції алгебри подій.

Рішення:

а) за умовами прикладу всі елементи підмножини B={2,3,4,5} належать до множини Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. За аналогією до операцій над множинами це значить, що і відповідна подія B ***належить*** до простору подій Ω, тобто $B \in \Omega$ (рис. 3.1а);

б) усі елементи підмножини A={2,3} належать до підмножини B={2,3,4,5}, тому у разі появу події A відбуватиметься і подія B. У цій ситуації можна стверджувати, що у разі здійснення подія A спричинює появу події B. Таку операцію називають «***слідування***» і записують як $A \subset B$ (рис. 3.1б);

в) підмножини F і B складаються з однакових елементів: B={2,3,4,5} і F={2,3,4,5}. Це значить, що подія B завжди спричинює появу події F, тобто $B \subset F$. У свою чергу подія F спричинює появу події B, тобто $F \subset B$. Отже, події F і B еквівалентні. ***Еквівалентність*** подій записують як $F=B$ (рис. 3.1в);

г) подія $\overline{B}$, яка відбувається, коли не відбувається подія B, називається ***протилежною*** події B. *Протилежність* події B визначається як доповнення підмножини B, тобто $\overline{B} = \Omega \setminus B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} \ {2,3,4,5}={1, 6, 7, 8, 9}. Звідси $\overline{B}$={1, 6, 7, 8, 9} (зафарбована площа на рис. 3.1г);

ґ) ***добуток*** $B \cdot C$ подій B і C – це подія, що полягає в *спільній появі* і події B, і події C. *Добуток* подій визначається *перетином* відповідних множин B і C: $B \cap C$= {2,3,4,5} ∩ {5,6,7,8}={5}. Добуток подій $B \cdot C$ має місце, коли деякі підмножини елементарних подій належать як множині B, так і множині C (рис. 3.1г). У прикладі спільною підмножиною є елементарна подія ω ={5};

д) ***сума*** $B+C$ подій B і C – це подія, що полягає в появі хоча б однієї з подій або B, або C. *Сума* подій визначається операцією *об'єднання* відповідних множин B і C: $B \cup C$= {2,3,4,5} ∪ {5,6,7,8}={2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Отже сума подій $B+C$ має місце, коли відбувається хоча б одна якась елементарна подія ω з підмножини {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} (див. рис. 3.1д);

Добуток подій $B \cdot C$ і сума подій $B+C$, визначених вище за аналогією операцій теорії множин (рис. 3.1 ґ, д), мають місце для так званих *сумісних* подій B і C, які можуть відбуватися разом. Проте події, які в результаті випробовувань не можуть відбутися одночасно, є *несумісними*. Операції добутку несумісних подій $B \cdot D$ і суми цих подій $B+D$ продемонстровано на рис. 3.1е, є;

е) за умовами прикладу ***добуток*** несумісних подій $B \cdot D$ визначається *перетином* відповідних множин B і D: $B \cap D = \{2,3,4,5\} \cap \{6,7,8,9\} = \{\} = \varnothing$. В результаті отримаємо так звану *порожню* підмножину Ø, якій відповідає *неможлива* подія. Як бачимо з рис. 3.1е, підмножини B і D не мають спільних елементів – вони несумісні. Отже добуток несумісних подій $B \cdot C$ є *неможливою* подією;

є) ***сума*** $B + D$ несумісних подій B і D визначається *об'єднанням* відповідних множин B і D: $B \cup D = \{2,3,4,5\} \cup \{6,7,8,9\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Сума несумісних подій включає всі елементарні події кожної окремої події (рис. 3.1є).

Таким чином, операції над подіями можна розглядати як операції над відповідними підмножинами. Алгебра подій ізоморфно відтворюється на алгебрі множин. Однак у теорії ймовірностей для позначення власних понять використовуються свої терміни, які дещо відрізняються від термінів теорії множин. Відповідність між термінологічними рядами цих двох математичних дисциплін можна представити за допомогою табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Відповідність термінів теорії ймовірностей і теорії множин

Теорія ймовірностей	Теорія множин
Простір елементарних подій	Множина
Елементарна подія	Елемент цієї множини
Подія	Підмножина
Достовірна подія	Підмножина, що збігається з множиною
Неможлива подія	Порожня підмножина Ø
Подія, протилежна B	Доповнення B, підмножина $\overline{B}$
Сума $A+B$ подій A і B	Об'єднання $A \cup B$ підмножин A і B
Добуток $A \cdot B$ подій A і B	Перетин $A \cap B$ підмножин A і B
Події A і B несумісні	Перетин $A \cap B = \varnothing$, порожня підмножина
Події A і B сумісні	Перетин $A \cap B \neq \varnothing$, підмножина не порожня

Ймовірність подій

Випадкову подію можна передбачити лише з деякою ймовірністю.

Ймовірність події – це чисельна міра об'єктивної можливості цієї події (інтуїтивне означення ймовірності). Ймовірність події A позначається $P(A)$. Якщо здійснювати різноманітні випробування, то можна констатувати, що різні випадкові події можуть мати *різну можливість* появи.

Ймовірність неможливої події U дорівнює нулю, $P(U) = 0$.

Ймовірність достовірної події V дорівнює одиниці, $P(V) = 1$.

Отже, ймовірність $P(A)$ будь-якої випадкової події A знаходиться між нулем і одиницею: $0 \le P(A) \le 1$.

Інколи події можна вважати *рівноможливими*, якщо за умовами випробувань відсутні підстави вважати деякі з них більш можливими, аніж будь-які інші. Якщо декілька подій: 1) утворюють повну групу; 2) несумісні; 3) рівноможливі, то вони мають назву «*випадки*».

Класична ймовірність події A – це число $P(A)$, до якого наближається відношення *кількості появлень бажаної події A* до *загальної кількості можливих подій* вибіркового простору при збільшенні незалежно виконаних випробовувань:

$$P(A) = \frac{кількість\_появлень\_бажаної\_події\_A}{загальна\_кількість\_можливих\_подій}. \qquad (3.1)$$

Якщо результати досліду зводяться до схеми *випадків*, то ймовірність події A обчислюється як відносна частота здійснення події A:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (3.2)$$

де m – кількість появлень бажаних випадків або сприятливих подій;

n – загальна кількість випадків.

Отже, для випадкової вибірки обсягом n відносні частоти $f_i(x_i)=m_i/n$ можна трактувати як ймовірності $p_i(x_i)$ появи значень варіант x_i.

Приклад 3.2. Знайти чисельне значення ймовірності $P(A)$ події A, що студент на іспитах з 20 рівноможливих білетів (це загальна кількість випадків) витягне з першого разу білет №7 (бажаний вибірковий об’єкт).

Рішення: Кількість появлень бажаних подій m=1, загальна кількість випадків n=20. Значення ймовірності $P(A)$ події A – це відношення m / n:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\% .$$

Відповідь: ймовірність витягти з першого разу білет №7 складає 0,05 або 5%.

Приклад 3.3. Студент знає відповідь лише на 5 екзаменаційних білетів і не знає відповіді на решту 15 білетів. Яка ймовірність того, що перший витягнутий навмання білет виявиться таким, на який студент знає відповіді?

Рішення: Загальна кількість білетів складає 5+15=20 (n=20), сприятливих для студента результатів всього 5 (m=5). Звідси ймовірність бажаної події:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{20} = 0{,}25 = 25\%$$

Відповідь: ймовірність витягти бажаний білет складає 0,25 або 25%.

Отже, ймовірність події є основним поняттям теорії ймовірності, проте розглянуті класичні означення ймовірностей, а також наведені приклади дають лише загальне інтуїтивне уявлення щодо оцінки та прогнозування ймовірності. Ці методологічні підходи не дають строгих чисельних значень. Не всі події можна вважати рівноможливими, не всі ймовірності можна оцінювати як збіжності частот, неясно і те, скільки випробовувань треба здійснювати та ін.

Розглянемо означення ймовірності у рамках *аксіоматичного підходу* до математичної моделі, що була запропонована А.М. Колмогоровим.

Означення. ***Ймовірність***. Нехай скінчена множина $\Omega=\{\omega\}$ є простором елементарних подій ω, що відповідають деякому стохастичному[9] дослідові. Нехай кожній елементарній події ω, яка належить до множині Ω, тобто $\omega \in \Omega$, поставлено у відповідність невід'ємне число $P(\omega)$, тобто $P(\omega)\geq 0$. Число $P(\omega)$ означимо як *імовірність* елементарної події ω, причому сума ймовірностей всіх елементарних подій дорівнює 1, тобто:

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1 . \qquad (3.3)$$

Пара $\{\Omega, P\}$ є *імовірнісним простором*, який складається зі скінченої

[9] Стохастичний (від грец. stochastikos – спроможний угадувати), випадковий, імовірнісний.

множини Ω і невід’ємної функції *P*, яка визначена на множині Ω і задовольняє умові (3.3). Звідси *ймовірність* $P(A)$ деякої події *A* дорівнює сумі ймовірностей елементарних подій ω, що входять до події *A*:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega). \qquad (3.4)$$

Тоді будь-яку числову функцію $P(A)$, визначену на скінченій множині $\Omega=\{\omega\}$, яка є простором елементарних подій ω, називають *імовірністю*, якщо виконуються три умови (аксіоми Колмогорова):

1) $P(A) \geq 0$ для будь-якої $A \in \Omega$;
2) $P(\Omega)=1$;
3) $P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup ...) = P(A_1)+ P(A_2)+ P(A_3)+...$ для попарно несумісних випадкових подій ($A_i \bigcap A_j = \varnothing$, $i \neq j$).

Отже, сконструйовано математичний об’єкт, який можна застосовувати при побудові *імовірнісних* моделей. Наприклад, випробуванням з підкиданням монети відповідає *імовірнісний простір* $\{\Omega, P\}$, де $\Omega = \{Г,Ц\}$ – *множина* елементарних подій; $P(Г) = P(Ц) = ½$ – *ймовірності* елементарних подій; позначення елементарних подій: *Г* – «випав герб», *Ц* – «випала цифра».

Аксіоматичне означення ймовірності $P(A)$ погодиться з інтуїтивним, згідно з яким ймовірність події *A* – це число від 0 до 1, що є збігом частоти реалізації події *A* при необмеженому числі повторень і постійних умовах випробувань.

З визначення імовірності події, а також умов (3.3) і (3.4) випливають інші властивості ймовірностей:

4) Для будь-якої події *A* ймовірність *протилежної* події $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

5) Сума ймовірностей *протилежних* подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

6) Ймовірність *достовірної* події $P(\Omega) = 1$ (за аксіомою 2).

7) Ймовірність *неможливої* події $P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

8) Ймовірність *добутку A·B сумісних* подій *A* і *B*: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. З діаграми рис. 3.2а видно, що сумісні події *A* і *B* мають загальну (сумісну) площу

подій (зафарбована площа), тому *ймовірність добутку сумісних* подій $P(A \cdot B) > 0$.

9) Ймовірність *суми $A+B$ сумісних* подій A і B визначається формулою: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, де $P(A \cdot B)$ – ймовірність добутку подій A і B. З діаграми рис. 3.2б видно, що події A і B мають сумісну площу подій, яка менша за суму окремо взятих подій A і B на величину добутку $A \cdot B$ подій A і B. Відповідно *ймовірність суми сумісних* подій $P(B+C) < P(B) + P(C)$.

а) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ б) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Рис. 3.2. Ймовірності добутку і суми *сумісних* подій A і B

10) Ймовірність *добутку $A \cdot B$ несумісних* подій A і B *дорівнює нулю*. З діаграми рис. 3.3а видно, що несумісні події A і B не мають спільної площі, перетин відповідних підмножин є порожня множина Ø подій, тому *ймовірність добутку несумісних* подій $P(A \cdot B) = 0$.

11) Ймовірність *суми $A+B$ несумісних* подій A і B визначається спрощеною формулою: $P(A+\mathrm{B}) = P(A) + P(B)$. З діаграми рис. 3.3б видно, що події A і B не мають спільної площі подій, яка б зменшувала загальну суму окремо взятих подій B і C.

а) $P(A \cdot B) = 0$ б) $P(A+\mathrm{B}) = P(A) + P(B)$.

Рис. 3.3. Ймовірності добутку і суми *несумісних* подій A і B

12) Сума ймовірностей всіх несумісних подій $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці

$$P(A_1) + P(A_2) +, \dots, + P(A_n) = 1 \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

При застосуванні методів теорії ймовірностей і математичної статистики використовується поняття *незалежності* подій. Події *A*, *B*, C, ... є *незалежними*, якщо ймовірність їхнього спільного здійснення дорівнює добуткові ймовірностей здійснення кожної з них окремо: $P(A \cdot B \cdot C...) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)...$.

Згідно з цим означенням здійснення або нездійснення однієї незалежної події не повинне впливати на здійснення або нездійснення іншої. Наприклад, у випробуваннях при незалежному підкиданні двох монет простір елементарних подій складається з чотирьох елементів: *ГГ*, *ГЦ*, *ЦГ*, *ЦЦ* (позначення елементарних подій: *ГГ* – для першої монети випав герб і для другої – теж герб; *ЦГ* – для першої – цифра, для другої – герб і т.д.). Оскільки події типу «*Г* – для першої монети випав герб» і «*Г* – для другої монети випав герб» є незалежними за визначенням незалежних випробувань, і ймовірність кожного з них дорівнює ½, то ймовірність події *ГГ* дорівнює ½ · ½ = ¼. Аналогічно ймовірність кожного з інших елементарних подій також дорівнює ¼. Звідси сума ймовірностей всіх чотирьох елементарних подій дорівнюватиме одиниці.

Умовна ймовірність

Якщо подія *A* відбувається у випробувані, яке обмежене додатковими умовами здійснення події *B*, то міра можливості події *A* визначається *умовною ймовірністю* $P(A \mid B)$. Отже, **умовною ймовірністю** $P(A \mid B)$ називається ймовірність події *A*, обчислена за умови, що подія *B* вже відбулася.

Умовна ймовірність має сенс для *залежних* подій. Для *незалежних* подій *A* і *B* умовна ймовірність перетворюється на звичайну:

$$P(A \mid B) = P(A), \quad \text{або} \quad P(B \mid A) = P(B).$$

Отже *незалежні* події (за означенням) не змінюють ймовірності появи іншої.

Ймовірність *добутку залежних подій A* і *B* визначається за формулою:

$$P(A \cdot B) = P(A \mid B) \cdot P(B). \tag{3.5}$$

Умовна ймовірність $P(A|B)$ як ймовірність здійснення події *A* за умови, що подія *B* відбулася, тобто $P(B) > 0$, визначається з (3.5):

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}. \tag{3.6}$$

Для *незалежних* подій формула спрощується і приймає вже відомий вигляд:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Приклад 3.4. В академічній групі 15 хлопців і 10 дівчат. Яка ймовірність того, що двоє навмання і підряд вибраних студентів виявляться дівчатами?

Рішення: Загальна бажана подія A (вибір навмання двох студентів-дівчат) складається з добутку двох подій: B_1 (випадковий вибір однієї дівчини) і B_2 (випадковий вибір ще однієї дівчини), тобто $P(A) = P(B_1 \cdot B_2)$. Ймовірність події B_1 – $P(B_1)$. Настання події B_2 відбувається після події B_1 і оцінюється умовною ймовірністю $P(B_2 \mid B_1)$. Ймовірність добутку залежних подій B_1 і B_2 дорівнює: $P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1)$.

Ймовірність події B_1 визначається як відношення кількості дівчат (10) до загальної кількості студентів (10+15), тобто $P(B_1) = \dfrac{10}{10+15} = 0{,}4$.

Настання події B_1 змінює умови для оцінки ймовірності події B_2, а саме: зменшується і кількість дівчат (10–1)=9, і загальна кількість студентів (9+15)=24. Тоді ймовірність події B_2 як відношення кількості дівчат (9) до загальної кількості студентів (24) дорівнюватиме $P(B_2 \mid B_1) = \dfrac{9}{9+15} = 0{,}375.$

Звідси ймовірність $P(A)$ події A складатиме

$$P(A) = P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) = 0{,}4 \cdot 0{,}375 = 0{,}15 = 15\%.$$

Відповідь: ймовірність вибору навмання двох студентів-дівчат становить 15%.

Формула повної ймовірності

Припустимо, що простір подій (множина Ω) складається з n попарно несумісних подій – підмножин $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ (див. рис. 3.4).

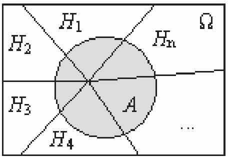


Рис. 3.4. Простір подій $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \in \Omega$

З рис. 3.4 видно, що подію A можна уявити як суму добутків події A і кожної з подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (сума перетинів підмножин A з підмножинами H_i):

$$A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \ldots + A \cdot H_n = \sum_{i=1}^{n} A \cdot H_i .$$

Ймовірність події A (за теоремою додавання ймовірностей) визначиться

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cdot H_i) .$$

Ймовірність події A (за теоремою множення ймовірностей) визначиться:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i) \cdot P(H_i) . \qquad (3.7)$$

Вираз (3.7) є **формулою повної ймовірності** $P(A)$ події A, якщо подія A залежить від системи подій. Події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ прийнято називати гіпотезами, за якими може відбутися подія A.

Приклад 3.5. У трьох групах студентів (чисельністю 28, 20 і 25 осіб) відмінники становлять 7, 2 і 5 студентів відповідно. Яка ймовірність того, що навмання вибраний студент є відмінником?

Рішення: Простір подій (множина Ω) складається з 3-х попарно несумісних подій – підмножин H_1, H_2, H_3 (див. рис. 3.5). Подія A – це результат випробування – вибору навмання студента-відмінника з ймовірністю $P(A)$.

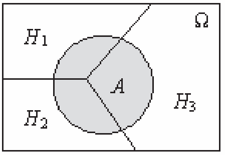


Рис. 3.5. Простір подій $\{H_1, H_2, H_3\} \in \Omega$

Ймовірність $P(A)$ розраховується за формулою повної ймовірності (n=3):

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A \mid H_i) \cdot P(H_i) = P(A \mid H_1) \cdot P(H_1) + P(A \mid H_2) \cdot P(H_2) + P(A \mid H_3) \cdot P(H_3).$$

Ймовірність гіпотези H_1 (події про те, що відмінник вибраний з 1-ї групи):

$$P(H_1) = \frac{28}{28 + 20 + 25} = \frac{28}{73} \approx 0{,}38 .$$

Ймовірність гіпотези H_2 (події про те, що відмінник вибраний з 2-ї групи):

$$P(H_2) = \frac{20}{28+20+25} = \frac{20}{73} \approx 0{,}27\,.$$

Ймовірність гіпотези H_3 (події про те, що відмінник вибраний з 3-їгрупи):

$$P(H_3) = \frac{25}{28+20+25} = \frac{25}{73} \approx 0{,}34\,.$$

Умовні ймовірності події A для кожної гіпотези розраховуються як:

$$P(A\,|\,H_1) = \frac{7}{28} = 0{,}25\,; \quad P(A\,|\,H_2) = \frac{2}{20} = 0{,}10\,; \quad P(A\,|\,H_3) = \frac{5}{25} = 0{,}20\,.$$

За формулою повної ймовірності $P(A)$ розраховується як:

$P(A) = P(A\,|\,H_1)\cdot P(H_1) + P(A\,|\,H_2)\cdot P(H_2) + P(A\,|\,H_3)\cdot P(H_3)$ або

$$P(A) = 0{,}25\cdot 0{,}38 + 0{,}10\cdot 0{,}27 + 0{,}20\cdot 0{,}34 \approx 0{,}095 + 0{,}027 + 0{,}068 \approx 0{,}19\,.$$

Відповідь: ймовірність $P(A)$ події A про те, що навмання вибраний з трьох груп студент є відмінником, складає приблизно 0,19 або 19%.

Приклад 3.6. В академічній групі з 10 студентів, що прийшли на екзамен, 3 студенти підготовлені відмінно, 4 – добре, 2 – задовільно і 1 – погано. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 20 питань, добре підготовлений – на 16, задовільно – на 10 питань, погано – на 5 питань. Яка ймовірність того, що навмання викликаний з цієї групи студент відповість на два заданих питання?

Рішення: Простір подій (множина Ω) складається з 4-х несумісних подій – підмножин H_1, H_2, H_3, H_4 (див рис. 3.6).

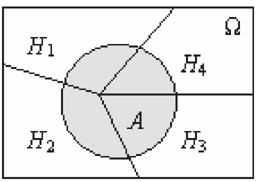


Рис. 3.6. Простір подій $\{H_1, H_2, H_3, H_4\} \in \Omega$

Подія A – це результат випробування – вибору навмання студента, який успішно відповість на два заданих питання. $P(A)$ – ймовірність цієї події розраховується за формулою повної ймовірності (n=4):

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(A\,|\,H_i)\cdot P(H_i)\,.$$

Висуваємо чотири гіпотези щодо ймовірності появи (у результаті виклику навмання) того чи іншого студента з певною підготовкою:

– *гіпотеза* H_1 : це буде студент, що підготовлений *відмінно*, ймовірність його появи $P(H_1)$ = 3/10 = 0,3;

– *гіпотеза* H_2 : це буде студент, що підготовлений *добре*, ймовірність його появи $P(H_2)$ = 4/10 =0,4;

– *гіпотеза* H_3 : це буде студент, що підготовлений *задовільно*, ймовірність його появи $P(H_3)$ = 2/10 = 0,2;

– *гіпотеза* H_4 : це буде студент, що підготовлений *погано*, ймовірність його появи $P(H_4)$ = 1/10 = 0,1.

Умовні ймовірності виконання двох завдань студентів з певною підготовкою розраховуються як ймовірності *добутку* двох залежних подій (подій успішного виконання двох завдань). Згідно з теоремою множення:

– умовна ймовірність виконання двох завдань студентом, що підготовлений *відмінно*, дорівнюватиме $P(A|H_1)$ = (20/20)·(19/19) = 1;

– умовна ймовірність виконання двох завдань студентом, що підготовлений *добре*, дорівнюватиме $P(A|H_2)$ = (16/20)·(15/19) ≈ 0,63;

– умовна ймовірність виконання двох завдань студентом, що підготовлений *задовільно*, дорівнюватиме $P(A|H_3)$ = (10/20)·(9/19) ≈ 0,24;

– умовна ймовірність виконання двох завдань студентом, що підготовлений *погано*, дорівнюватиме $P(A|H_4)$ = (5/20)·(4/19) ≈ 0,053.

За формулою повної ймовірності $P(A)$ розраховується як:

$$P(A)=P(A\,|\,H_1)\cdot P(H_1)+P(A\,|\,H_2)\cdot P(H_2)+P(A\,|\,H_3)\cdot P(H_3)+P(A\,|\,H_4)\cdot P(H_4)$$

або

$P(A)$ = 1·0,3+0,63·0,4+0,24·0,2+0,053·0,1 ≈ 0,605 ≈ 60,5%.

Відповідь: ймовірність $P(A)$ події A про те, що викликаний навмання студент відповість на два заданих питання, складає приблизно 0,605 або 60,5%.

Формула Байєса

Формула повної ймовірності дає можливість розрахувати ймовірність $P(A)$ події A, якщо вона залежить від системи подій-гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$, за умовними ймовірностями яких $P(A|H_1)$, $P(A|H_2)$, … , $P(A|H_n)$ може відбутися ця подія A. Проте важливим завданням математики є розрахунки умовної ймовірності $P(H_i \mid A)$ гіпотези H_i, якщо відомо, що у випробуванні подія A вже відбулася. Згідно з теоремою множення ймовірностей можна записати

$$P(H_i \cdot A) = P(H_i) \cdot P(A \mid H_i) = P(A) \cdot P(H_i \mid A).$$

Звідси

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}. \tag{3.8}$$

Якщо знаменник $P(A)$ замінити формулою повної ймовірності (3.7), отримаємо **формулу Байєса**:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}, \tag{3.9}$$

де $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – попарно несумісні події, що утворюють повну групу.

Формула Байєса дає можливість підрахувати «апостеріорні»[10] ймовірності $P(H_i | A)$ за допомогою «апріорних»[11] ймовірностей $P(H_i)$ «гіпотез» H_i .

Приклад 3.7. За умовами прикладу 3.6 викликаний навмання студент відповів на три заданих питання. Яка ймовірність того, що цей студент є: а) відмінно підготовлений; б) підготовлений погано?

Рішення: Висуваємо чотири гіпотези щодо ймовірності появи (у результаті виклику навмання) того чи іншого студента з певною підготовкою:

– *гіпотеза H_1* : це був студент, що підготовлений *відмінно*, ймовірність його появи $P(H_1) = 3/10 = 0{,}3$;

– *гіпотеза H_2* : це був студент, що підготовлений *добре*, ймовірність його появи $P(H_2) = 4/10 = 0{,}4$;

---

[10] *a posteriori* (лат.) – на основі досліду.

[11] *a priori* (лат.) – до досліду.

– *гіпотеза* H_3 : це був студент, що підготовлений *задовільно*, ймовірність його появи $P(H_3) = 2/10 = 0{,}2$;

– *гіпотеза* H_4 : це був студент, що підготовлений *погано*, ймовірність його появи $P(H_4) = 1/10 = 0{,}1$.

Умовні ймовірності виконання трьох завдань того чи іншого студента з певною підготовкою розраховуються як ймовірності *добутку* трьох залежних подій (успішного виконання трьох завдань). Згідно з теоремою множення:

– умовна ймовірність виконання трьох завдань студентом, що підготовлений *відмінно*, дорівнюватиме $P(A|H_1) = (20/20)\cdot(19/19)\cdot(18/18) = 1$;

– умовна ймовірність виконання трьох завдань студентом, що підготовлений *добре*, дорівнюватиме $P(A|H_2) = (16/20)\cdot(15/19)\cdot(14/18) \approx 0{,}491$;

– умовна ймовірність виконання трьох завдань студентом, що підготовлений *задовільно*, дорівнюватиме $P(A|H_3) = (10/20)\cdot(9/19)\cdot(8/18) \approx 0{,}105$;

– умовна ймовірність виконання трьох завдань студентом, що підготовлений *погано*, дорівнюватиме $P(A|H_4) = (5/20)\cdot(4/19)\cdot(3/18) \approx 0{,}009$.

За формулою *Байєса*:

а) ймовірність того, що це був студент, підготовлений *відмінно*, складає

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)},$$

або $P(H_1 \mid A) = \dfrac{0{,}3 \cdot 1}{0{,}3 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 0{,}491 + 0{,}2 \cdot 0{,}105 + 0{,}1 \cdot 0{,}009} \approx 0{,}58 \approx 58\%$;

б) ймовірність того, що це був студент, підготовлений *погано*, складає

$$P(H_2 \mid A) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}009}{0{,}3 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 0{,}491 + 0{,}2 \cdot 0{,}105 + 0{,}1 \cdot 0{,}009} \approx 0{,}002 \approx 0{,}2\%.$$

Відповідь: ймовірність того, що на всі три питання дав відповідь *відмінно* підготовлений студент, дорівнює 58%, у той час як ймовірність для *погано* підготовленого складає лише 0,2%. Отриманий результат також може означати, що процедура іспиту за даними критеріями має доволі високий рівень діагностичних властивостей – порівняйте 58% для *відмінника* і 0,2% для *погано* підготовленого студента.

Елементи комбінаторики

Для рішення завдань теорії ймовірностей і математичної статистики важливе значення мають такі математичні поняття комбінаторики, як *перестановка, розміщення* і *комбінація.*

Перестановкою з m різних елементів називають такий об’єкт, який складається з цих самих m елементів. Кількість P_m таких об’єктів-перестановок, які відрізняються один від одного лише місцем розташування своїх елементів, розраховується за формулою:

$$P_m = m!, \tag{3.10}$$

де $m!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$ – *факторіал числа* m (проте $0!=1$).

Наприклад, для трьох об'єктів a, b, c ($m=3$) кількість перестановок дорівнює $3!=1 \cdot 2 \cdot 3=6$, а саме такі перестановки:

$$a\,b\,c\,;\; a\,c\,b\,;\; b\,a\,c\,;\; b\,c\,a\,;\; c\,a\,b\,;\; c\,b\,a\,.$$

Розміщенням з n елементів по m називають такий об’єкт, який складається з m елементів, вибраних з n елементів. Причому розміщення з однакових елементів, але з різними місцями їх розташування, вважаються різними. Кількість об’єктів-розміщень A_n^m розраховується за формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) \quad \text{або} \quad A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{3.11}$$

Наприклад, для трьох об'єктів a, b, c ($n=3$) кількість розміщень по два об'єкти ($m=2$) буде дорівнювати $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$, а саме такі розміщення:

$$a\,b\,;\; b\,a\,;\; a\,c\,;\; c\,a\,;\; b\,c\,;\; c\,b.$$

Комбінацією з n елементів по m називають такий об’єкт, який складається з m елементів, вибраних з n елементів. Проте об’єкти-комбінації відрізняються між собою хоча б одним елементом. Кількість таких об’єктів C_n^m розраховується за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{або} \quad C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}. \tag{3.12}$$

Наприклад, для трьох об'єктів a, b, c ($n=3$) кількість комбінацій по два об'єкти ($m=2$) буде дорівнювати:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3, \text{ а саме: } a\,b\,;\ a\,c\,;\ b\,c\,.$$

Отже, значення C_n^m (кількість комбінацій з n елементів по m) менше за A_n^m (кількість розміщень з n елементів по m) у P_m разів, тобто між поняттями комбінаторики існує співвідношення:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}. \qquad (3.13)$$

Приклад 3.8. Яка ймовірність того, що у випробовуванні з випадковим витягуванням шести карток-літер «Е», «П», «Р» і т.д. можна скласти навмання слово «ПРОЦЕС»?

Рішення: Випробовування полягає в витягуванні у випадковій послідовності карток з літерами без повернення. Подія A отримання слова «ПРОЦЕС» є елементарною подією серед перестановок з 6 літер. Кількість перестановок для $n=6$ визначається як P_m:

$$P_m = n! = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Звідси ймовірність бажаної події є $P(A) = \dfrac{1}{720} \approx 0{,}0014 \approx 0{,}14\%$.

Відповідь: ймовірність скласти навмання слово «ПРОЦЕС» з шести відповідник карток-літер дорівнює 0,14%.

Приклад 3.9. Яка ймовірність скласти навмання слово «МАТЕМАТИКА» з десяти окремих карток-літер?

Рішення: Подія A отримання слова «МАТЕМАТИКА» є елементарною подією перестановок з 10 літер, кількість яких визначається як $n!=10!=3628800$. Проте деякі літери повторюються («М» – 2 рази, «А» – 3 рази, «Т» – 2 рази), тому існують перестановки, які не змінюють слова.

Для літери «М» кількість перестановок, що не змінюють слова буде $2!=1 \cdot 2=2$; для літери «А» – $3!=1 \cdot 2 \cdot 3=6$; для літери «Т» – $2!=1 \cdot 2=2$. Загальна кількість перестановок, що не змінюють слова буде $m=2! \cdot 3! \cdot 2!=1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2=24$.

Звідси ймовірність бажаної події є $P(A) = \dfrac{24}{3628800} \approx 0{,}0000066 \approx 0{,}0007\%$.

Відповідь: ймовірність скласти навмання слово МАТЕМАТИКА дорівнює близько 0,0007%.

Приклад 3.10. Залікове завдання містить 5 питань, на кожне з яких пропонуються дві альтернативні відповіді «ТАК» і «НІ». Правильна відповідь на одне питання оцінюється у 1 бал, неправильна – у 0 балів. Яка ймовірність, відповідаючи навмання, скласти залік, тобто отримати не менш 4-х балів?

Рішення: Подія A успішного складання заліку – це отримання 4-х або 5-ти балів з 5-ти можливих. Ймовірність цієї події $P(\text{A}) = P(4)+P(5)$. Залікове випробування містить п’ять елементарних випробувань. Якщо відповідати навмання, то ймовірності кожної бажаної $p(1)$ і кожної небажаної $p(0)$ елементарної події однакові і дорівнюють по ½, тобто $p(1) = p(0) = ½ = 0{,}5$.

Звідси ймовірності отримання:

4 бали – $P(4)=p(1)\cdot p(1)\cdot p(1)\cdot p(1)\cdot p(0)\cdot C_5^{\,4} = 0{,}5^5\cdot 5 = 5/32 = 0{,}15625 = 15{,}625\%$;

5 балів – $P(5)=p(1)\cdot p(1)\cdot p(1)\cdot p(1)\cdot p(1)\cdot C_5^{\,5} = 0{,}5^5\cdot 1 = 1/32 = 0{,}03125 = 3{,}125\%$.

Загальна ймовірність складання заліку $P(A) = 15{,}625\% + 3{,}125\% = 18{,}75\%$.

Відповідь: Згідно умовам ймовірність скласти залік, відповідаючи навмання на 5 питань завдання, дорівнює 18,75% (проте, ймовірність не скласти залік дорівнює 1 – 18,75% = 81,25%).

Запитання. Завдання.

1. Розкрийте означення понять «випробування», «елементарна подія», «простір елементарних подій», «повна група подій», «випадкова подія».

2. Які події називають неможливими і достовірними, незалежними і залежними?

3. Які події називають сумісними і несумісними?

4. Назвіть і охарактеризуйте основні типи операцій над подіями (слідування, еквівалентність, доповнення, добуток, сума).

5. Що таке «ймовірність події» і як визначається класична ймовірність?

6. Які значення мають ймовірності неможливих і достовірних подій?

7. Наведіть формулу для розрахунку суми та добутку ймовірностей сумісних і несумісних подій.

8. За якими формулами розраховують такі елементи комбінаторики, як перестановка, розміщення і комбінація?

9. Сформулюйте означення ймовірності у рамках аксіоматичного підходу.

10. Охарактеризуйте три аксіоми Колмогорова.

11. Що таке «умовна ймовірність»?

12. Наведіть формулу повної ймовірності.

13. Наведіть і поясніть формулу Байєса.

14. Повторіть математичні процедури завдань за прикладами 3.1 – 3.9.

3.2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Розподіли випадкових величин

Випадкова величина – це величина, яка в результаті випробувань може приймати певні *значення* (із сукупності своїх значень) з певною *ймовірністю*. Випадковою можна назвати будь-яку (не обов'язково чисельну) змінну X, значення якої x створюють множину випадкових елементарних подій $\{x\}$.

Розрізняють *дискретну* і *неперервну* випадкові величини.

Дискретною випадковою величиною називається випадкова величина, що приймає скінчене число значень з множини, елементи якої можна пронумерувати. **Неперервною** випадковою величиною називається випадкова величина, можливі значення якої неперервно заповнюють деякий інтервал.

Рядок розподілу дискретної випадкової величини X може бути представлений як у табличній формі – у вигляді таблиці, де перераховано *значення* випадкової величини x_1, x_2, ..., x_n з відповідними до них *ймовірностями* p_1, p_2, ..., p_n (див. табл. 3.2), так і у вигляді графічного зображення (рис. 3.7).

Таблиця 3.2

Рядок розподілу дискретної випадкової величини X

Значення (x_i)	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Ймовірності (p_i)	p_1	p_2	p_3	…	p_n

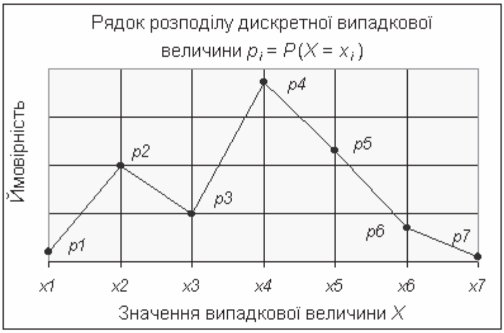


Рис. 3.7. Графік розподілу дискретної
випадкової величини X

Рядок розподілу може мати аналітичну форма представлення, наприклад:

$$f(X) = \begin{cases} p_1, & X = x_1; \\ p_2, & X = x_2; \\ p_3, & X = x_3; \\ p_4, & X = x_4; \\ p_5, & X = x_5; \\ p_6, & X = x_6; \\ p_7, & X = x_7. \end{cases}$$

В загальному вигляді це можна записати як $f(X) = P(X{=}x)$ – значення функції $f(X)$ дорівнює ймовірності $P(X{=}x)$ того, що змінна X приймає значення x.

За аналогією з випадковими подіями, можна вважати, що простором елементарних випадкових значень x_1, x_2, ..., x_n змінної X є скінчена множина цих значень $\Omega=\{x\}$. Кожному елементарному значенню x_1, x_2, ..., x_n, яке належить до множини Ω, поставлено у відповідність невід'ємне число – ймовірності p_1, p_2, ..., p_n, тобто $p_i = P(X = x_i) \geq 0$, причому сума ймовірностей появи всіх елементарних значень змінної X дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (3.14)$$

Отже, пару $\{\Omega, P\}$ можна вважати *імовірнісним простором*, який складається зі скінченої множини значень Ω змінної X і невід'ємної функції P, яка визначена на множині значень Ω і задовольняє умові (3.14).

Якщо емпіричні дані є результат статистичних випробувань, то емпіричний розподіл частот можна також трактувати як розподіл випадкової величини – співвідношення можливих *значень* з відповідними *ймовірностями* їхньої появи. Оскільки *класичні ймовірності* збігаються з *відносними частотами* (див. поняття класичної ймовірності), то розподіли частот можна представляти як відповідні розподіли випадкових величин, проте, лише за певними умовами і обмеженнями (мова про них йтиме нижче).

Розглянемо на прикладі побудову розподілу дискретної випадкової величини.

Приклад 3.11. Розрахувати розподіл кількості виконаних завдань за результатами тестування навмання відібраної з академічного потоку вибірки студентів обсягом 20 осіб (табл. 3.3).

Таблиця 3.3

Кількість виконаних завдань

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
x_i	4	2	6	3	5	4	5	4	1	5
i	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
x_i	5	3	5	4	6	3	4	2	5	3

Послідовність рішення:

- представити емпіричні дані табл. 3.3 значеннями x_i і відповідними абсолютними частотами m_i виконання завдань. Частоти розрахувати за будь-яким відомим методом і внести у комірки A3:C9. Сума абсолютних частот повинна скласти обсяг вибірки, тобто $\sum_{i=1}^{7} m_i = 20$ (див. комірку C10 рис. 3.8);
- для розрахунку ймовірностей $p'_i = P(X = x_i)$ внести в комірку D3 вираз

=C3/$C$10, аналогічні вирази внести у комірки D4:D9;

- розрахувати в комірках E3:E9 ймовірності $p_i = P(X \le x_\mathrm{i})$;
- побудувати графіки розподілу ймовірностей (рис. 3.9).

	A	B	C	D	E
1	Емпіричні дані			Ймовірність	
2	i	x_i	m_i	$p'_\mathrm{i} = P(X = x_\mathrm{i})$	$p_\mathrm{i} = P(X \le x_\mathrm{i})$
3	1	0	0	0,00	0,00
4	2	1	1	0,05	0,05
5	3	2	2	0,10	0,15
6	4	3	4	0,20	0,35
7	5	4	5	0,25	0,60
8	6	5	6	0,30	0,90
9	7	6	2	0,10	1,00
10	Сума:		20	1,00	

Рис. 3.8. Розрахунки розподілу дискретної величини

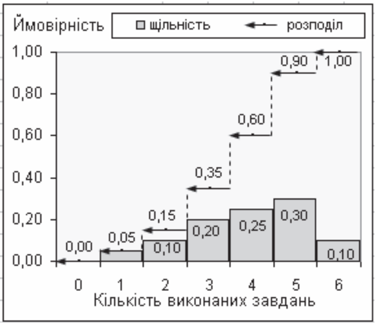


Рис. 3.9. Графіки функцій розподілу дискретної величини

Отже, у таблиці рис. 3.8 розраховано розподіли ймовірностей дискретної змінної X (кількості виконаних завдань) $p'(x) = P(X = x)$ і $p(x) = P(X \le x)$, на рис. 3.9 зображено відповідні графіки.

Сукупність ймовірностей $p'_i = P(X = x_\mathrm{i})$ має назву *щільності розподілу* змінної X (див. стовпчик D рис. 3.8 і гістограму рис. 3.9). Кожне окреме значення щільності розподілу визначає ймовірність p'_i кожного окремого значення x_i змінної X , тобто $P(X = x_\mathrm{i})$. Сума ймовірностей p'_i усіх елементарних значень x_i змінної X (за умови повної системи випадкових значень) дорівнює одиниці, тобто $\sum_{i=1}^{n} p'_i = 1$. Як бачимо з рис. 3.8 (див. комірку D10), ця вимога виконується: 0,00+0,05+0,10+0,20+0,25+0,30+0,10=1,00.

Сукупність ймовірностей $p_\mathrm{i} = P(X \le x_\mathrm{i})$ має назву *розподілу* змінної X (див. стовпчик E рис. 3.6 і дискретний графік рис. 3.7 у вигляді сходинок з насиченням до 1,00). Розподіл випадкової величини показує ймовірність p_i для змінної X, значення якої не перевищує x_i , тобто $P(X \le x_\mathrm{i})$. Кожне значення розподілу є сумою ймовірностей p'_i усіх попередніх елементарних значень x_i змінної X, тобто: $p_j = \sum_{i=1}^{j} p'_i$. Наприклад, для $j = 4$ значення ймовірність p_4

складатиме $p_4 = \sum_{i=1}^{4} p_i' = 0{,}00 + 0{,}05 + 0{,}10 + 0{,}20 = 0{,}35$ (див. комірку E6 рис. 3.6). Ймовірність отримання у випробуванні будь-якого значення з повної системи випадкових значень (фактично, це є ймовірність достовірної події) дорівнює одиниці. І дійсно, для $j = n$ ймовірність $p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i' = 1$ (див. комірку E9 рис. 3.6 або останнє значення ймовірності розподілу на графіку рис. 3.7).

Законом розподілу випадкової величини є співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими *значеннями* випадкової величини і відповідними до них *ймовірностями*. Закон розподілу може бути задано функціями:

- функцією *розподілу* $F(x)$

$$F(x) = P(X \le x); \tag{3.15}$$

- функцією *щільності розподілу* $f(x)$

$$f(x) = P(X = x). \tag{3.16}$$

Для *дискретної* змінної функція розподілу $F(x)$ може бути представлена в *аналітичній* формі. Так, за даними рис. 3.8 функція $F(x)$ матиме вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0.05, & x \le 1; \\ 0.15, & x \le 2; \\ 0.35, & x \le 3; \\ 0.60, & x \le 4; \\ 0.90, & x \le 5; \\ 1.00, & x \le 6; \end{cases}$$

Аналогічно може бути представлено й щільність розподілу $f(x)$. Для *дискретної* змінної розподіл і щільність розподілу зв'язані співвідношенням:

$$F(x_j) = \sum_{i=1}^{j} f(x_i) \tag{3.17}$$

Для *неперервної* змінної можна записати такі співвідношення:

– щільність розподілу $f(x) = F'(x)$. Це значить, що *щільність* $f(x)$ є *першою похідною* від функції розподілу $F(x)$;

– щільність розподілу для будь-якої випадкової величини невід'ємна, тобто $f(x) \ge 0$, і має таку властивість:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \qquad (3.18)$$

Математичний аналіз надає геометричну інтерпретацію визначеному інтегралові (3.18) як площі (див. зафарбовану площу на рис. 3.10), яка зверху обмежена графіком функції $f(x)$, а знизу – віссю абсцис у межах $-\infty \le x \le +\infty$. Розмір площі за інтегралом (3.18) дорівнює одиниці.

Значення функції розподілу $F(x)$ для певного значення x (наприклад, $x = a$) визначається через щільність розподілу $f(x)$ за формулою:

$$F(\mathrm{a}) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx. \qquad (3.19)$$

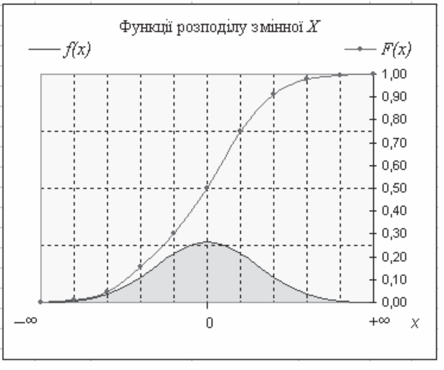


Рис. 3.10. Геометрична інтерпретація визначеному інтегралові (3.18)

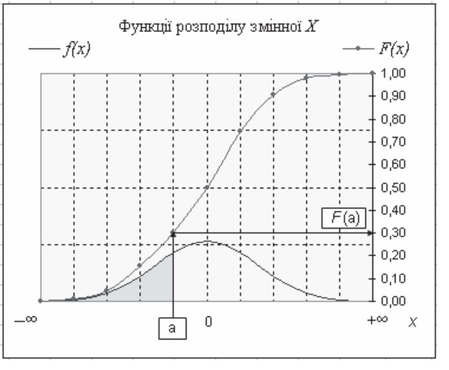


Рис. 3.11. Геометрична інтерпретація визначеному інтегралові (3.19)

Інтеграл (3.19) і функція $F(a)$ розподілу також мають сенс площі (див. зафарбовану площу на рис. 3.11), яка обмежена з трьох боків: зверху – графіком функції $f(x)$, знизу – віссю абсцис у межах $-\infty \le x \le a$, з правого боку – ординатою, яка проходить через точку $x = a$.

Для $x = +\infty$ функція розподілу $F(\infty)=1$, тобто

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \qquad (3.20)$$

Отже, порівнюючи алгебру випадкових подій з математичним апаратом випадкової величини, можна дійти до висновку про те, що розподіли *випад-*

кових величин ізоморфно відтворюються на розподілах *випадкових подій*.

Розглянемо приклад розподілу неперервної випадкової величини.

Приклад 3.12. Як відомо з психодіагностики, коефіцієнт інтелекту IQ (показник інтелектуального розвитку сукупності однакових за віком осіб) розподіляється за законом, близьким до нормального[12], щільність розподілу якого визначається формулою:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-0,5((x-\overline{IQ})/\sigma)^2} \text{ або } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\overline{IQ})^2}{2\sigma^2}\right),$$

де $f(x)$ – ймовірність $P(IQ = x)$ того, що IQ прийме значення x; $\overline{IQ}$ і σ – середнє арифметичне і стандартне відхилення генеральної сукупності; $\pi \approx 3,14$; $e \approx 2,71$. Для певного контингенту індивідуумів середнє значення $\overline{IQ}=100$ і $\sigma=15$.

Завдання: Побудувати розподіл коефіцієнта інтелекту IQ в діапазоні значень від $IQ_{мін} = 50$ до $IQ_{Макс} = 150$. Визначити ймовірності того, що IQ прийматиме значення: а) $IQ \le 80$; б) $IQ > 110$; в) у межах $70 < IQ \le 90$; г) прийматиме значення поза межами інтервалу $80 < IQ \le 120$.

Рішення:

Розрахуємо значення щільності $f(x)$ нормального розподілу і розподіл $F(x)$ у табличній формі в указаному діапазоні з інтервалом 10 (рис. 3.10). Деталі розрахунку розглянемо пізніше у відповідному розділі. Важливим моментом є досягнення так званої *нормалізації*, за умови якої площа під кривою щільності розподілу $f(x)$ повинна дорівнювати одиниці. Як бачимо з комірки C14 рис. 3.10, ця вимога виконується.

Побудуємо відповідні графіки розподілу IQ (рис. 3.13). Форма графіка щільності $f(IQ)$ має вигляд «дзвону». Вона є симетричною відносно середнього значення $\overline{IQ}=100$. Графік розподіл $F(IQ)$ досягає насичення на рівні 1,00.

[12] Докладніше щодо нормального закону розподілу див. розділ 3.4.

	A	B	C	D
1	Значення *IQ*		Розподіли	
2	*i*	*IQ*	*f(IQ)*	*F(IQ)*
3	1	50	0,001	0,000
4	2	60	0,008	0,004
5	3	70	0,036	0,023
6	4	80	0,110	0,091
7	5	90	0,213	0,253
8	6	100	0,267	0,500
9	7	110	0,213	0,748
10	8	120	0,110	0,909
11	9	130	0,036	0,978
12	10	140	0,008	0,997
13	11	150	0,001	1,000
14	Сума:		1,000	

Рис. 3.12. Таблиця розподілу *IQ*

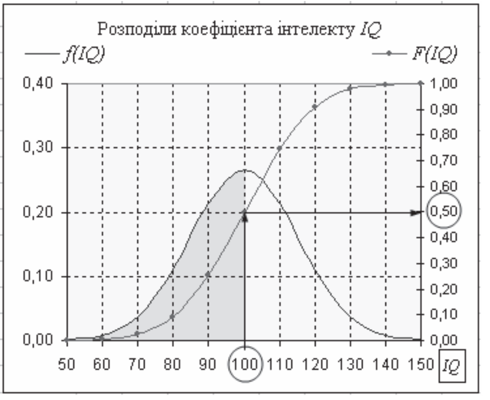


Рис. 3.13. Графіки розподілу *IQ*

Слід звернути увагу на те, що ймовірність $P(IQ \leq 100) = 0{,}50$. Інакше кажучи, ймовірність отримати значення *IQ* на рівні не більше середнього значення $\overline{IQ}=100$ складає 50%. На рис. 3.13 це відповідає зафарбованій площі, яка складає 50% від загальної. Аналітично це можна записати так:

$$F(x \leq 100) = \int_{-\infty}^{100} f(x)dx = 0{,}50.$$

Розглянемо пункти завдання щодо визначення ймовірності отримання конкретних значень коефіцієнта інтелекту *IQ*.

а) Визначити ймовірність того, що *IQ* прийматиме значення не більше 80, тобто $P(IQ \leq 80)$. Цій ситуації відповідає зафарбована площа рис. 3.14, для якої $F(80) \approx 0{,}091$ (значення 0,091 можна отримати з табл. рис. 3.12). Аналітичний запис має вигляд:

$$F(x \leq 80) = \int_{-\infty}^{80} f(x)dx \approx 0{,}091.$$

Отже, ймовірність $P(IQ \leq 80) \approx 0{,}091 = 9{,}1\%$.

б) Визначити ймовірність того, що значення *IQ* не менше 110, тобто $P(IQ>110)$. Зафарбована площа рис. 3.15 відповідає ситуації, коли треба отримати подію $A\{IQ>110\}$, яка є доповненням протилежної події $\overline{A}\{IQ \leq 110\}$. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці. Звідси ймовірність бажаної події $P(IQ>110) = 1 - P(IQ \le 110)$ і аналітичний запис для визначення відповідної ймовірності за допомогою функцій розподілу такий:

$$F(x > 110) = 1 - F(x \le 110) = 1 - \int_{-\infty}^{110} f(x)dx = 1 - 0{,}748 \approx 0{,}252.$$

Значення $F(110) = 0{,}748$ можна отримати з табл. рис. 3.12.

Отже, ймовірність $P(IQ>110) \approx 25{,}2\%$.

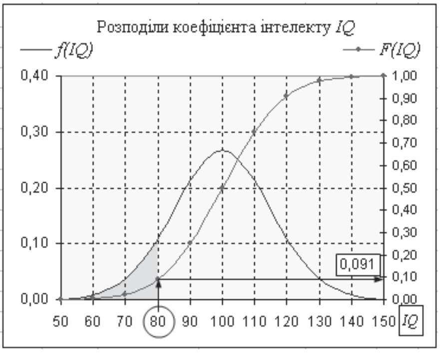


Рис. 3.14. Ймовірність того, що IQ не перевищує 80, або $P(IQ \le 80) \approx 9{,}1\%$

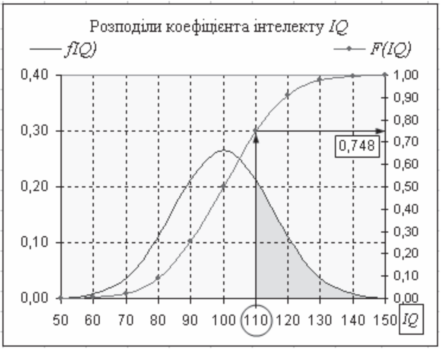


Рис. 3.15. Ймовірність того, що IQ не менше 110, тобто $P(IQ>110) \approx 25{,}2\%$

в) Визначити ймовірність того, що IQ прийматиме значення не менше 70, але не більше 90, тобто $P(70 \le IQ \le 90)$. Зафарбована площа рис. 3.16 відповідає ситуації, коли з події $A_1\{IQ \le 90\}$ треба вилучити елементи події $A_2\{IQ \le 70\}$. Тоді ймовірність $P(A)$ бажаної події A дорівнюватиме різниці ймовірностей $P(A_1)$ і $P(A_2)$ подій A_1 і A_2, тобто $P(70 \le IQ \le 90) = P(IQ \le 90) - P(IQ \le 70)$. Визначення ймовірності за допомогою функцій розподілу матиме вигляд:

$$\int_{70}^{90} f(x)dx = \int_{-\infty}^{90} f(x)dx - \int_{-\infty}^{70} f(x)dx = F(90) - F(70), \text{ або}$$

$$F(90) - F(70) = 0{,}253 - 0{,}023 \approx 0{,}23.$$

Отже, ймовірність $P(70 \le IQ \le 90) \approx 23\%$.

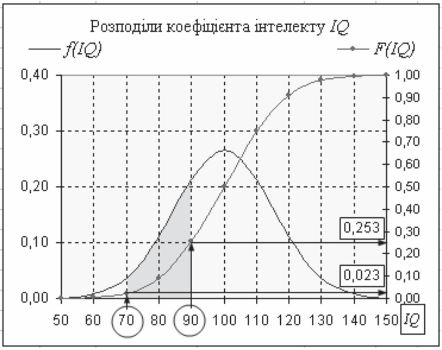


Рис. 3.16. Ймовірність

$P(70 \leq IQ \leq 90) \approx 23\%$.

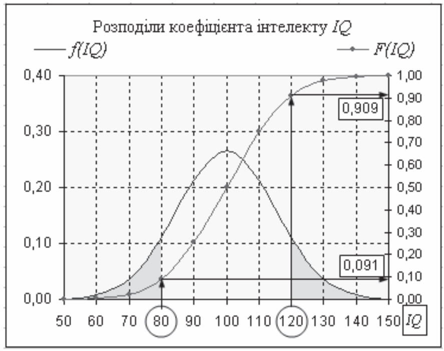


Рис. 3.17. Ймовірність

$P(80 \leq \ IQ > 120) \approx 18{,}2\%$.

г) Визначити ймовірність того, що IQ прийматиме значення поза межами інтервалу $80 < IQ \leq 120$, тобто $P(80 \geq IQ > 120)$. Цій події відповідає сума двох зафарбованих частин площі рис. 3.17. Рішення можна отримати у 2-х варіантах:

1-й варіант. Подія A складається з двох несумісних подій $A_1\{IQ \leq 80\}$ і $A_2\{IQ > 120\}$ з ймовірностями $P(A_1)$ і $P(A_2)$ відповідно.

Ймовірність $P(A_1)$ події A_1 визначиться як

$\int\limits_{-\infty}^{80} f(x)dx = F(80)$, або з табл. рис. 3.12 маємо $F(80) \approx 0{,}091$.

Ймовірність $P(A_2)$ події A_2 визначиться як доповнення до протилежної події $\overline{A}_2\{IQ \leq 120\}$ або $P(A_2) = 1 - \overline{A}_2\{IQ \leq 120\}$, а саме

$$F(x > 120) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{120} f(x)dx = 1 - F(120) \text{ або}$$

$$F(x > 120) = 1 - F(x \leq 120) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{120} f(x)dx = 1 - 0{,}909 \approx 0{,}091.$$

Ймовірність $P(A)$ події A складається з суми ймовірностей $P(A_1)$ і $P(A_2)$ подій A_1 і A_2, тобто $P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}091 + 0{,}091 \approx 0{,}182 \approx 18{,}2\%$.

2-й варіант. Подію $A\{80 \geq IQ > 120\}$ можна звести і розглядати як доповнення до протилежної події $\overline{A}$, яку позначимо $B\{80 \leq IQ \leq 120\}$ (див. незафарбовану площу рис. 3.17). Тоді $P(A) = 1- P(B)$.

Подія $B\{80\leq IQ \leq 120\}$ відповідає попередній ситуації (див. вище п. «в»), коли з події $B_1\{IQ \leq 120\}$ треба вилучати елементи події $B_2\{IQ \leq 80\}$.

Ймовірність $P(B)$ події B є різниця ймовірностей $P(B_1)$ і $P(B_2)$

$$P(B) = P(IQ \leq 120) - P(IQ \leq 80).$$

Ймовірність $P(A)$ бажаної події A дорівнюватиме

$$P(A) = 1- P(B) = 1 - [P(IQ \leq 120) - P(IQ \leq 80)].$$

Визначення ймовірності за допомогою функцій розподілу матиме вигляд:

$$1-\int_{80}^{120} f(x)dx = 1-\left[\int_{-\infty}^{120} f(x)dx - \int_{-\infty}^{80} f(x)dx\right] = 1-\left[F(120)-F(80)\right], \text{ або}$$

$$1- [F(120) - F(80)] = 1 - [0{,}909 - 0{,}091] = 1- 0{,}818 \approx 0{,}182 \approx 18{,}2\%.$$

Отже, ймовірність того, що IQ не прийматиме значення в діапазоні від 80 до 120, тобто $P(80 \geq IQ > 120)$, складає 18,2%.

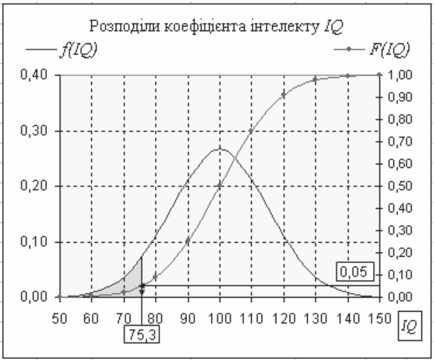
Зауваження: якщо графік розподілу симетричний і зафарбовані площі однакові за розміром, ймовірність $P(A)$ розраховується як подвоєна площа однієї з частин, наприклад, $P(A) = 2\cdot P(80 \leq IQ) = 2\cdot 0{,}091 \approx 0{,}182 \approx 18{,}2\%$.

Розподіли дають можливість рішення і зворотної задачі: знаходження значень змінної X, ймовірність якої задано.

Так, за даними прикладу 3.12 можна стверджувати, що на рівні ймовірності 0,05 (5%) коефіцієнт інтелекту IQ не перевищуватиме значення 75,3. З графіка функції розподілу $F(IQ)$ рис. 3.18 видно, що ймовірності 0,05 відповідає зафарбована площа, яка обмежена графіком щільності $f(IQ)$ і ординатою $IQ = 75{,}3$. Інакше кажучи, $F(IQ) = P(IQ \leq 75{,}3) = 0{,}05$.

Аналогічно можна отримати значення змінної IQ, ймовірність якої складає 20% або 0,20. З рис. 3.19 видно, що ймовірності 0,20 відповідає зафарбована площа, яка обмежена графіком щільності $f(IQ)$ і ординатою $IQ = 87{,}4$.

Інакше кажучи, $F(IQ) = P(IQ \leq 87{,}4) = 0{,}20$.



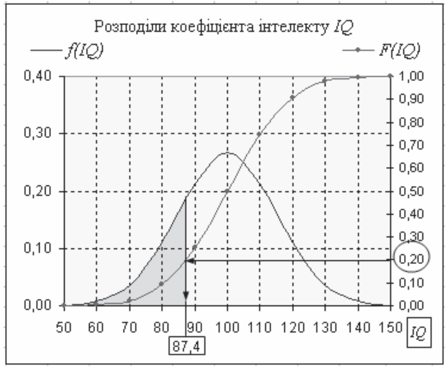


Рис. 3.18. Ймовірності 0,05 відповідає значення $IQ \leq 75,3$

Рис. 3.19. Ймовірності 0,20 відповідає значення $IQ \leq 87,4$

На даному етапі вивчення властивостей розподілів доречно згадати поняття «процентиль» і надати йому додаткового змістовного сенсу. Як визначалося вище, *процентилі* ділять обсяг упорядкованої сукупності на *сто* частин, тобто відокремлюють від сукупності по 0,01 частки (по 1%). P_i – *це* i-й процентиль – межа, нижче за яку лежать i відсотків значень. Наприклад, якщо п'ятий процентиль дорівнює 30 (записують $P_5 = 30$), це значить, що 5% всіх значень X не перевищують 30.

Значення функції розподілу $F(X)$, які знаходяться у межах від 0 для $F(-\infty)$ до 1 для $F(+\infty)$, також зручно поділити на *сто* частин і представляти функцію розподілу у вигляді *процентилів*. Якщо ціна шкали функції розподілу $F(X)$ становить 0,01 (1%), отримані вище результати можна прокоментувати у такій спосіб:

- для $F(IQ) = P(IQ \leq 75,3) = 0,05 = 5\%$ можна записати $P_5 = 75,3$ – п'ятому процентилю відповідає коефіцієнт інтелекту, який не перевищує значення у 75,3;
- для $F(IQ) = P(IQ \leq 87,4) = 0,20 = 20\%$ можна записати $P_{20} = 87,4$ – двадцятому процентилю відповідає коефіцієнт інтелекту, який не перевищує 87,4.

Значення процентиля для нормального розподілу можна отримати за допомогою функції MS Excel =НОРМОБР(ймовірність; середнє; ст.відхилення). Так, P_5 = НОРМОБР(0,05;100;15) = 75,3; а P_{20} = НОРМОБР(0,20;100;15) = 87,4.

Характеристики випадкових величин

Випадкову величину X можна повноцінно характеризувати функцією розподілу подій ω_i, (функція визначена на просторі елементарних подій Ω). Функція розподілу у вигляді гістограми (для дискретної змінної) або функції щільності (для неперервної змінної) дає вичерпну інформацію щодо закону розподілу випадкової величини. Проте спостерігаються завжди тільки значення цієї функції, які є реалізацією випадкової величини у конкретній ситуації. Сама ж функція розподілу є лише теоретичним узагальненням, яке служить основою для побудови імовірнісних моделей вивчення реальності.

Результати випробувань, як правило, моделюються незалежними випадковими величинами. Часто вважають, що спостереження, іспити, досліди проводяться за схемою незалежних іспитів. Отже, незалежність випадкових величин – одне з базових понять теорії ймовірностей, що лежить в основі практично всіх ймовірносно-статистичних методів. Тому слід мати на увазі деякі важливі властивості н*езалежних випадкових величин*:

- випадкові величини X і Y, визначені на тому ж самому просторі елементарних подій, називаються незалежними, якщо для будь-яких чисел a і b події $\{X=a\}$ і $\{Y=b\}$ є незалежними;
- якщо випадкові величини X і Y незалежні, a і b - деякі числа, то випадкові величини $X+a$ і $Y+b$ також незалежні;
- якщо випадкові величини X і Y незалежні, а $f(X)$ і $g(Y)$ – випадкові величини, отримані з X і Y за допомогою деяких функцій f і g, то $f(X)$ і $g(Y)$ – також незалежні випадкові величини. Наприклад, якщо X і Y незалежні, то X^2 і $3 \cdot Y + 4$ незалежні, а також $\ln(X)$ і $\ln(Y)$ незалежні.

У практиці досліджування генеральної сукупності цілком достатнім є отримання декількох чисельних характеристик, що оцінюють центр групування значень випадкової величини, міру їхнього розсіяння, ступінь взаємозв'язку різних компонентів багатомірної ознаки. У свою чергу, знаючи лише характер статистичних законів, розподіл може бути успішно відновлено за своїми чисельними характеристиками, наприклад, за середніми значеннями, дисперсією. Тож доцільно розглянути основні характеристики випадкової величини X, що дають змогу чисельно оцінити так звані показники «центральної тенденції» (математичне сподівання $M[X]$, моду $Mo[X]$ і медіану $Md[X]$), а також «варіативності» (дисперсія $D[X]$, стандартне відхилення $SD[X]$) .

Математичне сподівання. Однією з важливих характеристик розподілу випадкової величини X є її *математичне сподівання* $M[X]$ (іноді його називають *середнє значення випадкової величини*).

Означення. ***Математичне сподівання*** випадкової величини є число

$$M[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega), \qquad (3.21)$$

де $X(\omega)$ – значення випадкової величини X, отримане у події ω; $P(\omega)$ – ймовірність випадкової події ω; Ω – простір елементарних подій $\omega \in \Omega$.

Приклад 3.13. Обчислити математичне сподівання числа, що випадає на верхній грані ігрового кубика.

Рішення:

Простір Ω складається з 6 елементарних подій $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$. Кожній елементарній події відповідає значення випадкової величини. Для ігрового кубика це число від 1 до 6 на його гранях: $X(\omega_1) = 1$, $X(\omega_2) = 2$, ... $X(\omega_6) = 6$. Всі події мають рівні ймовірності відбутися $P(\omega_1) = P(\omega_2) =$... $P(\omega_6) = 1/6$.

Звідси *математичне сподівання* випадкової величини дорівнюватиме:

$$M[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5 .$$

Відповідь: математичне сподівання $M[X]$=3,5.

Математичне сподівання простої випадкової величини X з множиною значень $X(\Omega)= \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ визначається як

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) . \qquad (3.22)$$

Сенс математичного сподівання варто розкрити на прикладі.

Приклад 3.14. Середня кількість виконаних тестових завдань, що припадає на одного студента, може певним чином характеризувати якість навчання. Це можна прийняти, якщо припустити, що окремі значення випадкової змінної X групуються біля цього середнього показника. У табл. рис. 3.20 наведено дані іспитів: x_i – можлива кількість виконаних завдань з п'яти запропонованих; m_i – відповідна кількість виконань ($\sum m_i = m$). Необхідно розрахувати математичне сподівання як орієнтовний показник навчальних досягнень студентів або якості навчання.

Рішення:

- У стовпчику D (рис. 3.20) для кожного значення x_i розрахувати відносні частоти $f_i = m_i/m$, прийнявши їх за статистичні ймовірності P_i ($X = x_i$). Таке припущення справедливе при великій кількості випробувань.
- У стовпчику E (рис. 3. 20) розрахувати зважені значення $x_i \cdot f_i$.
- Побудувати графік розподілу виконання тестових завдань (рис. 3.21).

	A	B	C	D	E
1	Значення X			Статистична ймовірність	Зважені значення
2	i	x_i	m_i	$f(x_i)$	$x_i \cdot f(x_i)$
3	1	**0**	1	0,02	0,00
4	2	**1**	2	0,04	0,04
5	3	**2**	3	0,06	0,12
6	4	**3**	6	0,12	0,36
7	5	**4**	16	0,32	1,28
8	6	**5**	22	0,44	2,20
9	Сума:		50	1,00	4,00

Рис. 3.20. Розрахунки розподілу виконання тестових завдань

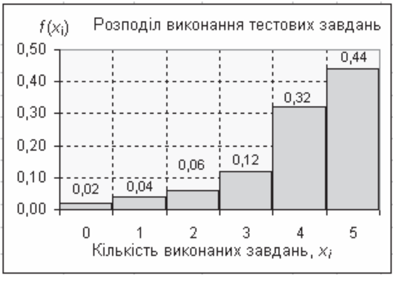


Рис. 3.21. Графік розподілу виконання тестових завдань

- Розрахувати математичне сподівання:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i) = 0 \cdot 0{,}02 + 1 \cdot 0{,}04 + 2 \cdot 0{,}06 + 3 \cdot 0{,}12 + 4 \cdot 0{,}32 + 5 \cdot 0{,}44 = 4{,}00.$$

Відповідь: середнє значення кількості виконаних завдань, здобуте за результатами іспитів, близьке до математичного сподівання $M[X] = 4{,}00$ і може служити орієнтовним показником якості навчання.

Для *неперервної* випадкової величини X, якщо функція розподілу $F(x)$ абсолютно неперервна і невід'ємна, функція $f(x)$ щільності розподілу така, що

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (3.23)$$

Тоді математичним сподіванням називається число

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx. \qquad (3.24)$$

Приклад 3.15. Розрахувати математичне сподівання *неперервної* випадкової величини *X* з рівномірнім розподілом імовірності на відрізку [a, b].

Рішення:

На рис. 3.22. зображено графік рівномірного розподілу *X* на відрізку [a, b].

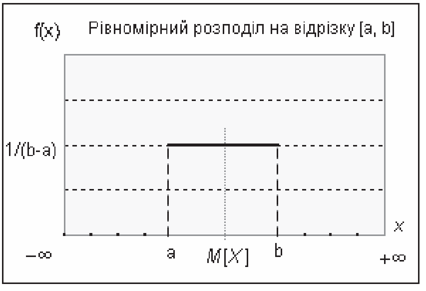


Рис. 3.22. Графік розподілу випадкової величини *X* на відрізку [a, b]

Рис. 3.23. Графік розподілу випадкової величини *X* на відрізку [2, 4]

Математичне сподівання $M[X]$ розраховується як визначний інтеграл на відрізку від –∞ до +∞, а саме

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

Щільність рівномірного розподілу $f(x)$ на відрізку [–∞, +∞] можна визначити на трьох окремих ділянках значень аргументу x:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty \le x < a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 0, & b < x \le +\infty. \end{cases}.$$

Звідси математичне сподівання $M[X]$ розраховується за формулою

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x \cdot 0dx + \int_{a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a}dx + \int_{b}^{+\infty} x \cdot 0dx = \int_{a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a}dx$$

або $$M[X] = \int_{a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} xdx = \frac{1}{b-a} \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_{a}^{b} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

Відповідь: у загальному вигляді математичне сподівання $M[X]=\dfrac{b+a}{2}$. Для конкретних значень відрізку [*a*, *b*], наприклад, $a=2$ і $b=4$, математичне сподівання $M[X]=\dfrac{4+2}{2}=3$. На рис. 3.23. зображено графік рівномірного розподілу випадкової величини *X* на відрізку [2, 4] і відмічено положення *M*[*X*] = 3.

Емпіричним (тобто побудованим за вибірковими даними $x_1, x_2, \ldots, x_n$) *аналогом* математичного сподівання є *середнє арифметичне*

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i .$$

Пояснення такого переходу від *теоретичних* характеристик до *емпіричних* (наприклад, від математичного сподівання *M*[*X*]) до середнього $\overline{X}$) базується на інтерпретації вибірки як зменшеної моделі генеральної сукупності, де можливими значеннями є вибіркові значення, а ймовірностями – відносні частоти їх появи у вибірці.

Розподіли випадкової величини *X* можуть бути охарактеризовані ще двома мірами положення центру: *модою Mo*[*X*] і *медіаною Md*[*X*].

Означення. ***Модою*** *Mo*[*X*] випадкової величини *X* називають таке її значення, при якому щільність ймовірності досягає максимуму[13].

Для дискретної величини модою є найбільш імовірне значення випадкової величини. Наприклад, з рис. 3.21 можна встановити, що максимальну ймовірність 0,44 має значення 5. Отже, це значення і є модою *Mo*[*X*] = 5,00.

Якщо максимум щільності розподілу спостерігається лише для одного значення змінної *X* (рис. 3.21), розподіл називається *унімодальним* (одномодальним), якщо для декількох несусідніх значень – *полімодальний*. Мода є природною характеристикою центра групування у разі унімодальних розподілів. Полімодальні розподіли свідчать про суттєву неоднорідність сукупностей. Їхнє вивчення доцільне для завдань класифікації об’єктів дослідження.

Для *неперервної* величини моду *Mo*[*X*], як максимум щільності (рис. 3.24),

[13] Пропонуємо порівняти це означення з означенням вибіркової моди *Mo*.

можна визначити за допомогою першої і другої похідної функції за умов монотонності функції щільності на певному проміжку [a, b].

Емпіричним аналогом $Mo[X]$ випадкової величини X є вибіркова мода Mo – як варіанта, яка найчастіше зустрічається у вибірці.

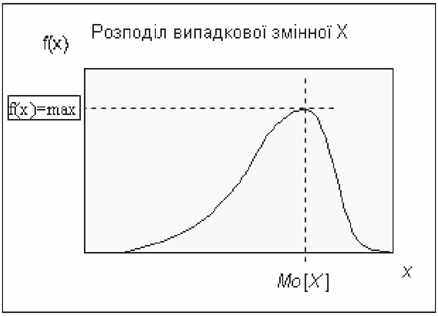


Рис. 3.24. Мода $Mo[X]$ є максимум щільності розподілу змінної X

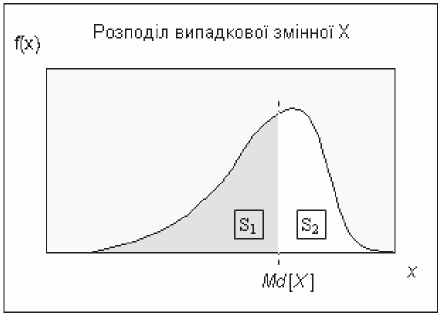


Рис. 3.25. Медіана $Md[X]$ визначається за умов $P(X\leq Md[X]) = P(X\geq Md[X])$

Означення. ***Медіаною*** випадкової величини X називають таке її значення $Md[X]$, при якому виконується умова *однакових ймовірностей* приймати змінною X значення, не вище за $Md[X]$ і не нижче $Md[X]$, тобто

$$P(\, X\leq Md[X]\,) = P(\, X\geq Md[X]\,).$$

Згідно з геометричною інтерпретацією медіана $Md[X]$ – це точка на абсцисі, через яку площа, що лежить під графіком щільності, ділиться навпіл – на дві рівні частини $S_1=S_2$ (рис. 3.25). У разі визначення вибіркової медіани Md емпіричні дані упорядковуються у варіаційний ряд. Значення середнього елементу цього ряду і є значенням вибіркової медіани (див. розділ 2.2).

Властивості *математичного сподівання* випадкової величини**:**

- якщо X_1, X_2, ..., X_n – попарно незалежні випадкові величини (тобто X_i і X_j незалежні для $i \neq j$), то математичне сподівання *суми* дорівнює сумі математичних сподівань цих величин

$$M[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = M[X_1] + M[X_2] + ...+M[X_n]; \qquad (3.25)$$

- математичне сподівання *добутку* незалежних випадкових величин X_1, X_2, ..., X_n дорівнює добуткові математичних сподівання цих величин

$$M[X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \cdot \ldots \cdot M[X_n]; \qquad (3.26)$$

- математичне сподівання константи дорівнює самій константі

$$M[a] = a; \qquad (3.27)$$

- математичне сподівання різниці $X - M[X]$ дорівнює нулю

$$M[X - M[X]] = 0; \qquad (3.28)$$

- якщо незалежні випадкові величини X і Y визначені на тому ж самому просторі елементарних подій, a і b – деякі числа, то

$$M[aX + bY] = aM[X] + bM[Y]. \qquad (3.29)$$

Дисперсія випадкової величини. Математичне сподівання показує, навколо якої чисельної міри групуються значення випадкової величини. Проте, необхідно також мати можливість вимірювати мінливість (варіативність) випадкової величини щодо математичного сподівання. Таким показником мінливості є математичне сподівання квадрату різниці між випадковою величиною та її математичним сподіванням, а саме $M[(X - M[X])^2]$.

Означення. ***Дисперсією випадкової величини*** X називається число[14]

$$D[X] = M[(X - M[X])^2], \qquad (3.30)$$

або

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_i - M[X])^2.$$

На рис.3.26 наведено формули для розрахунку розподілу – статистичної ймовірності $f(x_i)$ – а також показників: математичного сподівання $M[X]$ (комірка E9) і дисперсії $D[X]$ (комірка G9).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Значення X			Статистична ймовірність	Зважені значення	Квадрати різниць	Зважені значення
2	i	x_i	m_i	$f(x_i)$	$x_i \cdot f(x_i)$	$(x_i - M[X])^2$	$f(x_i) \cdot (x_i - M[X])^2$
3	1	**0**	0	=C3/C$9	=B3*D3	=(B3-E$9)^2	=D3*F3
4	2	**1**	2	=C4/C$9	=B4*D4	=(B4-E$9)^2	=D4*F4
5	3	**2**	3	=C5/C$9	=B5*D5	=(B5-E$9)^2	=D5*F5
6	4	**3**	4	=C6/C$9	=B6*D6	=(B6-E$9)^2	=D6*F6
7	5	**4**	25	=C7/C$9	=B7*D7	=(B7-E$9)^2	=D7*F7
8	6	**5**	16	=C8/C$9	=B8*D8	=(B8-E$9)^2	=D8*F8
9	Сума:		=СУ	=СУММ(D3:D8)	=СУММ(E3:E8)		=СУММ(G3:G8)

[14] Пропонуємо порівняти це означення з означенням вибіркової дисперсії s^2.

Рис. 3.26. Формули розрахунку $M[X]$ і $D[X]$

У таблиці рис.3.27 показано результати розрахунку математичного сподівання $M[X]$ і дисперсії $D[X]$ за даними приклада 3.14, а також гістограму розподілу $M[X]$ = 4,00 (комірка E9) і дисперсія $D[X]$ = 1,00 (комірка G9).

Математичне сподівання показує, що значення випадкової величини X групуються біля значення 4,00, кількість яких становить 50% від загальної кількості. Проте, навколо такого ж значення можуть групуватися й інші дані.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Значення X			Статистична ймовірність	Зважені значення	Квадрати різниць	Зважені значення
2	i	x_i	m_i	$f(x_i)$	$x_i \cdot f(x_i)$	$(x_i - M[X])^2$	$f(x_i)\cdot(x_i - M[X])^2$
3	1	**0**	0	0,00	0,00	16,00	0,00
4	2	**1**	2	0,04	0,04	9,00	0,36
5	3	**2**	3	0,06	0,12	4,00	0,24
6	4	**3**	4	0,08	0,24	1,00	0,08
7	5	**4**	25	0,50	2,00	0,00	0,00
8	6	**5**	16	0,32	1,60	1,00	0,32
9	Сума:		50	1,00	4,00		1,00

Рис. 3.27. Таблиця і гістограма розподілу з $M[X]$=4,00 і $D[X]$=1,00

З рис.3.28 видно, що для математичного сподівання $M[X]$ = 4,00 дисперсія $D[X]$ = 2,32 є удвічі більшою, ніж за даними рис. 3.27. Про значну мінливість свідчить й відповідна гістограма.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Значення X			Статистична ймовірність	Зважені значення	Квадрати різниць	Зважені значення
2	i	x_i	m_i	$f(x_i)$	$x_i \cdot f(x_i)$	$(x_i - M[X])^2$	$f(x_i)\cdot(x_i - M[X])^2$
3	1	**0**	2	0,04	0,00	16,00	0,64
4	2	**1**	4	0,08	0,08	9,00	0,72
5	3	**2**	2	0,04	0,08	4,00	0,16
6	4	**3**	8	0,16	0,48	1,00	0,16
7	5	**4**	2	0,04	0,16	0,00	0,00
8	6	**5**	32	0,64	3,20	1,00	0,64
9	Сума:		50	1,00	4,00		2,32

Рис. 3.28. Таблиця і гістограма розподілу з $M[X]$=4,00 і $D[X]$=2,32

Пропонуємо порівняти таблиці і графіки рис. 3.27 і 3.28 і зробити висновки.

Властивості *дисперсії* випадкової величини, які постійно використовуються у ймовірносно-статистичних методах:

- якщо X – випадкова величина, a і b – деякі числа, $Y = aX+b$, то

$$D[aX+b] = a^2 D[X] \tag{3.31}$$

(це значить, що число a як параметр масштабу суттєво впливає на дисперсію, тоді як число b – параметр зсуву на значення дисперсії не впливає);

- якщо $X_1, X_2, ..., X_n$ – попарно незалежні випадкові величини (тобто X_i і X_j незалежні для $i \neq j$), то дисперсія суми дорівнює сумі дисперсій

$$D[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = D[X_1] + D[X_2] + ...+D[X_n]. \tag{3.32}$$

Співвідношення щодо математичного сподівання (3.25) і дисперсії (3.32) мають важливе значення при вивченні вибіркових властивостей, оскільки результати вибіркових спостережень або вимірів розглядаються в математичній статистиці, як реалізації незалежних випадкових величин.

З дисперсією випадкової величини тісно зв'язаний ще один показник мінливості – *стандартне відхилення*.

Означення. ***Стандартним відхиленням*** випадкової величини X називається невід'ємне число

$$SD[X] = +\sqrt{D[X]}. \tag{3.33}$$

Отже, *стандартне відхилення X* однозначно зв'язано з *дисперсією*.

У теорії та практиці статистичних досліджень також важливу роль відіграють спеціальні функції – так звані **моменти** (*початкові* і *центральні*), які є характеристиками випадкових величин.

Означення. ***Початковим моментом*** k-го порядку випадкової величини X називається математичне сподівання k-ї степені цієї величини:

$$\tilde{v}_k = M[X^k].^{15} \tag{3.34}$$

Означення. ***Центральним моментом*** k-го порядку випадкової величини X називається математичне сподівання k-ї степені відхилення цієї величини X від його математичного сподівання:

$$\tilde{m}_k = M\big[X - M(X)\big]^k, \tag{3.35}$$

або $$\tilde{m}_k = M[X-a]^k \text{, де } a = M[X].$$

[15] Для позначення мометнів випадкових величин використовуємо ті ж самі літери, що і для мометнів варіаційного ряду, але з додатковим знаком ˜ («тільда»).

Формули для обчислення моментів дискретних (які приймають значення x_i з імовірністю p_i) і неперервних (зі щільністю ймовірності f(x)) випадкових величин наведено у табл. 3.4.

Таблиця 3.4

Формули для обчислення моментів випадкових величин

Момент	Випадкова величина X	
	Дискретна	Неперервна
Початковий	$\widetilde{v}_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$	$\widetilde{v}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^k f(x)dx$
Центральний	$\widetilde{m}_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^k p_i$	$\widetilde{m}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - a)^k f(x)dx$

Як і для варіаційних рядків моменти дискретних випадкових величин мають аналогічний сенс:

Перший початковий момент (k=1) випадкової величини X є її *математичним сподіванням*:

$$\widetilde{v}_1 = M[X] = \mu . \qquad (3.36)$$

Другий центральний момент (k=2) визначає *дисперсію* $D[X]$ випадкової величини X:

$$\widetilde{m}_2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 p_i = D[X] = \sigma^2 . \qquad (3.37)$$

Третій центральний момент (k=3) характеризує асиметрію розподілу випадкової величини X:

$$\widetilde{m}_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^3 p_i .$$

Коефіцієнт асиметрії A розподілу випадкової величини X має вигляд:

$$\frac{\widetilde{m}_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^3 p_i = A . \qquad (3.38)$$

Четвертий центральний момент (k=4) характеризує крутість розподілу випадкової величини.

$$\widetilde{m}_4 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^4 p_i$$

Коефіцієнтом ексцесу E називають число:

$$\frac{\widetilde{m}_4}{\sigma^4} - 3 = \left[\frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^3 p_i \right] - 3 = E . \qquad (3.39)$$

На основі порівняння значень теоретичних і вибіркових моментів виконується оцінювання параметрів розподілів випадкових величин (див., наприклад, розділи 4 і 5).

Як відзначалося вище, в математичній статистиці використовуються два паралельних рядка показників: перший – має відношення до практики (це показники вибірки), другий – базується на теорії (це показники імовірнісної моделі). Співвідношення цих показників представлено у табл. 3.5.

Таблиця 3.5

Співвідношення показників емпіричної вибірки й імовірнісної моделі

	Показники емпіричної вибірки	**Показники імовірнісної моделі**
1.	Частота відносна m_i/n	Ймовірність p_i
2.	Функція щільності розподілу f_i	Функція щільності розподілу $f(x)$
3.	Властивості щільності розподілу f_i	Властивості щільності розподілу $f(x)$
	$\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
4.	Функція розподілу F_j	Функція розподілу $F(x)$
	$F_j = \sum_{i=1}^{j} f_i$	$F(x_j) = \sum_{i=1}^{j} f(x_i)$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$
5.	Середнє $\overline{X}$	Математичне сподівання $M[X]$
	$\overline{X} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}$	$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i)$ $M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$
6.	Мода Mo	Мода $Mo[X]$
7.	Медіана Md	Медіана $Md[X]$

Таблиця 3.5 продовження

8.	Дисперсія s_x^2	Дисперсія $D[X]$
	$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum f_i (x_i - \overline{X})^2$	$D[X] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_i - M[X])^2$
		$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot (x - M[X])^2$
9.	Стандартне відхилення s_x	Стандартне відхилення $SD[X]$
	$s_x = \sqrt{s_x^2}$	$SD[X] = \sqrt{D[X]}$

Отже, метою описової статистики є перетворення сукупності вибіркових емпіричних даних на систему показників – так званих *статистик*, що мають відношення до реально існуючих об'єктів. Так, психологи, педагоги, інші фахівці працюють у реальній сфері, об'єктами якої є особи, групи осіб, колективи, характеристиками для яких служать емпіричні показники. Проте основна мета дослідження – це здобуття нового знання, а знання існує в ідеальній формі у вигляді характеристик теоретичних моделей. Звідси виникає проблема коректного переходу від емпіричних показників реальних об'єктів до показників теоретичної моделі. Цей перехід потребує аналізу як загальних методичних підходів, так і строгих математичних підстав. Принципову можливість тут відкриває закон великих чисел, теоретичне обґрунтування якому було надане Якобом Бернуллі (1654-1705), Пафнутієм Львовичем Чебишевим (1821-1894) та іншими математиками XIX ст.

Запитання. Завдання.

1. Розкрийте поняття випадкової величини.
2. Чим відрізняються дискретна і неперервна випадкові величини?
3. З яких елементів складається імовірнісний простір?
4. Як побудувати розподіл дискретної випадкової величини?
5. Як зв'язані між собою функція щільності $f(x)$ і функція розподілу $F(x)$?
6. Надайте геометричну інтерпретацію інтегралові $F(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

7. Охарактеризуйте розподіл, функція якого $F(x \leq 100) = \int_{-\infty}^{100} f(x)dx = 0{,}50$.

8. Яка інтерпретація площі під графіком щільність розподілу змінної?

9. Яка ймовірність визначається розподілом і щільністю розподілу?

10. Як визначити ймовірність за процентилем нормального розподілу?

11. Що таке математичне сподівання випадкової величини?

12. Поясніть властивості математичного сподівання випадкової величини.

13. Сформулюйте означення моди і медіани випадкової величини.

14. Сформулюйте означення дисперсії випадкової величини.

15. Охарактеризуйте властивості дисперсії випадкової величини.

16. Які показники називають початковим і центральним моментом *k*-го порядку випадкової величини?

17. Чим відрізняються формули початкового і центрального моментів випадкової величини?

18. Повторіть математичні процедури завдань за прикладами 3.11 – 3.15.

3.3. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ[16]

Повторні випробування

Явища і процеси, що вивчає психологія, – це, як правило, складні події. Тому формування теоретичної бази опису таких подій зручно розглядати на прикладі повторних випробувань. Тестування та іспити студентів можна вважати при деяких умовах прикладом таких випробувань.

З *класичного* визначення *ймовірність* – це число, до якого наближається *частота* появлень бажаної події при збільшенні незалежно виконаних випробовувань. До того ж і ймовірність, і частота виражаються в долях одини-

[16] Іноді пишуть «закони великих чисел», маючи на увазі основні теореми (Бернуллі, Чебишева, центральної граничної теореми та ін.).

ці, їхні чисельні значення розміщені між *нулем і одиницею*, хоча, як відомо, *частота* випадкової величини і її *ймовірність* не співпадають в ідеалі.

Ймовірність, яку можна вказати до випробувань, називають *апріорною.* Наприклад, при підкиданні монети наперед відомо, що вона може впасти вгору «гербом» або «цифрою». Тут можливі лише дві події, ймовірності яких (якщо монета ідеальна) однакові: P(«герб») = P(«цифра») = ½ = 0,5.

Інша ситуація може мати місце при випробовуваннях, наприклад, впливу нових педагогічних технологій або психологічних методик на окремих осіб (школярів, студентів тощо) або на весь колектив. Результати таких випробувань передбачити наперед неможливо. Статистична ймовірність здійснення таких подій може бути встановлена тільки на підставі досліду, тобто *апостеріорі*.

Для практики застосування математичного апарату теорії ймовірностей важливе значення має відповідь на питання про те, чи співпадають *апріорні* (теоретичні) *ймовірності* зі статистичними (емпіричними) ймовірностями, представленими у вигляді *частот*? І якщо так, то при яких умовах?

Даючи принципово позитивну відповідь на це питання, численні досліди і спостереження показали, що *частоти* випадкових подій типу $\frac{m}{n}$ наближаються до їхніх *ймовірностей* p у міру збільшення числа випробувань n. Наприклад, якщо одну й ту ж монету підкидати велику кількість разів, то в якомусь числі випробувань випаде «герб», а в інших випаде «цифра». Примітно те, що чим більше здійснено випробувань, тим *емпірична частота* події стає ближчою до її *теоретичної ймовірності* (для ідеальної монети p=0,5).

Існують і прямі експериментальні підтвердження того, що частота здійснення деяких подій близька до ймовірності, визначеної з теоретичних міркувань, наприклад, результати випробувань з підкиданням монети (табл. 3.6).

З табл. 3.6 видно, що при збільшені числа випробувань n відхилення *частоти* події від її ймовірності $\left|\frac{m}{n} - p\right|$ зменшується. У цьому факті є прояв дії так званого **закону великих чисел**: *вибіркові* характеристики при зростанні числа дослідів наближаються до *теоретичних*, а це дає можливість оцінювати параметри імовірнісних моделей за даним дослідів.

Таблиця 3.6

Результати випробувань

Хто проводив випробування	Число випробувань	Число подій випадання «гербом»	Частота події	Теоретична ймовірність події	Відхилення частоти від ймовірності
	n	m	$\frac{m}{n}$	p	$\left\|\frac{m}{n}-p\right\|$
Бюффон	4 040	2 048	0,5069	0,5000	0,0069
Пірсон: перше випробування	12 000	6 019	0,5016	0,5000	0,0016
Пірсон: друге випробування	24 000	12 012	0,5005	0,5000	0,0005

Закон великих чисел носить об'єктивний характер і має відповідну емпіричну базу. Висновки закону підтверджують, наприклад, досліди Кетле: в урну поміщали 20 білих і 20 чорних куль, потім витягували з неї навмання одну кулю, реєстрували її колір і повертали кулю назад. Кожне випробування повторювали багато разів. Ймовірність появи білої або чорної кулі залишалася при цьому постійною, рівною 1/2 (див. табл. 3.7).

Таблиця 3.7

Результати дослідів Кетле

Число вийнятих куль	З них опинилося		Співвідношення білих і чорних куль
	білих	чорних	
4	1	3	0,33
16	8	8	1,00
64	28	36	0,78
256	125	131	0,95
1022	526	496	1,06
4096	2066	2030	1,02

З табл. 3.7 видно, як із збільшенням числа випробувань співвідношення білих і чорних куль наближається до одиниці.

Закон великих чисел стверджує, що частота $\frac{m}{n}$ події A буде скільки завгодно близькою до її ймовірності p, якщо число випробувань n необмежено зростає. Можна взяти скільки завгодно мале число ε і порівнювати його з різницею між відносною частотою і ймовірністю події. Ймовірність того, що ця різниця перевищить число ε, прагнутиме до нуля при прагненні числа випробувань n до нескінченності:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}_{n\to\infty} - p\right| > \varepsilon\right\} \to 0.$$

Отже, частота події і її імовірність не співпадають, проте різниця між ними зменшується при збільшенні числа випробувань. Це значить, що статистичні закономірності виявляються тільки у багаторазових повторних випробуваннях і кількість таких випробувань n повинна бути значною.

Теорема Бернуллі

Теорема Бернуллі стверджує: якщо m – кількість подій A в n попарно незалежних випробуваннях, а p є ймовірність настання події A в кожнім з випробувань, то при будь-якому ε>0 справедлива нерівність

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}. \tag{3.40}$$

Ця формула є першим в історії варіантом закону великих чисел і по суті вважається початком *теорії ймовірностей* як галузі математичної науки. Відтоді теорії вибіркового методу стають основою математичної статистики.

Теорема Бернуллі дає можливість оцінити кількості незалежних випробувань n при певних умовах їх проведення.

Приклад 3.16. Ймовірність того, що навмання вибраний студент складе залік, дорівнює 90%. Скільки треба перевірити студентів, щоб з імовірністю 80% виявити успішно підготовлених студентів. Похибка при цьому не повинна перевищувати 10%.

Рішення:

Визначимо відповідні до теореми Бернуллі позначення:

$p = 0{,}90$ – ймовірність того, що навмання вибраний студент складе залік;

$\varepsilon = 0{,}10$ – похибка процедури перевірки студентів;

$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq 0{,}10\right\}$ =0,80 – ймовірність виявлення підготовлених студентів.

Значення ймовірності не перевищити похибку у 10% процедури перевірки студентів складає

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}10\right\} = 1 - 0{,}80 = 0{,}20.$$

При цьому повинна виконуватися нерівність правої частини виразу (3.40)

$$\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} < 0{,}20\,.$$

Звідси кількість студентів, яких треба перевірити, визначиться як

$$n > \frac{p(1-p)}{0{,}20 \cdot \varepsilon^2} = \frac{0{,}90 \cdot (1-0{,}90)}{0{,}20 \cdot (0{,}10)^2} = \frac{0{,}90 \cdot 0{,}10}{0{,}20 \cdot 0{,}01} = 45.$$

Відповідь: для того, щоб з імовірністю 80% виявити успішно підготовлених студентів з похибкою не вище 10%, треба перевірити більше ніж 45 осіб.

Одним з принципових питань математичної статистики є характер співвідношення параметра ε і кількості незалежних випробуваннях n. Відповідь на це питання також дає закон великих чисел.

Приклад 3.17. Для умов прикладу 3.16 оцінити співвідношення кількості незалежних випробувань n і параметра ε для трьох значень ε (0,1; 0,05; 0,01).

Рішення:

Результати і формули розрахунку n згідно з теоремою Бернуллі (3.40) для різних значень ε представлено в табличній формі на рис. 3.29.

Як бачимо з рис. 3.29 (див. стовпчики D і E), при зменшенні параметра ε кількість необхідних незалежних випробувань n зростає пропорційно ε^2.

	A	B	C	D	E
1	p	1-p	P{|m/n-p|<ε}	ε	n
2	0,9	0,1	0,80	0,10	45
3	0,9	0,1	0,80	0,05	180
4	0,9	0,1	0,80	0,01	4500

	A	B	C	D	E
1	p	1-p	P{|m/n-p|<ε}	ε	n
2	0,9	=1-A2	0,8	0,1	=A2*B2/D2^2/(1-C2)
3	0,9	=1-A3	0,8	0,05	=A3*B3/D3^2/(1-C3)
4	0,9	=1-A4	0,8	0,01	=A4*B4/D4^2/(1-C4)

Рис. 3.29. Результати і формули розрахунку n для різних ε

Відповідь: чим жорсткіші умови ε щодо зменшення різниці між емпіричною частотою події та її теоретичною ймовірністю, тим більшої кількості випробувань потребують такі досліди.

Теорема Чебишева

Теорема Чебишева свідчить: якщо випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ попарно незалежні й існує число C таке, що $D[X_i] \leq C$ для всіх $i = 1, 2, ..., n$, то для будь-якого $\varepsilon>0$ справедлива нерівність

$$P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M[X_1]+M[X_2]+\ldots+M[X_n]}{n}\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{C}{n\varepsilon^2}. \quad (3.41)$$

Нерівність (3.41) можна представити інакше

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[X_i]\right|<\varepsilon\right\}=1. \quad (3.42)$$

Отже, ймовірність того, що середнє арифметичне незалежних випадкових величин $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ відрізняється від середнього арифметичного математичних сподівань $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[X_i]$ менш ніж на ε, наближається до 1 при зростанні числа випадкових величин, для будь-якого ε.

Теорема Чебишева є розвитком і узагальненням теореми Бернуллі

Для практичних цілей найчастіше використовується такий варіант випробувань, коли всі X_i мають однакові показники математичного сподівання $M[X_i]=M$ і дисперсії $D[X_i]=D$. Тоді у якості оцінки математичного сподівання використовується вибіркове середнє арифметичне

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

звідки математичне сподівання і дисперсія середнього визначаться як

$$M[\overline{X}] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} M[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \overline{M},$$

$$D[\overline{X}] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} \cdot D[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n^2} nD = \frac{D}{n} = \overline{D}.$$

Тоді нерівність (3.41) матиме вигляд

$$P\left\{\left|\overline{X} - M[\overline{X}]\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D[\overline{X}]}{\varepsilon^2} \qquad (3.43)$$

або

$$P\left\{\left|\overline{X} - \overline{M}\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D}{n\varepsilon^2}. \qquad (3.44)$$

Формула (3.44) означає, що вибіркове середнє $\overline{X}$ при збільшені числа випробувань (дослідів, спостережень, вимірювань) як завгодно близько за ймовірністю наближається до свого математичного сподівання $M[\overline{X}]$:

$$\overline{X} \xrightarrow{p} M[\overline{X}]. \qquad (3.45)$$

Отже, вираз (3.45) є доказом того, що вибіркове середнє $\overline{X}$ є *спроможною* оцінкою свого аналога з генеральної сукупності. На цьому важливому висновку побудовано статистичне оцінювання (див. розділ 4).

Приклад 3.18. Оцінити ймовірність того, що середнє випадкової величини відхилиться від свого математичного сподівання на значення не більше ніж на три стандартних відхилення.

Рішення:

Визначимо відповідні до теореми Чебишева позначення:

$\overline{X}$ і $M[\overline{X}]$– середнє арифметичне величини *X* і математичне сподівання середнього арифметичного випадкової величини *X*;

$SD[\overline{X}]$ і $D[\overline{X}]$ – стандартне відхилення і дисперсія середнього арифметичного випадкової величини *X*;

$\varepsilon = 3 \cdot SD[\overline{X}]$ – критерій відхилення різниці $\left|\overline{X} - M[\overline{X}]\right|$;

$P\left\{\left|\overline{X} - M[\overline{X}]\right| < \varepsilon\right\}$ – ймовірність події, яку треба оцінити з умов задачі.

За теоремою Чебишева маємо $P\left\{\left|\overline{X} - M[\overline{X}]\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \dfrac{D[\overline{X}]}{\varepsilon^2}$.

З урахуванням виразу $SD[\overline{X}] = \sqrt{D[\overline{X}]}$ і значення $\varepsilon = 3 \cdot SD[\overline{X}]$ права частина дорівнюватиме

$$\frac{D[\overline{X}]}{\varepsilon^2} = \frac{D[\overline{X}]}{(3 \cdot SD[\overline{X}])^2} = \frac{D[\overline{X}]}{9 \cdot D[\overline{X}]} = \frac{1}{9}, \text{ тобто } P\left\{\left|\overline{X} - M[\overline{X}]\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{9}$$

З теореми Чебишева можна записати

$$P\left\{\left|\overline{X} - M[\overline{X}]\right| < \varepsilon\right\} = 1 - P\left\{\left|\overline{X} - M[\overline{X}]\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{9}.$$

Тоді ймовірність події, яку треба оцінити, визначиться через нерівність

$$P\left\{\left|\overline{X} - M[\overline{X}]\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}89$$ [17].

Відповідь: ймовірність того, що середнє випадкової величини відхилиться від свого математичного сподівання на значення не більше ніж у три стандартних відхилення, складає приблизно 0,89 або біля 89%.

З теорем Бернуллі і Чебишева як з конкретних форм закону великих чисел випливає той факт, що вибіркові характеристики при зростанні числа випробувань наближаються до теоретичних, що дає можливість оцінювати параметри імовірнісних моделей за емпіричними даними.

Центральна гранична теорема

Розглянемо два варіанта центральної граничної теореми.

1. Центральна гранична теорема для однаково розподілених доданків – теорема Ліндеберга-Леві.

Для незалежних однаково розподілених випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ з математичними сподіваннями $M[X_i] = \mu$ і дисперсіями $D[X_i] = \sigma^2$ (i = 1, 2, ...,

[17] Визначена оцінка іноді є заниженою, наприклад, для нормального розподілу вона складає біля 0,997 (за так званим закон трьох сигм, див. розділ 3.4).

n) можна записати

$$M[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = M[X_1] + M[X_2] + \ldots + M[X_n] = n\mu, \qquad (3.46)$$

$$D[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = D[X_1] + D[X_2] + \ldots + D[X_n] = n\sigma^2 . \qquad (3.47)$$

Визначимо випадкову величину U_n як

$$U_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - M[X_1] - M[X_2] - \ldots - M[X_n]}{\sqrt{D[X_1] + D[X_2] + \ldots + D[X_n]}} .$$

З урахування виразів (3.46) і (3.47) випадкова величина U_n виглядатиме як

$$U_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} . \qquad (3.48)$$

Для величини U_n математичне сподівання $M[U_n] = 0$, дисперсія $D[U_n] = 1$.

Тоді при $n \to \infty$ для будь-якого числа x існує границя

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) = \Phi(x), \qquad (3.49)$$

де $\Phi(x)$ – функція стандартного нормального розподілу

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt , \qquad (3.50)$$

де $\varphi(t)$ – щільність стандартного нормального розподілу

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} . \qquad (3.51)$$

Якщо враховувати, що $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X}$, то змінну U_n можна записати як

$$U_n = \frac{n\overline{X} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \qquad (3.52)$$

і границя (3.48) приймає більш знайому форма запису

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} < x \right) = N(0,1), \qquad (3.53)$$

де $N(0,1)$ - нормальний розподіл з нульовим математичним сподіванням і стандартним відхиленням, рівним одиниці.

У деяких задачах не завжди виконується умова існування однаково розподілених доданків. Сутність цих умов полягає в тому, що жодний з доданків не повинний бути домінуючим, внесок кожного доданка в середнє арифметичне має бути дуже малим у порівнянні з усією сумою.

2. Центральна гранична теорема для неоднаково розподілених доданків – теорема Ляпунова.

Для незалежних неоднаково розподілених випадкових величин X_1, X_2, ..., X_n з математичними сподіваннями $M[X_i] = \mu_i$ і дисперсіями $D[X_i] = \sigma_i^2 \neq 0$ (i = 1, 2, ..., n) випадкова величини U_n матиме вигляд

$$U_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - \mu_1 - \mu_2 - \ldots - \mu_n}{\sqrt{D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]}} \qquad (3.54)$$

Тоді при n→∞ для будь-якого числа x існує границя

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - \mu_1 - \mu_2 - \ldots - \mu_n}{\sqrt{D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]}} < x\right) = \Phi(x), \qquad (3.55)$$

де $\Phi(x)$ – функція стандартного нормального розподілу.

У разі незалежних однаково розподілених випадкових доданків маємо

$\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n = \mu$, $D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = D[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = n\sigma^2$ і теорема Ляпунова переходить у теорему Ліндеберга-Леві (3.49).

Сенс *центральної граничної теореми* такий: якщо обсяг вибірки n є «достатньо великим», то незалежно від форми розподілу параметра μ генеральної сукупності *вибіркове середнє* $\overline{X}$ має розподіл, близький до *нормального.* Отже, оцінку генерального середнього μ за його вибірковим значенням $\overline{X}$ можна виконувати на основі нормального розподілу. Схема дослідження може бути такою:

- вибираємо випадковим методом n об'єктів X_1, X_2, …, X_n з генеральної сукупності (для практичних цілей n повинно бути не менше 30, тобто $n \geq 30$);
- розраховуємо вибіркове середнє $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$;

- виконуємо статистичне оцінювання і формулюємо висновки на основі *нормального розподілу* (див., наприклад, розділ 5.4).

Центральна гранична теорема – це клас теорем теорії ймовірностей, що затверджують, що сума великої кількості незалежних (або слабко залежних) випадкових величин має розподіл, близький до нормального.

Дуже важливо те, як діють ті причини, з яких складається сукупний результат вимірювань або спостережень: якщо діють *адитивно* (тобто шляхом додавання), то величина X має приблизно нормальний розподіл; якщо *мультиплікативно* (тобто дії окремих причин перемножуються), то розподіл X є близьким не до нормального, а до так званого логарифмічно нормального, тобто не X, а $\ln X$ має приблизно нормальний розподіл. Якщо ж немає підстав стверджувати, що діє один із цих двох механізмів формування підсумкового результату, то про розподіл випадкової величини X нічого певного сказати не можна.

Запитання. Завдання.

1. Які Ви знаєте прямі експериментальні підтвердження того, що частота здійснення деяких подій близька до ймовірності.

2. В чому є прояв дії так званого закону великих чисел?

3. Прокоментуйте результати дослідів Кетле.

4. Сформулюйте і поясніть теорему Бернуллі.

5. Сформулюйте і поясніть теорему Чебишева. Чим вона відрізняється від теореми Бернуллі?

6. Сформулюйте і поясніть *центральну граничну теорему* для однаково розподілених доданків (теорему Ліндеберга-Леві).

7. Сформулюйте і поясніть теорему Ляпунова.

8. Повторіть математичні процедури завдань за прикладами 3.16 – 3.18.

3.4. ТЕОРЕТИЧНІ РОЗПОДІЛИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Зміст класичних законів великих чисел полягає в тому, що вибіркове середнє арифметичне незалежних однаково розподілених випадкових величин наближається (сходиться) до математичного сподівання цих величин. Іншими словами, вибіркові середні сходяться до теоретичного середнього.

Біноміальний розподіл.

Більшість завдань теорії ймовірностей припускають відомими із самого початку ймовірності елементарних випадкових подій (наприклад, усі ймовірності складають по 0,5). Спираючись на знання цих ймовірностей, розраховують імовірнісні характеристики складних подій.

Наприклад, кожний іспит одного студента (кожна подія I) складається з шести елементарних подій ω_i (результатів виконання завдань), тобто $I=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, де $n = 6$. Кожна елементарна подія ω_i має лише два наслідки: прямий (бажаний) – «виконано» (або «1») і протилежний (небажаний) – «не виконано» (або «0»). Розглянемо варіант так званого «байдужого» студента, який намагається скласти іспит, відповідаючи навмання на завдання. Тоді можна прийняти, що елементарні події матимуть *однакові* ймовірності: $p(1)=p(0)=1/2=0{,}5$. Для спрощення математичного викладу ймовірність бажаної елементарної події позначимо як p, тобто $p(1) = p$. Тоді:

$p(1) = p = 0{,}5$;

$p(0) = 1–p(1) = (1–p) = 1 – 0{,}5 = 0{,}5$.

Кількість бажаних елементарних подій (виконаних завдань) m може коливатися від 0 (жодного виконаного завдання) до 6 (усі завдання іспиту виконано). Розрахуємо ймовірності того, що в складній події I з n елементарних подій ω_i можна отримати m «бажаних» наслідків з імовірністю p і, зрозуміло, n-m «небажаних» наслідків з імовірністю $(1–p)$.

Загальна ймовірність *однієї* такої складної події I дорівнює добутку ймовірностей незалежних елементарних подій і обчислюється як:

$$p^m \cdot (1-p)^{n-m}.$$

Проте кількість варіантів складних подій *I* з *n* елементів по *m* визначається кількістю комбінацій: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Тому остаточно загальну ймовірність спостереження складної події *I* можна розрахувати за *формулою Бернуллі*:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}. \qquad (3.56)$$

Ця формула визначає теоретичний розподіл ймовірностей складних подій – так званий ***біноміальний розподіл***. На рис. 3.30 наведено його розрахунки для параметрів $n = 6$, $p = 0{,}5$; на рис. 3.31 – графіки диференціальної та інтегральної функцій розподілу ймовірностей. Необхідно мати на увазі, що біноміальний розподіл – це розподіл дискретної змінної.

Для розрахунків біноміального розподілу зручно використовувати функцію =БИНОМРАСП(*m*; *n*; *p*; *l*), що входить до складу MS Excel. Функція повертає дискретні значення розподілу, де *m* – кількість успіхів; *n* – загальна кількість випробувань; *p* – ймовірність успіху; *l* – параметр, який визначає тип розподілу (1 – інтегральна функція, 0 – диференціальна функція розподілу).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Розрахунки окремих значень					Ймовірність	
2						$P_n(m)$	$P^*_n(m)$
3	n	m	n-m	C_n^m	$p^m(1-p)^{n-m}$	диференціальна	інтегральна
4	6	0	6	1	0,0156	0,02	0,02
5	6	1	5	6	0,0156	0,09	0,11
6	6	2	4	15	0,0156	0,23	0,34
7	6	3	3	20	0,0156	0,31	0,66
8	6	4	2	15	0,0156	0,23	0,89
9	6	5	1	6	0,0156	0,09	0,98
10	6	6	0	1	0,0156	0,02	1,00
11				p =	**0,50**	1,00	
12				1-p =	**0,50**		

Рис. 3.30. Розрахунки біноміального розподілу ($n = 6$; $p = 0{,}50$)

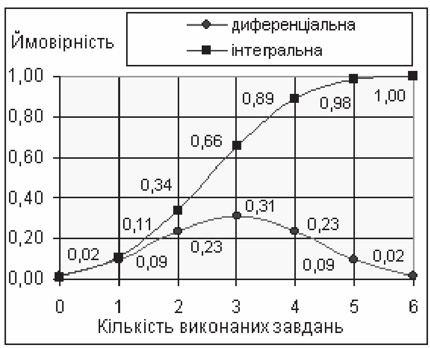


Рис. 3.31. Графіки біноміального розподілу ($n = 6$; $p = 0{,}50$)

Розподіли можна розрахувати і для інших апріорних ймовірностей бажаних елементарних подій. Припустимо, що для «слабкого» студента ймовірність *p* бажаної події складає, наприклад, 30% або 0,3. На рис. 3.32 наведено відповідні розрахунки для $n = 6$, $p = 0{,}3$; на рис. 3.33 – графіки диференціальної та інтегральної функцій розподілу.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Розрахунки окремих значень					Ймовірність	
2						$P_n(m)$	$P^*_n(m)$
3	n	m	n-m	C_n^m	$p^m(1-p)^{n-m}$	диференціальна	інтегральна
4	6	0	6	1	0,1176	0,12	0,12
5	6	1	5	6	0,0504	0,30	0,42
6	6	2	4	15	0,0216	0,32	0,74
7	6	3	3	20	0,0093	0,19	0,93
8	6	4	2	15	0,0040	0,06	0,99
9	6	5	1	6	0,0017	0,01	1,00
10	6	6	0	1	0,0007	0,00	1,00
11				p =	***0,30***	1,00	
12				1-p =	***0,70***		

Рис. 3.32. Розрахунки біноміального розподілу (n = 6; p = 0,30)

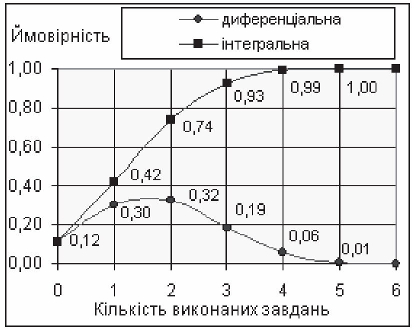


Рис. 3.33. Графіки біноміального розподілу (n = 6; p = 0,30)

Для «сумлінного» студента ймовірність p елементарної бажаної події складатиме більше 50%, наприклад, 70% або 0,7. На рис. 3.34 і 3.35 наведено розрахунки для $n = 6$, $p = 0{,}7$, а також відповідні графіки розподілу.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Розрахунки окремих значень					Ймовірність	
2						$P_n(m)$	$P^*_n(m)$
3	n	m	n-m	C_n^m	$p^m(1-p)^{n-m}$	диференціальна	інтегральна
4	6	0	6	1	0,0007	0,00	0,00
5	6	1	5	6	0,0017	0,01	0,01
6	6	2	4	15	0,0040	0,06	0,07
7	6	3	3	20	0,0093	0,19	0,26
8	6	4	2	15	0,0216	0,32	0,58
9	6	5	1	6	0,0504	0,30	0,88
10	6	6	0	1	0,1176	0,12	1,00
11				p =	***0,70***	1,00	
12				1-p =	***0,30***		

Рис. 3.34. Розрахунки біноміального розподілу (n = 6; p = 0,70)

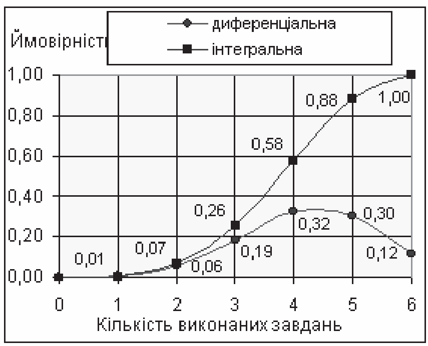


Рис. 3.35. Графіки біноміального розподілу (n = 6; p = 0,70)

Різницю між біноміальними розподілами для різних значень ймовірностей елементарних бажаних подій можна спостерігати на відповідних графіках. Пропонуємо самостійно прокоментувати рис. 3.31, 3.33 і 3.35.

Основні показники центральної тенденції і варіативності для біноміального розподілу визначаються так:

- середнє арифметичне $\overline{X} = n \cdot p$;
- дисперсія $s_x^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$;
- стандартне відхилення $s_x = \sqrt{s_x^2}$.

На рис. 3.36 у табличній формі показана залежність цих показників розподілу від ймовірності *p* елементарної бажаної події.

	A	B	C	D	E
1	Параметри		Байдужий	Слабкий	Сумлінний
2	Кількість елементарних подій	n	6	6	6
3	**Ймовірність бажаної події**	p	**0,50**	**0,30**	**0,70**
4	Ймовірність небажаної події	1-p	0,50	0,70	0,30
5	Середнє	$\overline{X}$	**3,00**	**1,80**	**4,20**
6	Дисперсія	s_x^2	1,50	1,26	1,26
7	Ст. відхилення	s_x	1,22	1,12	1,12

Рис. 3.36. Залежність МЦТ і ММ від ймовірності події *p*

Як бачимо з таблиці рис. 3.36, для «байдужого» студента (p = 0,5) середнє значення складає 3 бажаних події, для «слабкого» (p = 0,3) – в середньому 1,8 бажаних подій; для «сумлінного» студента (p = 0,7) – в середньому 4,2 бажаних подій з 6 можливих.

На прикладі *біноміального* розподілу можна продемонструвати загальну методику використання теоретичних функцій розподілу в рішенні реальних практичних завдань.

Приклад 3.19. У таблиці рис. 3.37 розраховано розподіл за емпіричними даними (іспити студентів за тестами) і теоретичний біноміальний розподіл з ймовірностями успіху $p(1)$ = 0,50 і неуспіху $p(0)$ = 1– $p(1)$ = 1–0,50 = 0,50.

	A	B	C	D	E
1	Розподіли				
2	емпіричний			теоретичний	
3	x_i	m_i	m_i/n	x_i	$b(x;n;p;0)$
4	0	0	0,00	0	0,02
5	1	1	0,06	1	0,09
6	2	1	0,10	2	0,23
7	3	2	0,16	3	0,31
8	4	4	0,27	4	0,23
9	5	5	0,32	5	0,09
10	6	2	0,09	6	0,02
11		15	1,00		1,00
12	Ймовірність		"успіху"	p =	**0,50**
13			"неуспіху"	1-p =	**0,50**

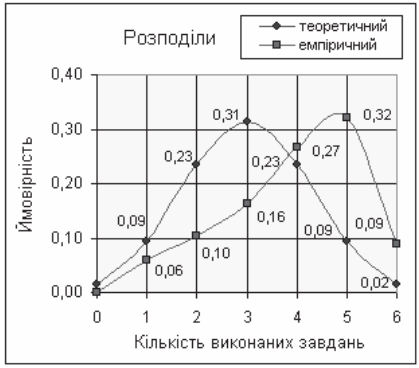


Рис. 3.37. Емпіричний і теоретичний розподіли

Як видно з рис. 3.37, графік емпіричного розподілу «реальної ситуації» суттєво відрізняється від теоретичного так званого варіанту «50/50». Це дає підстави сподіватися на те, що реальні результати іспитів зумовлені більшою ймовірністю «успіхів» елементарних подій, тобто $p(1) > p(0)$.

Математично *реальну здатність* студентів до успішного виконання завдань (що зумовлюють компетентність, мотивація, інтелект або інші чинники) можна зафіксувати через невідому (поки що) ймовірність p^*. Знайти ймовірність p^* можна навіть простим добором (збільшуючи або зменшуючи) значення показника ймовірності p так, щоб наблизити («підтягнути») графік теоретичного розподілу до графіка емпіричного розподілу. Зрозуміло, що таке наближення «ручним» шляхом не є ефективним.

Завдання: визначити ймовірність p^*.

Рішення:

Оптимального значення ймовірності p^* можна досягти з використанням комп'ютерних інтерактивних можливостей MS Excel у такій послідовності:

- за допомогою миші активізувати і наблизити донизу точку графіка теоретичного розподілу зі значенням, наприклад, 0,31 до точки емпіричного розподілу зі значенням 0,16 (див. рис. 3.38).
- внаслідок цього з'явиться діалогове вікно «Добір параметра», в якому встановити відповідні значення параметрів, як зображено на рис. 3.39;

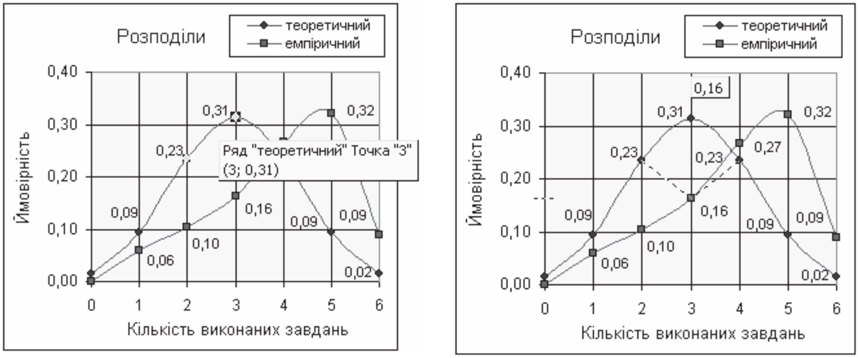


Рис. 3.38. Наближення теоретичного розподілу до емпіричного

- після команди ОК отримати повідомлення про результат добору параметра – «Рішення знайдено» (рис. 3.40);

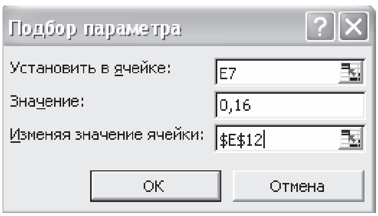


Рис. 3.39. Вікно «Добір параметра»

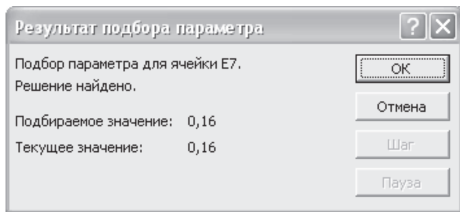


Рис. 3.40. Вікно «Результати добору параметра»

- в результаті у комірці E12 з'явиться нове перераховане значення ймовірності *p*, яке дорівнюватиме 0,72, а в електронній таблиці – відповідні перераховані значення теоретичної функції. Зміниться також і форма графіка цієї функції, який наблизиться до графіка емпіричного розподілу (рис. 3.41).

	A	B	C	D	E
1	Розподіли				
2	емпіричний			теоретичний	
3	x_i	m_i	m_i/n	x_i	$b(x;n;p;0)$
4	0	0	0,00	0	0,00
5	1	1	0,06	1	0,01
6	2	1	0,10	2	0,05
7	3	2	0,16	3	0,16
8	4	4	0,27	4	0,31
9	5	5	0,32	5	0,33
10	6	2	0,09	6	0,14
11		15	1,00		1,00
12	Ймовірність		"успіху"	p =	**0,72**
13			"неуспіху"	1-p =	**0,28**

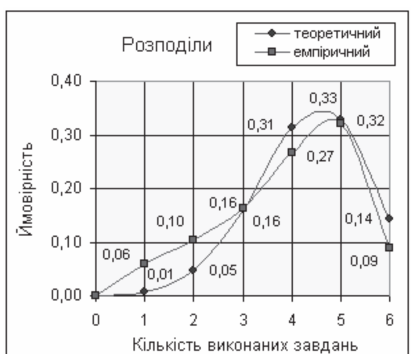


Рис. 3.41. Наближення теоретичного розподілу до емпіричного

Відповідь: ймовірність «успіху» складає приблизно 72% ($p = 0{,}72$) і більш ніж удвічі перевищує ймовірність протилежних наслідків $(1-p) = 0{,}28$. У змістовному плані це може означати, що, по-перше, результати тестування з більшою ймовірністю можна приймати за наслідок спроможності студентів до успішного виконання завдань, по-друге, – процедура іспиту має певний рівень діагностичних властивостей щодо навчальних досягнень студентів.

Нормальний розподіл

Роботи Я. Бернуллі, а також приватні дослідження інших математиків XVII-XVIII ст. з Європи згодом оформилися в теорію ймовірності. У початковий період розвитку основною проблемою даної теорії було визначення ймовірності складної події при нагоді певної кількості незалежних появ на зразок розглянутих вище випробувань з підкиданням монет. Формула для таких завдань була визначена, проте для великих обсягів (наприклад, обчислити ймовірність того, що при 20 000 підкидань монети випадуть 5000 або більше «гербів») такі обчислення виглядали дуже громіздкими.

На початку XVIII ст. де Муавру (1667-1754) вдалося апроксимувати біноміальний розподіл за допомогою формули

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (3.57)$$

де $f(x)$ – ймовірність; μ і σ – середнє і стандартне відхилення. Функція $f(x)$ отримала назву *щільності нормального розподілу*.

Функція нормального розподілу визначається через щільність

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,. \qquad (3.58)$$

MS Excel містить функцію =НОРМРАСП(x; μ; σ; l), яка повертає значення або функції $\Phi(x)$, або функції щільності $f(x)$ для заданих μ і σ. Параметр l визначає форму функції: якщо l=0, =НОРМРАСП() повертає значення $\Phi(x)$, інакше $f(x)$. На рис. 3.42 приведено формули розрахунку розподілів з використанням функцій MS Excel =БИНОМРАСП() і =НОРМРАСП().

	A	B	C	D
1		Біноміальний	Нормальний	|b(x)-f(x)|
2	x_i	$b(x; n; p)$	$f(x; \mu; \sigma)$	
3	0	=БИНОМРАСП(A3;$B$10;$B$11;0)	=НОРМРАСП(A3;$B$12;$B$13;0)	=ABS(B3-C3)
4	1	=БИНОМРАСП(A4;$B$10;$B$11;0)	=НОРМРАСП(A4;$B$12;$B$13;0)	=ABS(B4-C4)
5	2	=БИНОМРАСП(A5;$B$10;$B$11;0)	=НОРМРАСП(A5;$B$12;$B$13;0)	=ABS(B5-C5)
6	3	=БИНОМРАСП(A6;$B$10;$B$11;0)	=НОРМРАСП(A6;$B$12;$B$13;0)	=ABS(B6-C6)
7	4	=БИНОМРАСП(A7;$B$10;$B$11;0)	=НОРМРАСП(A7;$B$12;$B$13;0)	=ABS(B7-C7)
8	5	=БИНОМРАСП(A8;$B$10;$B$11;0)	=НОРМРАСП(A8;$B$12;$B$13;0)	=ABS(B8-C8)
9	6	=БИНОМРАСП(A9;$B$10;$B$11;0)	=НОРМРАСП(A9;$B$12;$B$13;0)	=ABS(B9-C9)
10	n =	6		=СУММ(D3:D9)/B10
11	p =	0,5		
12	μ =	=B10/2		
13	σ =	=КОРЕНЬ(B10*B11*(1-B11))		

Рис. 3.42. Формули розрахунку розподілів (n = 6; p = 0,5; μ = 3; σ = 1,22)

На рис. 3.43 і 3.44 представлено результати розрахунку щільності біноміального і нормального розподілів і відповідні графіки для двох наборів параметрів: перший (n = 6; p = 0,5; μ = 3; σ = 1,22) і другий (n = 10; p = 0,5; μ = 5 і σ = 1,58). Значення μ і σ отримано з біноміального розподілу.

	A	B	C	D
1		Біноміальний	Нормальний	|b(x)-f(x)|
2	x_i	$b(x; n; p)$	$f(x; \mu; \sigma)$	
3	0	1,56%	1,62%	0,06%
4	1	9,38%	8,59%	0,79%
5	2	23,44%	23,34%	0,10%
6	3	31,25%	32,57%	1,32%
7	4	23,44%	23,34%	0,10%
8	5	9,38%	8,59%	0,79%
9	6	1,56%	1,62%	0,06%
10	n =	6		0,54%
11	p =	0,50		
12	μ =	3,00		
13	σ =	1,22		

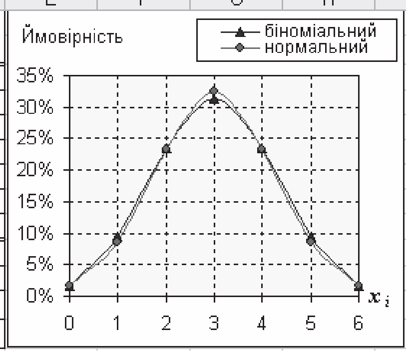


Рис. 3.43. Біноміальний і нормальний розподіли (n = 6; p = 0,5; μ = 3; σ =1,22)

Порівнюючи графіки кривих біноміального і нормального розподілів, можна констатувати, що функція нормального розподілу цілком задовільно апроксимує функцію біноміального розподілу. Більш того, із збільшенням обсягу вибірки n відхилення значень нормального і біноміального розподілів $\sum|b(x)-f(x)|\ /n$ зменшується (для n = 6 складає 0,54% ; для n = 10 – 0,24%).

	A	B	C	D
1		Біноміальний	Нормальний	$\lvert b(x)\text{-}f(x)\rvert$
2	x_i	$b(x; n; p)$	$f(x; \mu; \sigma)$	
3	0	0,10%	0,17%	0,07%
4	1	0,98%	1,03%	0,05%
5	2	4,39%	4,17%	0,22%
6	3	11,72%	11,34%	0,38%
7	4	20,51%	20,66%	0,15%
8	5	24,61%	25,23%	0,62%
9	6	20,51%	20,66%	0,15%
10	7	11,72%	11,34%	0,38%
11	8	4,39%	4,17%	0,22%
12	9	0,98%	1,03%	0,05%
13	10	0,10%	0,17%	0,07%
14	$n =$	10		0,24%
15	$p =$	0,50		
16	$\mu =$	5,00		
17	$\sigma =$	1,58		

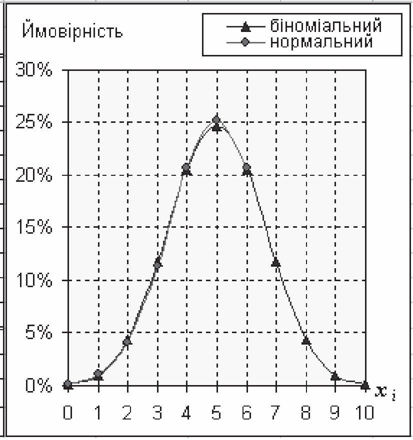


Рис. 3.44. Біноміальний і нормальний розподіли (n =10; p = 0,5; μ=5; σ = 1,58)

Універсальність функції щільності нормального розподілу полягає в тому, що вона використовує у якості своїх аргументів одні з основних характеристик сукупностей – середнє μ і стандартне відхилення σ, а також «працює» і для дискретних, і для неперервних величин.

Формула щільності нормального розподілу (3.56) задає лише деяку типову форму графіка у вигляді симетричного «дзвону», відомого під назвою *нормальної кривої*. Міняючи значення μ і σ, можна зрушувати конкретну нормальну криву вздовж числової осі ординат і міняти її розмах .

На рис. 3.45 графіки нормальних розподілів побудовано для сукупностей, які мають різні середні μ і різні стандартні відхилення σ. Пропонуємо проаналізувати схожість і різницю цих розподілів щільності.

	A	B	C	D	E
1		Нормальний розподіл			
2	$\mu =$	5,0	5,0	3,0	3,0
3	$\sigma =$	1,58	1,00	1,00	1,58
4	x_i	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
5	0	0,2%	0,0%	0,4%	4,2%
6	1	1,0%	0,0%	5,4%	11,3%
7	2	4,2%	0,4%	24,2%	20,7%
8	3	11,3%	5,4%	39,9%	25,2%
9	4	20,7%	24,2%	24,2%	20,7%
10	5	25,2%	39,9%	5,4%	11,3%
11	6	20,7%	24,2%	0,4%	4,2%
12	7	11,3%	5,4%	0,0%	1,0%
13	8	4,2%	0,4%	0,0%	0,2%
14	9	1,0%	0,0%	0,0%	0,0%
15	10	0,2%	0,0%	0,0%	0,0%

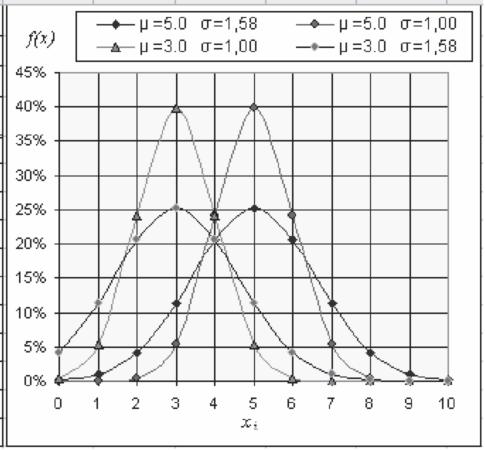


Рис. 3.45. Сім'я графіків щільності нормального розподілу

Популярність нормального розподілу обґрунтовано висновками центральної граничної теореми, оскільки в природі, соціальній, педагогічній сферах і ситуаціях багато випадкових величин є сумами декількох випадкових факторів. Серед сімейства нормальних розподілів особливе місце займає розподіл, який має нульове середнє $\mu = 0$ і одиничне стандартне відхилення $\sigma = 1$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{z^2}{2}\} \tag{3.59}$$

Графік відповідного розподілу називається *стандартним нормальним розподілом*. Значення і функції щільності $f(z)$, і розподілу $\Phi(z)$ можна отримати за допомогою або спеціальних таблиць[18], або комп'ютерних програм, зокрема, функцій MS Excel =НОРМРАСП() і =НОРМСТРАСП() (див. рис. 3.46).

Стандартному нормальному розподілові притаманні такі властивості:

- площа, яка має сенс ймовірності під графіком щільності, дорівнює 1;
- крива графіку не перетинає вісь z хоча і наближається до неї у міру того, як z стає більше трьох, але ніколи її не торкається;
- найвища точка кривої щільності розподілу 0,3989 розташована над нульовим значенням z ;

[18] Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1965 (1-е изд.), 1968 (2-е изд.), 1983 (3-е изд.).

	A	B	C
1	z	$f(z)$	$\Phi(x)$ (%)
2	-5,0	0,00000	0,000%
3	-4,5	0,00002	0,000%
4	-4,0	0,00013	0,003%
5	-3,5	0,00087	0,023%
6	-3,0	0,00443	0,135%
7	-2,5	0,01753	0,621%
8	-2,0	0,05399	2,275%
9	-1,5	0,12952	6,681%
10	-1,0	0,24197	15,866%
11	-0,5	0,35207	30,854%
12	0,0	0,39894	50,000%
13	0,5	0,35207	69,146%
14	1,0	0,24197	84,134%
15	1,5	0,12952	93,319%
16	2,0	0,05399	97,725%
17	2,5	0,01753	99,379%
18	3,0	0,00443	99,865%
19	3,5	0,00087	99,977%
20	4,0	0,00013	99,997%
21	4,5	0,00002	100,000%
22	5,0	0,00000	100,000%

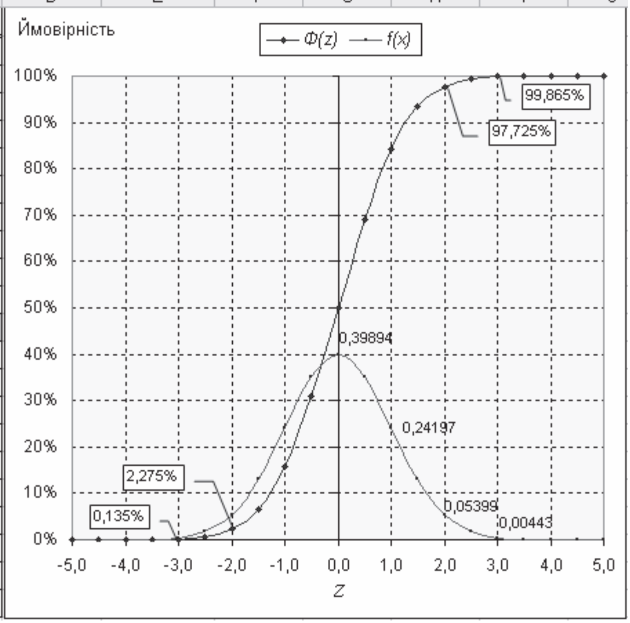


Рис. 3.46. Значення і графіки стандартного нормального розподілу

- стандартна нормальна крива завжди буде симетричною щодо вертикалі, проведеної через $z = 0$, її *асиметрія* і *ексцес* дорівнюють нулю;
- всяку іншу нормальну криву можна сумістити із стандартною за допомогою операції *нормалізації* (перехід від змінної x до z див. розділ 2.2)

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}; \tag{3.60}$$

- якщо випадкові величини X_1 і X_2 мають функції нормального розподілу $N(\mu_1; \sigma_1)$ і $N(\mu_2; \sigma_2)$ відповідно, то випадкова величина $(X_1 + X_2)$ має нормальний розподіл $N(\mu_1 + \mu_2; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$;
- якщо випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ є незалежними і мають один той самий розподіл $N(\mu; \sigma)$, то їхнє середнє арифметичне $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ має нормальний розподіл $N(\mu; \sigma / \sqrt{n})$.

Як відомо, площа під кривою функції щільності має сенс ймовірності. Загальна площа під нормальною кривою, де абсциса z змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, дорівнює 1. А це значить, що ймовірність p того, що z будуть приймати будь які значення (від $-\infty$ до $+\infty$), дорівнюватиме 1 (або 100%).

Ймовірність того, що z прийматиме значення від z_1 до z_2, дорівнюватиме значенню відповідної *площі* під нормальною кривою, обмежену з боків цими значеннями. Для нормованої нормальної кривої (де $\sigma = 1$) значення z можна записувати в одиницях стандартного відхилення σ, наприклад «z змінюється від -1σ до $+1\sigma$», або «z змінюється від –1 до +1».

Для значень z від -1σ до $+1\sigma$ площа (і відповідна ймовірність приймати значення $\mu \pm \sigma$) дорівнюватиме 0,683 (або ймовірність 68,3%).

Для значень z від -2σ до $+2\sigma$ площа (і відповідна ймовірність приймати значення $\mu \pm 2\sigma$) дорівнює 0,954 (або 95,4%).

Для значень z від -3σ до $+3\sigma$ площа (і відповідна ймовірність) дорівнює 0,997 (або 99,7%). Слід звернути увагу на те, що 99,7% значень сукупності (тобто практично всі її значення) знаходяться в межах середнього $\mu \pm 3\sigma$. Цей факт отримав своєрідну назву «*закон трьох сигм*».

Як отримати значення ймовірностей з використанням нормального розподілу? Поряд з класичними формулами, які виглядають занадто громіздкими і дуже незручними, існують спеціально розраховані статистичні таблиці. Проте найпотужнішим способом вважаються комп'ютерні засоби.

Щоб підрахувати ймовірність (площу), наприклад, для значень z від -1σ до $+1\sigma$, необхідно виконати 3 дії:

- визначити ймовірність p_1 для z від $-\infty$ до -1σ за допомогою функції =НОРМРАСП(–1; 0; 1; 1), яка поверне значення 15,866%;
- визначити ймовірність p_2 для z від $-\infty$ до $+1\sigma$ за допомогою функції =НОРМРАСП(+1; 0; 1; 1), яка поверне значення 84,134%;
- визначити $p = p_2 - p_1$ = 84,134% – 15,866% = 68,269% ≈ 68,3%..

В математичній статистиці часто виникає необхідність вирішувати зворотні завдання типу: «визначити z, якому відповідає певна ймовірність p». Наприклад, для якого значення z, починаючи від $-\infty$, ймовірність складатиме 5%?

З математичної точки зору необхідно визначити таке z, яке обмежує ординатою зліва 5% площі під нормальною кривою (див. рис. 3.47).

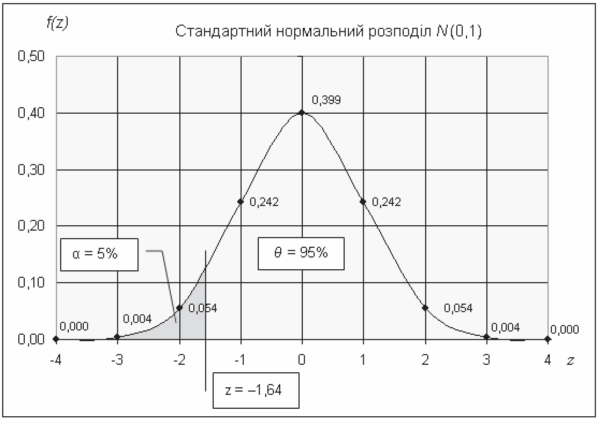


Рис. 3.47. Розподіл $N(0,1)$ має параметр $z_{0,05} \approx -1,64$

Традиційно це завдання також вирішувалося за допомогою спеціальних статистичних таблиць. Проте, можна запропонувати використовувати функцію MS Excel =НОРМОБР(p; μ; σ), яка повертає значення z для заданих ймовірності p, середнього μ, стандартного відхилення σ. Так, для $p \leq 0,05$, $\mu = 0$ і $\sigma = 1$ функція =НОРМОБР(0,05; 0; 1) поверне значення $z \approx -1,64485$. Аналогічно для $p \leq 0,01$ =НОРМОБР(0,01;0;1) поверне значення $z \approx -2,32635$ і т.д.

Для безлічі нормальних кривих, що відрізняються один від одного значеннями μ і σ, важливою загальною властивістю є те, що будь-яка частина площі (яка асоціює ймовірність) під нормальною кривою може бути виражена в середніх μ і стандартних відхиленнях σ. Наприклад, в будь-якому нормальному розподілі приблизно 95% площі під кривою лежить в межах *двох* σ від середнього μ (якщо точно визначати, то 95% площі лежить в межах середнього μ від $-1,96\sigma$ до $+1,96\sigma$ (див. рис. 3.48);

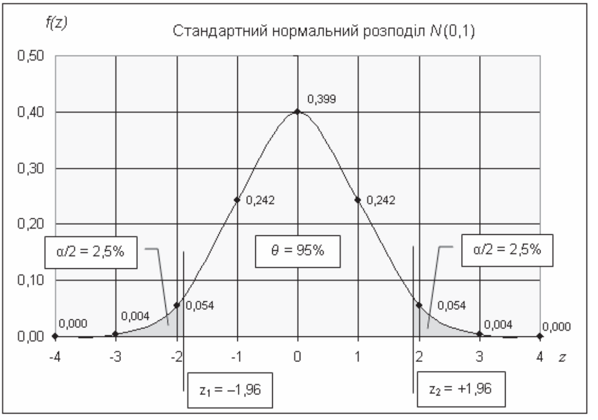


Рис. 3.48. Розподіл $N(0,1)$ має параметр $|z_{0,025}| \approx 1,96$

Важливість використання в різноманітних педагогічних і психологічних дослідженнях *нормального розподілу* пояснюється висновками *центральної граничної теореми*, яка є фундаментальним проявом *закону великих чисел*. Між тим в конкретних прикладних задачах нормальність результатів випробувань встановити із загальних міркувань, як правило, не можливо. Нормальність варто перевіряти за допомогою статистичних критеріїв, або ж використовувати непараметричні методи (див. розділ 5.3).

Розподіли «*хі-квадрат*», *Стьюдента* і *Фішера*

При побудові статистичних моделей нормальному законові безумовно належить центральне місце. Проте намагання використовувати його для моделювання розподілу емпіричних даних у будь-якому разі не завжди є обґрунтованими. Більш істотно те, що багато методів обробки даних засновано на розрахункових величинах, що мають хоча й інші, але близькі розподіли до розподілу нормального. Крім того, за допомогою нормального закону визначаються широко розповсюджені в математичній статистиці розподіли χ^2 (*хі-квадрат*), *t Стьюдента* і *F Фішера*.

Розподіл χ^2 (хі-квадрат) – це розподіл випадкової величини

$$X = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2, \tag{3.61}$$

де випадкові величини X_1, X_2, ..., X_n є незалежними і мають той самий стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$. Кількість доданків n називається «числом ступенів вільності» розподілу хі-квадрат.

Розподіл t Стьюдента – це розподіл випадкової величини

$$T = \frac{U\sqrt{n}}{\sqrt{X}}, \tag{3.62}$$

де випадкові величини U і X незалежні, U має стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$, а X – розподіл хі-квадрат з n ступенями вільності. При цьому n називається «числом ступенів вільності» розподілу Стьюдента.

Розподіл *F* Фишера – це розподіл випадкової величини

$$F = \frac{\frac{1}{k_1} X_1}{\frac{1}{k_2} X_2}, \tag{3.63}$$

де випадкові величини X_1 і X_2 – незалежні і мають розподіли хі-квадрат з числом ступенів вільності k_1 і k_2 відповідно.

Отже, розподіли χ^2 (*хі-квадрат*), *t Стьюдента* і *F Фішера* є похідними від нормального закону. Розглянемо властивості цих розподілів докладніше.

Розподіл χ^2 «хі-квадрат» можна отримати за схемою повторних випробувань, якщо з генеральної сукупності нормально розподілених значень з нульовим середнім (μ=0) і одиничним стандартним відхиленням (σ=1) випадковим методом вилучати незалежно n значень X_1, X_2, ..., X_n, а потім розраховувати суму їх квадратів $(X_1)^2 + (X_2)^2 + \ldots + (X_n)^2$. У результаті багаторазових випробувань значення цих сум будуть мати розподіл χ_n^2 (хі-квадрат) з n степенями вільності. Аналітична форма запису щільності розподілу χ_n^2 має вигляд:

$$f_{\chi^2}(x,n) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, \tag{3.64}$$

де $f_{\chi 2}(x, n)$ – функція щільності розподілу χ^2; n – число ступенів вільності; Г() – гама-функція, яка зручно розраховується в Excel за допомогою виразу =EXP(ГАММАНЛОГ()). Функція $f_{\chi 2}$ $(x, n)>0$ для $x \geq 0$ і $f_{\chi 2}$ $(x, n)=0$ для $x<0$.

На рис. 3.49. показано розрахунки значень і графіки щільності розподілу χ^2 для трьох ступенів вільності (2; 3 і 5).

	A	B	C	D
1	n =	2	3	5
2	1/Г(n/2) =	1,00	1,13	0,75
3	A =	0,50	0,40	0,13
4	x	Розподіл хі-квадрат		
5	0	0,49751	0,03970	0,00013
6	1	0,30327	0,24197	0,08066
7	2	0,18394	0,20755	0,13837
8	3	0,11157	0,15418	0,15418
9	4	0,06767	0,10798	0,14398
10	5	0,04104	0,07322	0,12204
11	6	0,02489	0,04865	0,09730
12	7	0,01510	0,03187	0,07437
13	8	0,00916	0,02067	0,05511
14	9	0,00555	0,01330	0,03989
15	10	0,00337	0,00850	0,02833

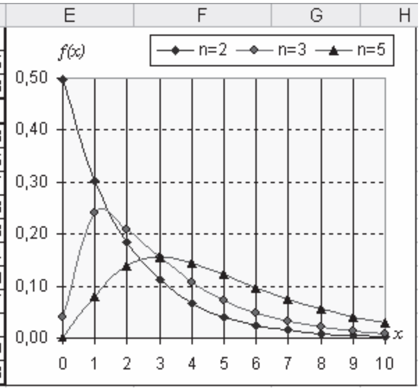


Рис. 3.49. Розрахунки і графіки щільності розподілу χ^2

Для розрахунку розподілу χ^2 з числом ступенів вільності, наприклад, n=2 необхідно внести:

- у комірку B2 вираз =1/EXP(ГАММАНЛОГ(B$1/2));
- у комірку B3 вираз =B2/2^(B$1/2);
- у комірку B5 вираз =B$3*$A5^(B$1/2-1)*EXP(-$A5/2);
- у комірки B6:B15 – аналогічні вирази.

У стовпчиках C і D розраховано значення розподілу χ^2 для числа ступенів вільності n=3 і n=5.

Як видно з графіків, при збільшенні числа ступенів вільності n розподіл χ^2 наближається до нормального розподілу з середнім n і стандартним відхиленням $\sqrt{2n}$. Якщо дисперсію можна записати як суму квадратів n незалежних випадкових значень випробувань X_1, X_2, ..., X_n, наприклад,

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2) = \frac{1}{n-1}(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) - \frac{n\overline{X}^2}{n-1},$$

то величина s_x^2 може мати розподіл χ^2_n. Тому природно, що розподіли χ^2 використовують у статистичних висновках щодо дисперсій (див. розділ 5.4) .

Розподіл t Стьюдента. Властивості нормального розподілу можна використовувати лише тоді, коли обсяг вибірки n є «достатньо великим» – на це звертає увагу *центральна гранична теорема.* Проте в реальних умовах обсяг вибірки, як правило, не є «достатньо великим». У цих умовах використовують інші розподіли. Одним із найважливіших вважається розподіл *Стьюдента*:

$$f_t(x,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\cdot\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad (3.65)$$

де $f_t(x,\ n)$ – функція щільності розподілу Стьюдента; n – число ступенів вільності; Г() – гама-функція.

На рис. 3.50. показано розрахунки розподілу Стьюдента для ступенів вільності (1; 2 і 8) і для порівняння відповідні значення нормального розподілу.

Для розрахунку щільності розподілу Стьюдента з числом ступенів вільності n=1 необхідно внести:

- у комірку B2 вираз =EXP(ГАММАНЛОГ((B$1+1)/2));
- у комірку B3 вираз =EXP(ГАММАНЛОГ(B$1/2));
- у комірку B4 вираз =B2/B3/КОРЕНЬ(B$1*ПИ());
- у комірку B7 вираз =B$4*(1+$A7^2/B$1)^(-(B$1+1)/2);
- у комірки B8:B19 внести аналогічні вирази;

У стовпчиках C і D розраховано значення розподілу Стьюдента для числа ступенів вільності n=2 і n=8. У стовпчику E – значення щільності нормального розподілу, для чого, наприклад, у комірку E7 слід внести вираз =НОРМРАСП(A7;0;1;0).

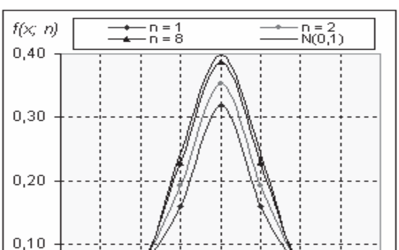
Розподіли Стьюдента для трьох ступенів вільності (1; 2 і 8) можна розрахувати за допомогою функції =СТЬЮДРАСП(). Так, у комірку F7 необхідно внести =СТЬЮДРАСП(ABS($A7);F$1;1), аналогічні вирази внести у комірки F8:F13. У комірку F14 внести =1–СТЬЮДРАСП(ABS($A14);F$1;1), аналогічні вирази внести у комірки F15:F19. Такі ж дії провести у стовпчиках G і H.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n =	1	2	8		1	2	8	
2	Г((n+1)/2) =	1,00	0,89	11,63					
3	Г(n/2) =	1,77	1,00	6,00					
4	A =	0,32	0,35	0,39					
5		Щільність				Розподіл			
6	x	Стьюдента			НР	Стьюдента			НР
7	-6	0,0086	0,0043	0,0002	0,0000	0,0526	0,0133	0,0002	0,0000
8	-5	0,0122	0,0071	0,0007	0,0000	0,0628	0,0189	0,0005	0,0000
9	-4	0,0187	0,0131	0,0028	0,0001	0,0780	0,0286	0,0020	0,0000
10	-3	0,0318	0,0274	0,0130	0,0044	0,1024	0,0477	0,0085	0,0013
11	-2	0,0637	0,0680	0,0624	0,0540	0,1476	0,0918	0,0403	0,0228
12	-1	0,1592	0,1925	0,2276	0,2420	0,2500	0,2113	0,1733	0,1587
13	0	0,3183	0,3536	0,3867	0,3989	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
14	1	0,1592	0,1925	0,2276	0,2420	0,7500	0,7887	0,8267	0,8413
15	2	0,0637	0,0680	0,0624	0,0540	0,8524	0,9082	0,9597	0,9772
16	3	0,0318	0,0274	0,0130	0,0044	0,8976	0,9523	0,9915	0,9987
17	4	0,0187	0,0131	0,0028	0,0001	0,9220	0,9714	0,9980	1,0000
18	5	0,0122	0,0071	0,0007	0,0000	0,9372	0,9811	0,9995	1,0000
19	6	0,0086	0,0043	0,0002	0,0000	0,9474	0,9867	0,9998	1,0000

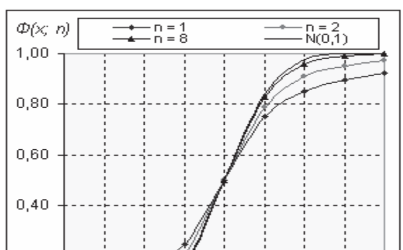
Рис. 3.50. Значення розподілів Стьюдента і розподілу $N(0,1)$

Для розрахунку нормального розподілу у комірку I7 внести вираз =НОРМРАСП(A7;0;1;1), аналогічні вирази внести у комірки I8:I19.

На рис. 3.51. показано сімейство графіків розподілу Стьюдента для трьох ступенів вільності (1; 2; 8), а також графік стандартного нормального розподілу $N(0,1)$.



а) щільності розподілу



б) розподіли

Рис. 3.51. Графіки розподілів Стьюдента і нормального розподілу $N(0,1)$

Як видно, при збільшенні числа ступенів вільності n розподіли Стьюдента асимптотично наближаються до нормального розподілу. Коли обсяг вибірки n стає «достатньо великим», тобто практично $n \to \infty$, розподіли *Стьюдента* збігаються з нормальним розподілом. Найчастіше розподіли *Стьюдента* використовують у статистичних висновках щодо *середніх* (див. розділ 5.4).

Розподіл *F* Фішера можна отримати, використовуючи схему повторних випробувань, коли з генеральної сукупності нормально розподілених значень з параметрами (μ=0 і σ=1) випадковим методом спочатку формують першу змінну X_1 з розподілом «хі-квадрат» і степенями вільності n, а потім незалежним шляхом формують другу змінну X_2 з розподілом «хі-квадрат» і степенями вільності m. Нова випадкова величина, що має властивості розподілу Фішера, складатиметься з відношення

$$F = \frac{X_1}{n} \bigg/ \frac{X_2}{m}. \qquad (3.66)$$

Функція щільності розподілу Фішера має вигляд

$$f_F(x,n,m) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{n+m}{2}}, \qquad (3.67)$$

де $f_F(x, n, m)$ – функція щільності розподілу Фішера; n і m – число ступенів вільності; Г() – гама-функція.

На рис. 3.52. показано розрахунки і графіки щільності розподілу Фішера для трьох наборів ступенів вільності n і m (2 і 3; 5 і 4; 20 і 4 відповідно).

Для розрахунку розподілу Фішера, наприклад, з числом ступенів вільності n=2 і m=3 необхідно внести:

- у комірку B3 вираз =EXP(ГАММАНЛОГ((B$1+B$2)/2));
- у комірку B4 вираз =EXP(ГАММАНЛОГ(B$1/2));
- у комірку B5 вираз =EXP(ГАММАНЛОГ(B$2/2));
- у комірку B6 вираз =B3/B4/B5*(B$2/B$1)^(B$2/2);
- у комірку B7 вираз =B$6*$A8^(B$2/2-1)*(1+B$2/B$1*$A8)^(-(B$2+B$1)/2);

• у комірки B8:B18 – аналогічні B7 вирази.

	A	B	C	D
1	n =	2	5	20
2	m =	3	4	4
3	Г((n+m)/2) =	1,33	11,63	39916799,99
4	Г(n/2) =	1,00	1,33	362880,00
5	Г(m/2) =	0,89	1,00	1,00
6	A =	2,76	5,60	4,40
7	x	Розподіл Фішера		
8	0	0,0000	0,0000	0,0000
9	1	0,2789	0,3976	0,4935
10	2	0,1218	0,1520	0,1552
11	3	0,0673	0,0682	0,0469
12	4	0,0425	0,0351	0,0152
13	5	0,0293	0,0200	0,0054
14	6	0,0213	0,0123	0,0021
15	7	0,0163	0,0080	0,0008
16	8	0,0128	0,0055	0,0004
17	9	0,0103	0,0039	0,0002
18	10	0,0085	0,0028	0,0001

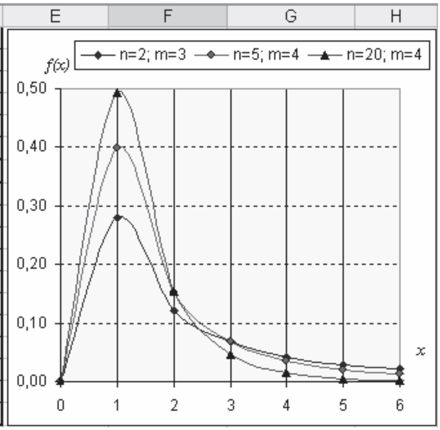


Рис. 3.52. Значення і графіки щільності розподілу Фішера

У стовпчиках C і D розраховано значення розподілу Фішера для інших наборів числа ступенів вільності *n* і *m*. З рис. 3.52. видно, що при збільшенні числа ступенів вільності *n* і *m* розподіл Фішера наближається до нормального розподілу з середнім $m/(n–2)$. Функція $f_F(x, n, m)>0$ для $x\geq 0$ і $f_F(x, n, m) = 0$ для $x<0$. Розподіл Фішера є теоретичною базою дисперсійного аналізу, що базується на зіставленні дисперсій вибірок випадково витягнутих із нормальної сукупності, відношення яких складає *F*-критерій Фішера: $F=s_1^2/s_2^2$, де s_1^2 і s_2^2 – дисперсії першої і другої вибірок (див. розділ 5.4).

Для порівняння властивостей розподілів «хі-квадрат», Стьюдента і Фішера їхні характеристики представлено в табл. 3.8.

На властивостях нормального розподілу, розподілів Стьюдента, Фішера хі-квадрат побудовано математичні методи статистичного оцінювання, перевірки статистичних гіпотез, дисперсійний аналіз та ін. (див. розділи 5 і 6). Таблиці значень цих розподілів можна знайти в спеціальній літературі або скористатися відповідними функціями MS Excel, зокрема: =НОРМРАСП(), =НОРМСТРАСП(), =ХИ2РАСП(), =СТЬЮДРАСП(), =FРАСП().

Таблиця 3.8

Характеристики розподілів

Параметри	Розподіли		
	Стьюдента t(x;n)	**Хі-квадрат** $\chi^2(x;n)$	**Фішера** F(x;n,m)
Щільність розподілу	$\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\cdot\pi}\cdot\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$	$\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}$	$\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\dfrac{m}{n}x\right)^{-\frac{n+m}{2}}$
Математичне сподівання	$\mathrm{M[(n)]=0}$	$\mathrm{M}[\chi^2(\mathrm{n})]=\mathrm{n}$	$\mathrm{M\,[F(n,m)\,]=\dfrac{m}{n-2}}$, при n>2
Дисперсія	$\mathrm{D[\,t(n)\,]=\dfrac{n}{n-2}}$, при n>2	$\mathrm{D}\,[\chi^2(\mathrm{n})]=2\mathrm{n}$	$\mathrm{D\,[F(n,m)\,]}=\dfrac{2\mathrm{m}^2(n+m-2)}{\mathrm{n(m-2)}^2(m-4)}$, при m>4
Станд. відхилення.	$\sigma[\mathrm{t(n)}]=\sqrt{\dfrac{\mathrm{n}}{\mathrm{n-2}}}$, при n>2	$\sigma[\chi^2(\mathrm{n})]=\sqrt{2\mathrm{n}}$	$\sigma[\mathrm{F(n,m)}]=\dfrac{\mathrm{m}\sqrt{2(n+m-2)}}{(\mathrm{m}-2)\sqrt{n(m-4)}}$, при m>4
Асиметрія	$\mathrm{A_s}=0$	$\mathrm{A_s}=\dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\mathrm{n}}}$	$A_s=\dfrac{(2\mathrm{n}+\mathrm{m}-2)\sqrt{8(m-4)}}{(\mathrm{m}-6)\sqrt{n(n+m-2)}}$, при m>6
Ексцес	$E_s=\dfrac{6}{n-4}$, при n>4	$E_s=\dfrac{12}{n}$	$E_s=\dfrac{3(m-6)(2+0.5A_s^2)}{n-8}$, при n>8

Запитання. Завдання.

1. Про що стверджує теорема Бернуллі?
2. При яких умовах «працює» біноміальний розподіл?
3. Який вигляд мають графіки диференціального та інтегрального біноміального розподілу?
4. Яка основна ідея загальної методики використання теоретичних функцій на прикладі біноміального розподілу в рішенні реальних завдань?
5. Розкрийте особливості функцій щільності нормального розподілу і функції нормального розподілу.

6. Охарактеризуйте стандартний нормальний розподіл.

7. Чим відрізняються розподіли Стьюдента, Фішера і «хі-квадрат» від нормального розподілу?

8. Повторіть математичні процедури завдань за прикладом 3.19.

9. Виконайте лабораторну роботу № 8.

4. СТАТИСТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ

Поняття статистичного оцінювання параметрів

Основною *метою* статистичного оцінювання є визначення дійсних параметрів *генеральної сукупності* на основі вивчення *вибіркових* показників. При цьому вибірка повинна достатньо добре відтворювати властивості генеральної сукупності, тобто бути *представницькою* або *репрезентативною*. Щоб досягти репрезентативності, використовують спеціальні методи формування вибірки. Найпоширенішими вважаються *рандомізовані* (*прості* і *систематичні*), *стратифіковані* та *кластерні* вибірки.

Проста рандомізована вибірка формується зі списку об'єктів генеральної сукупності за системою відбору, що гарантує *рівну ймовірність попадання* кожного об'єкта у вибірку. У цьому варіанті розрізняють три групи: всю генеральну сукупність; групу рандомізації, з якої проводиться відбір; експериментальну рандомізовану вибірку. На практиці способом випадкового відбору формують спочатку будь-яку групу потенційних випробовуваних. Після вимірювань властивостей їх розподіляють по групах *рівноімовірнісним* способом. В основу технологій рандомізації покладено процес генерації послідовності псевдовипадкових чисел.

Систематична рандомізована вибірка відповідає принципам рівноімовірнісного відбору і вважається оптимальною тоді, коли генеральна сукупність складає великий список об'єктів. Наприклад, для вибірки обсягом 100 об'єктів з генеральної сукупності обсягом 100000 можна визначити перший випадковий об'єкт (індекс), а потім взяти ще 99 випадкових індексів, причому кожний наступний об'єкт повинен відстояти від першого взятого на k позицій.

Стратифікована вибірка гарантує репрезентативність вибраних осіб по відношенню до обраних у дослідженні властивостей. Наприклад, якщо у складі досліджуваної сукупності присутніми є 600 осіб жіночої і 400 – чоловічої статі, то репрезентативна вибірка обсягом у 100 студентів повинна зберегти пропорційне (60% і 40%) представництво осіб кожної статі. У разі простої (або систематичної) рандомізованої вибірки якісне і кількісне співвідношення осіб може бути неадекватним до генеральної сукупності. Використання стратифікованої вибірки обмежено тим, що досить часто склад генеральної сукупності щодо основних підгруп залишається невідомим.

Кластерна вибірка здатна вирішувати проблему неповноти складу підгруп формування. Кластерний метод передбачає поетапний вибір груп (кластерів), а не окремих елементів. Наприклад, на першому етапі отримання репрезентативної вибірки студентів може виконуватися формування списку базових навчальних дисциплін. Тоді групою може бути список студентів різних спеціальностей, що відвідують заняття з певного навчального предмета. Якщо список дисциплін достатньо великий (30-40 груп), можна випадковим методом відібрати 8-10 таких груп. Якщо групи нечисленні, можна досліджувати всіх студентів, якщо ні – можна сформувати більш дрібні рандомізовані вибірки. Ступінь і глибина розгалуження (кількість етапів групування) визначається метою та умовами дослідження. Кластерні вибірки менш надійні, ніж імовірнісні із-зі наявності декількох етапів відбору, кожний з яких додає свою похибку. У разі ж рандомізованої вибірки дослідник ризикує лише один раз. Тому математична теорія вибіркового методу здебільшого базується на аналізі власно імовірнісної вибірки.

Теоретичну основу оцінювання з використанням вибіркового методу складає *закон великих чисел*, згідно з яким при необмеженому збільшені обсягу вибірки випадкові характеристики вибірки наближаються (сходяться за ймовірністю) до певних параметрів генеральної сукупності (див. розділ 3.3).. Наприклад, для скінченної генеральної сукупності вибіркове середнє $\overline{X}$ і дисперсія s_x^2 наближаються до своїх генеральних показників (середнього μ і дисперсії σ^2 відповідно). У разі нескінченної генеральної сукупності ($N = \infty$) замість середнього μ і дисперсії σ^2 мається на увазі математичне сподівання $M[X]$ і дисперсія $D[X]$ розподілу досліджуваної випадкової величини X.

Отже, генеральна сукупність (обсяг N) і вибірка (обсяг n) можуть характеризуватися тими ж самими змістовними показниками: для генеральної сукупності вони мають назву «*параметри*», для вибіркової сукупності – «*статистики*» (табл. 4.1). Статистики, що використовуються як наближене значення невідомого параметра генеральної сукупності називається статистичною оцінкою.

Таблиця 4.1

Основні показники генеральної і вибіркової сукупностей

Показники сукупностей	Генеральна сукупність параметри:	Вибірка статистики:
Середнє арифметичне	μ	$\overline{X}$
Дисперсія	σ^2	$s_x^{\ 2}$
Стандартне відхилення	σ	s_x
Коефіцієнт кореляції	ρ_{xy}	r_{xy}
Обсяг	N	n

Таким чином, *статистична оцінка* $\widetilde{\Theta}$ – це *вибіркова статистика*, яка містить інформацію про відповідний *параметр генеральної* сукупності Θ. Більш того, оцінювання параметра виконується на основі *статистики*, яка в свою чергу є *випадковою* величино, оскільки реалізується у випробуваннях як n незалежних *результатів спостережень* (наприклад, значень x_1, x_2, ..., x_{n} випадкової величини X). Отже, оцінка $\widetilde{\Theta}$ як випадкова величина залежить і від закону розподілу досліджуваної випадкової величини X, і від обсягу вибірки n.

Узагальнюючи вищесказане, ***оцінкою*** можна називати будь-яку *функцію результатів спостережень* $\widetilde{\Theta}(x_1, x_2, \cdots x_n)$, за допомогою якої роблять висновки щодо значення параметру генеральної сукупності $\Theta(X)$.

Проте в дослідженнях можна отримати декілька різних функцій від результатів спостережень, які можна використовувати у якості оцінки параметру. Наприклад, для оцінки математичного сподівання випадкової величини (генерального середнього) можна запропонувати вибіркові показники: середнє, моду, медіану, які (див. розділі 2.2) можуть приймати різні значення. Назвати «найкращий» показник як оцінку на основі індивідуального значення неможливо. Принципово це можна зробити лише на основі вибіркового розподілу оцінки, а саме: якщо розподіл оцінки $\widetilde{\Theta}_n$ концентрується поблизу істинного значення параметру Θ, то з більшою ймовірністю можна прийняти, що оцінка незначно відрізнятиметься від параметру. Строго кажучи: *математичне сподівання квадрату відхилення оцінки від параметра має бути якнайменшим*:

$$M[\widetilde{\Theta}_n - \Theta]^2 = \min . \tag{4.1}$$

Така основна умова стосовно «найкращої» оцінки.

Статистичне оцінювання підрозділяють на *точкове* та *інтервальне*.

Точкове оцінювання. Властивості статистичних оцінок

Точкове оцінювання застосовують для приблизної оцінки *параметрів* генеральної сукупності за *статистиками* вибірки. Спостережені вибіркові показники є статистичними оцінками параметрів генеральної сукупності з певною точністю (або з певними статистичними похибками). До того ж статистичні оцінки є випадковими величинами, яким притаманний неконтрольований розкид навіть, якщо вибірки взято з тієї ж самої генеральної сукупності.

При оцінюванні бажано, щоб втрата інформації, яка може бути суттєвою для прийняття статистичних рішень, була мінімальною. Отже, для того, щоб оцінки були надійними, вони мають відповідати деяким вимогам, тобто володіти певними властивостями.

Основними властивостями статистичних оцінок є *спроможність*, *незміщенність*, *ефективність*:

- ***Спроможність***. Статистична оцінка $\widetilde{\Theta}_n$ спроможна тоді, коли при постійному збільшенні обсягу вибірки ($n \to \infty$) вона наближається до значення параметра Θ, який оцінює. Статистика $\widetilde{\Theta}_n$ є спроможною оцінкою параметра Θ, коли для будь-якого додатного числа ε є справедливим співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\widetilde{\Theta}_n - \Theta| > \varepsilon\} = 0. \quad (4.2)$$

Наприклад, вибіркове середнє $\overline{X}$ є спроможною оцінкою генерального середнього μ, оскільки при збільшені числа випробувань $\overline{X}$ наближається до свого математичного сподівання (див. вираз (3.45)). Спроможною оцінкою вважається і вибіркова дисперсія.

Вимога спроможності означає, що оцінка має нести практичний сенс, наближати нас до істини і не бути абсурдною. З другого боку, у більшості ситуацій можна запропонувати декілька спроможних оцінок для одного й того ж самого параметра. Отже, властивість спроможності необхідна, але недостатня вимога. Її необхідно доповнити іншими вимогами.

- ***Незміщенність***. Статистика вважається незміщеною, якщо її математичне сподівання дорівнює параметру, що оцінюється. Вибіркове середнє $\overline{X}$ є незміщеною оцінкою генерального середнього μ, оскільки $M[\overline{X}]=\mu$, чого не можна сказати, наприклад, про вибіркові показники дисперсії. Для математичного сподівання можна записати

$$M[\overline{X}] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n} M[\sum_{i=1}^{n} x_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[x_i] = \mu. \quad (4.3)$$

Вибіркова дисперсія s^2 є *зміщеною* хоча і спроможною оцінкою відповідного параметра генеральної сукупності. Це можна довести таким математичним перетворенням

$$M[s^2] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2\right] = \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^{n}((x_i - M[x_i]) - (\overline{X} - M[x_i])^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - M[x_i])^2 - 2(\overline{X} - M[x_i]) \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - M[x_i]) + \sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - M[x_i])^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - M[x_i])^2 - 2(\overline{X} - M[x_i]) \cdot (n\overline{X} - nM[x_i]) + n(\overline{X} - M[x_i])^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - M[x_i])^2 - n(\overline{X} - M[x_i])^2\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} M[(x_i - M[x_i])]^2 - nM[(\overline{X} - M[x_i])^2]\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right] = \sigma^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}.$$

Отже, математичне сподівання вибіркової дисперсії дорівнює

$$M[s^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}. \quad (4.4)$$

Як видно, оцінка s^2 параметру σ^2 є зміщеною. Від'ємне зміщення дорівнює σ^2/n, залежить від обсягу вибірки n і в ситуації спроможності досягає нуля, якщо $n \to \infty$. Вимога незміщенності особливо чутлива для малої кількості спостережень. Ця вада оцінки s^2 усувається переходом до незміщенної оцінки

$$\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1}s^2. \quad (4.5)$$

• ***Ефективність***. Точкова оцінка називається ефективною, якщо вона має найменшу міру дисперсії вибіркового розподілу у порівнянні з аналогічними оцінками, тобто виявляє найменшу випадкову варіативність. Наприклад, серед трьох показників положення центру нормального розподілу (середнього $\overline{X}$, медіани Md і моди Mo) найбільш ефективною оцінкою вважається $\overline{X}$ і найменш ефективною – Mo, оскільки для їхніх дисперсій характерним є співвідношення $s^2_{\overline{X}} < s^2_{Md} < s^2_{Mo}$ [43, С. 100].

Для статистичного оцінювання параметрів генеральної сукупності бажано використовувати оцінки, які задовольняють одночасно вимоги спроможності, незміщенності й ефективності. Крім того, важливо знати, за якими методами відбувається вибір і побудова тієї чи іншої моделі статистичного оцінювання.

Методи статистичного оцінювання параметрів

Методи статистичного оцінювання розкривають математичні процедури, за допомогою яких будуються різні моделі «найкращого» оцінювання параметрів за результатами тих чи інших статистик. У прикладній статистиці розроблено багато видів оцінок[19], серед яких найчастіше використовуються ме-

[19] Див., наприклад, Кобзар А.И. Прикладная математическая статистика. – М., 2006 [37].

тоди моментів, максимальної правдоподібності, найменших квадратів, які стали вже «класичними», а також методи «цензурування», «урізування», використання порядкових статистик та ін.

Метод моментів

За цим методом (запропоновано К. Пірсоном) певна кількість вибіркових моментів (початкових v_k або центральних m_k, або тих і інших) прирівнюють до відповідних теоретичних моментів ($\tilde{v}_k$ або $\tilde{m}_k$) розподілу випадкової величини X. Нагадаємо, що вибіркові моменти визначаються за формулами (2.13 – 2.20), а відповідні теоретичні моменти – за формулами (3.14 – 3.39). Отже, оцінки невідомих параметрів є рішенням системи рівнянь. Кількість рівнянь визначається кількістю параметрів, що підлягають оцінюванню.

Приклад 4.1. Визначити точкові оцінки випадкової величини X, що має нормальний розподіл, за методом моментів.

Рішення:

Щільність нормального розподілу випадкової величини X має вигляд

$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ з двома невідомими параметрами: середнім $\mu = M[X]=\tilde{v}_1$ (3.36) і дисперсією $\sigma^2 = D[X]=\tilde{m}_2$ (3.37), які є першим початковим і другим центральним теоретичними моментами.

Відповідні вибіркові моменти мають вигляд: $v_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ і $m_2=v_2-v_1^2$.

Звідси визначається система з двох рівнянь:

$$\begin{cases}\mu=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\\ \sigma^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2\end{cases} \tag{4.6}$$

Рішення системи рівнянь дає оцінки середнього $\hat{\mu}_{мм}$ і дисперсії $\hat{\sigma}^2_{мм}$ за методом моментів

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{мм} = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2_{мм} = s^2_x \end{cases} \qquad (4.7)$$

Як бачимо, точковими оцінками середнього і дисперсії випадкової величини X, що має нормальний розподіл, є вибіркові середнє $\overline{X}$ і дисперсія s_x^2.

Оцінювання за методом моментів є спроможним, порівняно простим у розрахунках, але за показником ефективності не «найкращим». Основним методом отримання оцінок параметрів генеральної сукупності вважається метод максимальної правдоподібності, запропонований Р.Фішером.

Метод максимальної правдоподібності

Основу метода складає функція *правдоподібності* $L(x;\Theta)$, яка виражає ймовірність спільної появи результатів вибірки $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \Theta) = \varphi(x_1, \Theta) \cdot \varphi(x_2, \Theta) \cdots \varphi(x_n, \Theta).$$

Згідно з метод максимальної правдоподібності за оцінку невідомого параметра Θ приймається таке значення $\widetilde{\Theta}_n$, яке максимізує функцію $L(x;\Theta)$ [20].

Приклад 4.2. Визначити точкові оцінки параметрів випадкової величини X, що має нормальний розподіл, за методом максимальної правдоподібності.

Рішення:

Щільність нормального розподілу випадкової величини X визначається

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (4.8)$$

і має два параметри: середнє μ і дисперсію σ^2, які слід оцінити.

Функція *правдоподібності* має вигляд

$$L(x;\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\}. \quad (4.9)$$

Після логарифмування потримаємо

[20] Див., наприклад, Н.Кремер [41, С. 303-305].

$$\ln L = -\frac{n}{2}(\ln\sigma^2 + \ln(2\pi)) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 . \qquad (4.10)$$

Для знаходження параметрів μ і σ^2 часткові похідні за цими параметрами необхідно прирівняти нулю і розв'язати відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \dfrac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - \dfrac{n}{2\sigma^2} = 0 \end{cases} \qquad (4.11)$$

З першого рівняння (для σ^2>0) отримаємо

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = \sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}\mu) = \sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu = 0$, звідки $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, тобто

$$\hat{\mu}_{ммп} = \overline{X} . \qquad (4.12)$$

З другого рівняння після скорочення (для σ^2>0) і підстановки отримаємо

$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 - n = 0$, звідки $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$, тобто

$$\hat{\sigma}^2_{ммп} = s_x^2 . \qquad (4.13)$$

Таким чином, оцінками за методом максимальної правдоподібності математичного сподівання $\hat{\mu}_{ммп}$ і дисперсії $\hat{\sigma}^2_{ммп}$ випадкової величини X, що має нормальний розподіл, є відповідно вибіркове середнє $\overline{X}$ і вибіркова дисперсія s_x^2. Оцінки за методом моментів і методом максимальної правдоподібності для середнього і дисперсії співпадають, але тільки для випадкової величини X, що має *нормальний* розподіл.

Оцінки максимальної правдоподібності, як правило, є спроможними і асимптотично ефективними. Основний недолік цього методу пов'язаний з труднощами розрахунку оцінок, а також і те, що для побудови оцінок і забезпечення їх «найкращими» властивостями необхідно знати закон розподілу випадкової величини, що у багатьох випадках виявляється практично нереальним.

Метод найменших квадратів

В основі застосування методу найменших квадратів покладено умову *мінімізації суми квадратів відхилень* вибіркових даних від тих, що визначаються оцінкою.

Приклад 4.3. Визначити оцінку генерального середнього $\hat{\mu}_{мнк}$ випадкової величини X за методом найменших квадратів.

Рішення:

Згідно з умовою мінімізації можна записати

$$u = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \min . \qquad (4.14)$$

Для визначення екстремуму першу похідну функції u слід прирівняти нулю

$$\frac{du}{d\mu} = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0, \text{ звідки } \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \text{ і } \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

$$\text{Отже, } \hat{\mu}_{мнк} = \overline{X} . \qquad (4.15)$$

Таким чином, оцінка за методом найменших квадратів математичного сподівання $\hat{\mu}_{мнк}$ випадкової величини X є вибіркове середнє $\overline{X}$ (ця оцінка співпадає з оцінкою максимальної правдоподібності для випадкової величини, що має нормальний розподіл). Метод найменших квадратів має широке застосування у практиці статистичних досліджень, оскільки не вимагає знання закону розподілу випадкової величини і має достатньо розроблений математичний апарат.

Інтервальне оцінювання

Точкові оцінки навіть у тих ситуаціях, коли вони *спроможні* (наближуються до значення параметру при збільшені n), *незміщені* (у середньому збігаються з параметром) і *ефективні* (мають найменшу ступінь випадкових відхилень), є все ж таки наближеними показниками невідомих параметрів. Їхнім головним недоліком вважається те, що при малому обсязі вибірки точкові оцінки можуть мати значне розходження з тим параметром, який вони оцінюють, а це може призвести до грубих помилок.

Інтервальною оцінкою називається чисельний *інтервал*, який покриває[21] з певною *ймовірністю* невідомий *параметр* генеральної сукупності. Цей чисельний інтервал (2Δ) називається *довірчим інтервалом*, а ймовірність – *довірчою ймовірністю* θ[22]. Найчастіше довірчий інтервал вибирається симетричним до параметру Θ, тобто ($\Theta - \Delta$, $\Theta + \Delta$).

Розмір довірчого інтервалу залежить від обсягу вибірки n (зменшується з ростом n) і від значення довірчої ймовірності (збільшується при наближенні θ до одиниці). Відхилення оцінки $\widetilde{\Theta}_n$ від параметра Θ, що оцінюється з певною довірчою ймовірністю θ, називають *випадковою* похибкою репрезентативності. Її найбільше відхилення є *граничною похибкою*. *Випадкова* похибка репрезентативності виникає внаслідок того, що досліджується не вся сукупність, а лише її частина (вибірка). Її не слід плутати з *систематичною* похибкою репрезентативності, яка є наслідком порушення принципу випадковості при відборі елементів до вибірки, що може мати місце у практичній діяльності.

Довірча ймовірність θ визначається дослідником за *принципом практичної неможливості*, а саме: події з імовірністю, близькою до 1, вважаються вірогідними (достовірними); події з імовірністю, близькою до 0, визнаються невірогідними (неможливими). Цей принцип не може бути доказаний математично. До того ж його сформульовано до однократного виконання випробування.

Поруч із поняттям «*довірча ймовірність*» θ використовується поняття «*рівень значущості*» α. Між θ і α існує співвідношення: $\theta = 1 - \alpha$.

Рівень значущості α – вказує ймовірність помилки оцінювання. Для практичних цілей використовують різні значення *довірчої ймовірності* θ або

---

[21] С.Айвазян, Н. Кремер та ін. наполягають на використанні саме слів «інтервал покриває», а не «містить», оскільки межі чисельного інтервалу визначаються за вибірковими даними і тому є випадковими величинами [1, С. 289; 41, С. 320].

[22] Іноді *довірчу* ймовірність називають *рівнем довіри* або *надійністю* оцінки. [41, С.. 320].

рівня значущості α – усе залежить від ризику помилки, який може собі дозволити дослідник. Якщо θ (*довірча імовірність*) – це своєрідний «рівень довіри» прийняття рішення, то сенс параметра α (*рівень значущості*) можна трактувати як ймовірність ризику помилитися при прийнятті рішення. У психологічних і педагогічних дослідженнях загальноприйнятими вважаються так звані стандартні значення θ і α (див. табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Стандартні значення довірчої ймовірності θ,

рівня значущості α і параметра z

Довірча ймовірність	Рівень значущості	Параметр нормального розподілу	
θ	α	z_{α}	$z_{\alpha/2}$
0,90 (90% вірогідності)	0,10 (10%-й рівень)	1,28	1,64
0,95 (95% вірогідності)	0,05 (5%-й рівень)	1,64	1,96
0,99 (99% вірогідності)	0,01 (1%-й рівень)	2,33	2,58
0,999 (99,9% вірогідності)	0,001 (0,1%-й рівень)	3,09	3,29

Методи визначення довірчих інтервалів реалізовано в основному на двох підходах: на знанні *точного* розподілу вибіркових характеристик для малих обсягів вибірок і на *асимптотичних* властивостях розподілу вибіркових характеристик для значних обсягів вибірок.

Довірчий інтервал розміром 2Δ – це чисельний *інтервал*, який з *довірчою ймовірністю* θ покриває дійсне значення *параметра* генеральної сукупності. Наприклад, генеральне середнє μ може належати до інтервалу значень від ($\overline{X}$ – Δ) до ($\overline{X}$ +Δ), де вибіркове $\overline{X}$ є серединою цього довірчого інтервалу. Ширина довірчого інтервалу 2Δ може бути точно обчислена для заданої *довірчої ймовірності* θ (або рівня значущості α) і цілком певного розподілу ймовірностей. На рис. 4.1 показано ширину симетричного довірчого інтервалу генерального середнього μ для нормального розподілу $N(0,1)$.

Як бачимо, при збільшені *довірчої ймовірності* θ (зменшені значення α) ширина довірчого інтервалу 2Δ зростає, що знижує точність визначення параметра генеральної сукупності. Для нормального розподілу модель інтервальної оцінки *середнього генеральної сукупності* μ має вигляд:

$$\mu \in [\overline{X} - \Delta, \overline{X} + \Delta], \tag{4.16}$$

де $\Delta = \dfrac{z_{\alpha/2} \cdot s_x}{\sqrt{n}}$; $\overline{X}$ і s_x – вибіркове середнє і стандартне відхилення; n – обсяг вибірки; $z_{\alpha/2}$ – параметр стандартного нормального розподілу (див. табл. 4.2) ; α – рівень значущості – ймовірність того, що відхилення вибіркового від генерального середнього не перевищить Δ за абсолютним значенням .

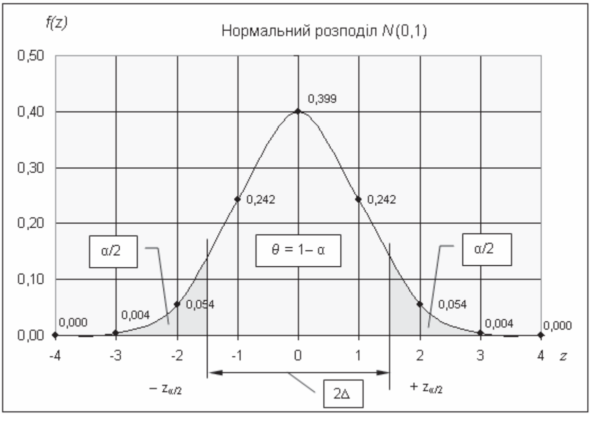


Рис. 4.1. Ширина довірчого інтервалу 2Δ для середнього μ=0

Вираз (4.16) свідчить, що середнє генеральної сукупності μ покривається діапазоном значень від ($\overline{X}$ –Δ) до ($\overline{X}$ +Δ). Оскільки $\Delta \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, то для підвищення точності при заданій довірчій ймовірності слід збільшувати обсяг вибірки n.

Приклад 4.4. Вибірка обсягом 80 осіб має середнє арифметичне $\overline{X}$ = 100 і стандартне відхилення s_x = 5,6. Необхідно оцінити довірчий інтервал середнього генеральної сукупності μ на рівні значущості 0,05.

Послідовність рішення:

- визначити параметр стандартного нормального розподілу $z_{\alpha/2}$ для рівня значущості α за допомогою функції MS Excel =НОРМСТОБР(0,05/2), яка повертає значення 1,96;

- довірчий інтервал середнього генеральної сукупності μ дорівнюватиме

$$\Delta = \frac{z_{\alpha/2} \cdot s_x}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 5{,}6}{\sqrt{80}} \approx 1{,}23 .$$

Відповідь: на рівні значущості 0,05 середнє генеральної сукупності μ належить діапазонові $100{,}0 \mp 1{,}23$. Інакше кажучи, з довірчою ймовірністю 95% середнє μ покривається діапазоном значень у межах від 98,77 до 101,23.

Довірчий інтервал зручно оцінювати за допомогою спеціальної функції MS Excel з відповідними аргументами =ДОВЕРИТ(α; s_x; n). Так, для прикладу 4.4, функція =ДОВЕРИТ(0,05; 5,6; 80) повертає вже відоме значення 1,23.

Запитання. Завдання.

1. Охарактеризуйте основні методи формування емпіричної вибірки.
2. Розкрийте поняття статистичної оцінки.
3. Чим відрізняються між собою точкове й інтервальне оцінювання?
4. Чим відрізняються «параметри» від « статистик»?
5. Охарактеризуйте основні властивості статистичних оцінок.
6. Яка ідея методу моментів як методи статистичного оцінювання?
7. В чому суть методу максимальної правдоподібності?
8. Які умови покладено в основу методу найменших квадратів?
9. В чому полягає суть інтервального статистичного оцінювання?
10. Охарактеризуйте поняття «довірча ймовірність» і «рівень значущості». Яке співвідношення існує між ними?
11. Що означає довірчий інтервал і як його розрахувати?
12. Повторіть математичні розрахунки за прикладами 4.1 – 4.4.
13. Виконайте лабораторну роботу № 9.

5. ПЕРВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

5.1.ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДІВ ПЕРЕВІРКИ СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Поняття статистичної гіпотези

Статистичною гіпотезою називається будь-яке припущення щодо виду або параметрів невідомого закону розподілу. У конкретній ситуації *статистичну гіпотезу* формулюють як *припущення* на певному *рівні статистичної значущості* про властивості *генеральної сукупності* за оцінками *вибірки*.

Статистичну гіпотезу прийнято позначати літерою *H:* (*Hypothesis*). Сформульована гіпотеза «H: σ^2=0,5» може читатися так: «висунута статистична гіпотеза про те, що невідома дисперсія σ^2 не відрізняється від значення 0,5». Гіпотетичне твердження є або справедливим (істинним), або помилковим (хибним), що потребує його перевірки.

Розрізняють *прості* і *складні* статистичні гіпотези. *Проста* гіпотеза повністю визначає теоретичну функцію розподілу випадкової величини. Наприклад, гіпотеза « *H:* закон розподілу випадкової величини є нормальним з параметрами μ=0 і σ=1» є простою, а гіпотеза « *H:* закон розподілу випадкової величини не є нормальним» – складною.

Статистичні гіпотези підрозділяються на *нульові* й *альтернативні*.

Нульова гіпотеза позначається як H_0. Це гіпотеза про *відсутність* відмінностей у значеннях ознак. Наприклад, гіпотеза «$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$» читається так: «висунута нульова гіпотеза про відсутність значущої різниці між середніми μ_1 і μ_2». Як правило, нульова гіпотеза – це те, що ми хочемо спростувати, якщо перед нами стоїть завдання довести значущість відмінностей.

Альтернативна гіпотеза є логічним запереченням нульової гіпотези і позначається як H_1. Природно, що це гіпотеза про *існування* відмінностей. Наприклад, гіпотеза «H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$» читається так: «висунута альтернативна гіпотеза про наявність значущої різниці між середніми μ_1 і μ_2». Найчастіше альтернативна гіпотеза – це те, що ми хочемо довести. Проте існують завдання, коли бажано підтвердити нульову гіпотезу і переконатися, наприклад, що вибірки не розрізняються між собою за якимись показниками.

Нульову й альтернативну гіпотези прийнято представляти у парі:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0;$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$$

Статистичні висновки робляться на підставі прийняття однієї гіпотези і відхилення іншої. Рішення приймається з певною достовірністю.

Статистичні гіпотези можуть бути *спрямованими* і *неспрямованими.*

Спрямовані (*однобічні*) гіпотези мають формулювання**:**

$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ (μ_1 не перевищує μ_2);

$H_1: \mu_1 > \mu_2$ (μ_1 перевищує μ_2).

Неспрямовані (*двобічні*) гіпотези формулюються так:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ (μ_1 не відрізняється від μ_2);

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (μ_1 відрізняється від μ_2).

Спрямовані гіпотези висувають, якщо значення показника в одній сукупності вище (нижче), ніж в іншій; якщо під впливом якихось дій в одній сукупності відбуваються більш (менш) виражені зміни, ніж в іншій. *Неспрямовані* гіпотези формулюють, якщо необхідно довести лише відмінності форми або значень показників розподілу ознак.

Статистичні гіпотези розділяють на *параметричні* й *непараметричні*. *Параметричними* називають гіпотези щодо невідомого значення параметра розподілу, що входить у деяке параметричне сімейство розподілів, наприклад, нормальних. Припущення, при якому вид розподілу невідомий (тобто не передбачається, що воно входить у деяке параметричне сімейство розподілів), називається *непараметричною* гіпотезою. Якщо і нульова H_0, і альтернативна H_1 – параметричні гіпотези, то завдання перевірки статистичної гіпотези – параметричне. Якщо хоча б одна з гіпотез H_0 або H_1 – непараметрична, то перевірки статистичної гіпотези є непараметричним завданням.

Перевірка гіпотез здійснюється на основі статистичних критеріїв.

Статистичні критерії

Статистичний критерій – це вирішальне правило, що забезпечує математично обґрунтоване прийняття істинної і відхилення помилкової гіпотези. Статистичні критерії будуються на основі статистики $\Psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ – деякої функції від результатів спостережень $x_1, x_2, ..., x_n$. Статистика Ψ є випадковою величиною з певним законом розподілу. Серед значень статистики Ψ виділяють критичну область $\Psi_{кр}$ з властивістю: якщо емпіричне значення статистики $\Psi_{емп}$ належать області $\Psi_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють (відкидають), інакше – приймають. Статистичні критерії визначають у практичній діяльності метод розрахунку певного числа, яке позначається як емпіричне значення критерію, наприклад, $t_{емп}$ для t-критерію Стьюдента.

Співвідношення емпіричного і критичного значень критерію є підставою для підтвердження чи спростовування гіпотези. Наприклад, у разі застосування t-критерію Стьюдента, якщо $|t_{емп}| \geq |t_{кр}|$, то значення статистики належать критичній області і нульова гіпотеза H_0 відхиляється (приймається альтернативна гіпотеза H_1). Правила прийняття статистичного рішення обумовлюються для кожного критерію.

Параметричні і непараметричні критерії

Відповідно до статистичних гіпотез статистичні критерії діляться на *параметричні* й *непараметричні*.

Параметричні критерії використовуються в завданнях перевірки параметричних гіпотез і включають у свій розрахунок показники розподілу, наприклад, середні, дисперсії тощо. Це такі відомі класичні критерії, як z-критерій, t-критерій Стьюдента, F-критерій Фішера та ін. *Непараметричні критерії* перевірки гіпотез засновані на операціях з іншими даними, зокрема, частотами, рангами тощо. Це λ-критерій Колмогорова-Смірнова, U-критерій Вілкоксона-Манна-Вітні та багато інших.

Параметричні критерії дозволяють прямо оцінити рівень основних параметрів генеральних сукупностей, різниці середніх і відмінності в дисперсіях. Критерії спроможні виявити тенденції зміни ознаки при переході від умови до умови, оцінити взаємодію двох і більш факторів у впливі на зміни ознаки. *Параметричні* критерії вважаються дещо більш потужними, ніж непараметричні, за умов, якщо ознака виміряна за інтервальною шкалою і нормально розподілена. Проте з інтервальною шкалою можуть виникнути певні проблеми, якщо дані, представлено не в стандартизованих оцінках. До того ж перевірка розподілу «на нормальність» вимагає досить складних розрахунків, результат яких заздалегідь невідомий. Найчастіше розподіли ознак відрізняються від нормального, тоді доводиться звертатися до непараметричних критеріїв.

Непараметричні критерії позбавлені перерахованих вище обмежень. Проте вони не дозволяють здійснити пряму оцінку рівня таких важливих параметрів, як середнє або дисперсія, з їхньою допомогою неможливо оцінити взаємодію двох і більше умов або факторів, що впливають на зміну ознаки. Непараметричні критерії дозволяють вирішити деякі важливі завдання, які супроводжують дослідження в психології і педагогіці: виявлення відмінностей у рівні досліджуваної ознаки, оцінка зсуву значень досліджуваної ознаки, виявлення відмінностей у розподілах ознак.

Застосування критеріїв для прийняття (відхилення) статистичних гіпотез завжди здійснюються з довірчою ймовірністю, інакше кажучи, на певному *рівні значущості*.

Рівень статистичної значущості[23]

Рівень статистичної значущості – це ймовірність того, що ми визнали відмінності істотними (прийняли альтернативну гіпотезу і відхилили нульову), а вони насправді випадкові. Наприклад, якщо вказується, що відмінності достовірні на 5%-му рівні значущості, то мається на увазі ймовірність 0,05 того, що вони все ж таки недостовірні. Рівень значущості – це ймовірність

[23] Див. також розділ 4 «Інтервальне оцінювання»

відхилення нульової гіпотези, тоді як вона правильна.

Історично склалося так, що в психолого-педагогічних дослідженнях прийнято вважати нижчим рівнем статистичної значущості 5%-й рівень ($\alpha \leq 0{,}05$), достатнім – 1%-й рівень ($\alpha \leq 0{,}01$) і вищим – 0,1%-й рівень ($\alpha \leq 0{,}001$). Тому в таблицях критичних значень звичайно приводяться значення критеріїв, відповідних рівням статистичної значущості $\alpha \leq 0{,}05$ і $\alpha \leq 0{,}01$, інколи $\alpha \leq 0{,}001$. Пропонуємо дотримуватися правила відхилення гіпотези про відсутність відмінностей (H_0) і прийняття гіпотези про статистичну достовірність відмінностей (H_1), доки рівень статистичної значущості не досягне $\alpha = 0{,}05$.

Правила прийняття статистичних рішень

Прийняття статистичних рішень виконується на основі емпіричного критерію: якщо значення $\Psi_{\text{емп}}$ знаходяться в критичній області $| \Psi_{\text{емп}} | \geq | \Psi_{кр} |$, нульова гіпотеза H_0 відхиляється[24]. На рис. 5.1 – 5.3 критичні області зафарбовано. Рівень статистичної значущості і відповідні критичні значення критеріїв визначаються по-різному при перевірці спрямованих і неспрямованих статистичних гіпотез. При спрямованих гіпотезах використовується однобічний критерій (рис. 5.1 і 5.2), при неспрямованих – двобічний (рис. 5.3).

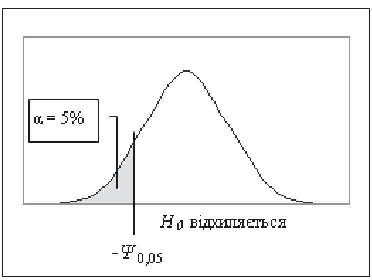


Рис. 5.1. Лівостороння критична область

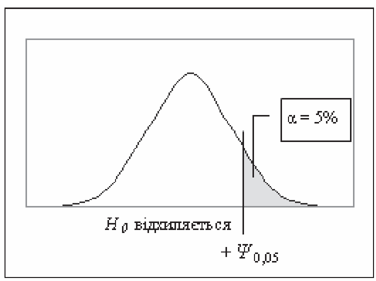


Рис. 5.2. Правостороння критична область

[24] *Винятки:* для деяких непараметричних критеріїв, наприклад, *G*-критерію знаків, *T*-критерію Вілкоксона і *U*-критерію Манна-Вітні встановлюються зворотні співвідношення.

Двобічний критерій строгіший, оскільки він перевіряє відмінності в обидві сторони, і для нього при певному рівні значущості α критичні зони удвічі менші, ніж для однобічного критерію. Отже, на рівні значущості α для однобічного критерію нульова гіпотеза H_0 відхиляється, коли $|\Psi_{\text{емп}}| \geq |\Psi_{\alpha}|$, для двобічного критерію H_0 відхиляється, коли $|\Psi_{\text{емп}}| \geq |\Psi_{\alpha/2}|$. Наприклад, на рівні значущості α =0,05 критична зона для однобічного критерію складає $\Psi_{0,05}$ (рис. 5.1 або 5.2), для двобічного критерію – $\Psi_{0,025}$ (рис. 5.3).

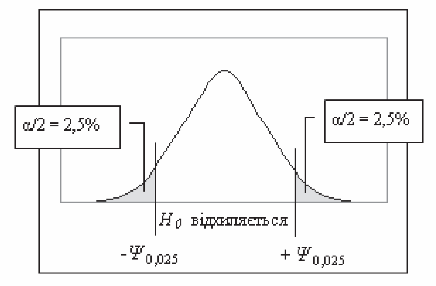


Рис. 5.3. Двостороння критична область

Критичні значення параметричних критеріїв, наприклад, *t*-критерію Стьюдента або *F*-критерію Фішера, зручніше отримувати за допомогою відповідних функцій MS Excel. Критичні значення непараметричних критеріїв табульовано таким чином, що спрямованим гіпотезам відповідає однобічний, а неспрямованим – двобічний критерій. Гіпотези дослідника повинні збігалися за сенсом із гіпотезами, пропонованими в описі кожного з критеріїв.

Помилки прийняття статистичних рішень

Прийняття статистичних рішень супроводжується *помилками*.

Помилка 1-го роду – це помилка відхилення нульової гіпотези, тоді як вона правильна. Ймовірність такої помилки позначається як α (рівень значущості). Отже, $\alpha=P\{\Psi\in\Psi_{\text{кр}} \mid H_0\}$ – це ймовірність події $\{\Psi\in\Psi_{\text{кр}}\}$, за умови, що нульова гіпотеза H_0 істина. Якщо ймовірність помилки – це α, то ймовірність правильного рішення (1– α). Чим менше α, тим більша достовірність прийняття правильного рішення.

Помилка 2-го роду – це помилка прийняття нульової гіпотези H_0 тоді, якщо вона неправильна. Ймовірність помилки 2-го роду позначається як β. Отже, $\beta=P\{\Psi\notin\Psi_{\text{кр}} \mid H_1\}$ – це ймовірність події $\{\Psi\notin\Psi_{\text{кр}}\}$, за умови, що альтернативна гіпотеза H_1 прийнята (нульова гіпотеза H_0 відхилена). Ймовірність не припуститися помилки 2-го роду дорівнює $(1-\beta)$ і називається *потужністю* критерію.

В табл. 5.1 показано можливі помилки прийняття статистичних рішень.

Таблиця 5.1

Помилки прийняття статистичних рішень

Прийняте рішення на основі критерію	Реальний стан дійсності (нам невідомий)	
	H_0 істинна	H_0 хибна
H_0 прийнято	Правильне рішення	**Помилка 2-го роду**
H_0 відхилено	**Помилка 1-го роду**	Правильне рішення

Потужність критерію – це його здатність виявляти відмінності, тобто відхиляти нульову гіпотезу про відсутність відмінностей, якщо вона помилкова. Потужність критерію визначається емпіричним шляхом. Виявляється, що деякі критерії дозволяють виявити відмінності там, де інші опиняються неспроможними це зробити, тому пропонується застосовувати більш потужні критерії. Проте підставою для вибору критерію може бути не лише потужність, але й інші його характеристики, а саме: ширший діапазон застосування до даних, визначених, наприклад, за номінальною або ранговою шкалою; обмеженість обсягів вибірки або їхня неоднаковість за обсягом; велика інформативність результатів. Тоді й використовують менш потужні критерії.

Статистичні рішення на основі *p*-значень

Стандартні процедури прийняття (відхилення) нульової гіпотези H_0 основані на фіксації факту попадання значень емпіричного критерію $\Psi_{емп}$ у критичну область $\Psi_{\text{кр}}$, яка визначена наперед фіксованим рівнем значущості α.

Проте можна виконувати зворотну процедуру: визначити ймовірність $p_{емп}$, яка відповідає емпіричному критерієві $\Psi_{емп}$. Нульова гіпотеза H_0 відхиляється, якщо ймовірність $p_{емп}$ випадкової події менше прийнятого рівня значущості α , тобто за умов: $p_{емп} \leq \alpha$ (для однобічних гіпотез); $p_{емп} \leq \alpha/2$ (для двобічних гіпотез).

Приклад 5.1. Прийняти статистичне рішення щодо нульової гіпотези H_0 за статистикою z-критерію з нормальним розподілом. Емпіричне значення z-критерію $z_{емп} = 2{,}19$. Розглянути варіант однобічних гіпотез.

Рішення:

За допомогою, наприклад, функції MS Excel =НОРМСТРАСП() можна визначити ймовірність $p_{емп}$, яка відповідає емпіричному критерію $z_{емп}$ з нормальним розподілом цієї статистики. Функція =НОРМСТРАСП($z_{емп}$) повертає значення $1 - p_{емп} \approx 0{,}9857$. Значення $p_{емп} \approx 1 - 0{,}9857 = 0{,}0143 \approx 1{,}43\%$.

Висновки для однобічного варіанту гіпотез:

Оскільки $p_{емп} < 0{,}05$ ($0{,}0143 < 0{,}05$), H_0 відхиляється на рівні значущості 5%; проте $p_{емп} > 0{,}01$ ($0{,}0143 > 0{,}01$), H_0 приймається на рівні значущості 1%;

Типи і загальна схема перевірки статистичних гіпотез

Типи статистичних гіпотез визначаються сукупністю тих завдань і методів їх розв'язання, які мають місце в психолого-педагогічних дослідженнях. За своїм прикладним змістом статистичні гіпотези можна поділити на декілька основних типів щодо :

- *закону розподілу* випадкових величин тих чи інших властивостей;
- *чисельних показників* параметрів (середніх, дисперсій, кореляцій та ін.);
- *однорідності* двох або декількох вибірок
- *відмінностей у рівні ознак* досліджуваного явища або процесу;
- *відмінностей у розподілі ознак*.

Загальна схема перевірки статистичних гіпотез. Незважаючи на різноманітність типів гіпотез і критеріїв, схему перевірки статистичних гіпотез можна представити у вигляді послідовності таких процедур:

1) формулювання гіпотез H_0 і H_1 на основі завдань дослідження;
2) перевірка припущень щодо відповідності розподілу параметричному сімейству, параметрів вибірки та іншої додаткової інформації;
3) прийняття рівня значущості α;
4) вибір статистичного критерію;
5) розрахунки емпіричного критерію;
6) визначення області критичних значень критерію;
7) прийняття статистичного рішення;
8) формулювання статистичних висновків;
9) прийняття рішення щодо продовження (припинення) досліджень;
10) формулювання змістовних висновків.

У прикладній статистиці використовують два стилі викладу методів перевірки гіпотез. За одним формулюють і нульову, і альтернативну гіпотези (або набору гіпотез), перевірки яких відбувається за певними критеріями. При іншому стилі виклад будують як алгоритмічний опис критеріїв для перевірки нульової гіпотези, про альтернативи навіть не згадується. У посібнику пропонується перший варіант.

Запитання. Завдання.

1. Дайте означення поняттю «статистична гіпотеза». Наведіть приклади.
2. Чим розрізняються *прості* і *складні* статистичні гіпотези?
3. Охарактеризуйте нульову та альтернативну статистичні гіпотези.
4. Які особливості спрямованих і неспрямованих статистичних гіпотез?
5. Охарактеризуйте поняття статистичного критерію.
6. Чим відрізняються між собою параметричні й непараметричні критерії?
7. Дайте порівняльну характеристику параметричних і непараметричних статистичних критеріїв.
8. Про що свідчить рівень значущості при прийнятті (спростуванні) статистичної гіпотези?
9. Які типові значення рівня статистичної значущості рекомендовано за-

стосовувати в психологічних дослідженнях?

10. Сформулюйте правила прийняття статистичних рішень при спрямованих і неспрямованих гіпотезах.

11. Чим відрізняються одне від одного помилки 1-го і 2-го роду?

12. Розкрийте сенс поняття «потужність критерію».

13. Як приймаються статистичні рішення на основі *р*-значень?

14. Охарактеризуйте основні типи статистичних гіпотез.

15. Як виглядає загальна схема перевірки статистичних гіпотез?

5.2. ГІПОТЕЗИ ЩОДО НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ОЗНАК

При використанні методів математичної статистики надзвичайно важливо знати закон розподілу властивості, що вивчається. По суті, вже сама досліджувана змінна представлена масивом емпіричних даних з певним законом розподілу ймовірностей реалізації її значень. Тому будь-яка статистична обробка починається, як правило, зі спроби оцінити закон розподілу. Прагнення застосувати методи, які розроблено для певного закону розподілу, в умовах, коли реальний розподіл відрізняється від гіпотетичного, є найбільш розповсюдженою помилкою, що призводить у підсумку і до помилкових висновків.

Критерії перевірки гіпотез щодо закону розподілу прийнято називати *критеріями згоди*, які можна розділити на дві групи: *загальні* та *спеціальні* [37, С. 20]. *Загальні критерії* застосовують до формулювань гіпотез про згоду спостережень з будь-яким можливим розподілом. *Спеціальні критерії згоди* використовують у разі перевірки гіпотези щодо конкретної форми розподілу – нормальної, рівномірної, експоненціальної тощо. Такі критерії носять відповідну назву – *критерії нормальності*, *критерії рівномірності* й т.п.

Розрахунки емпіричного розподілу та його графічна візуалізація не дають надійних підстав для висновку щодо закону розподілу ознаки у сукупності, з якої взята вибірка. Тим часом знання цього закону є необхідною умовою використання багатьох математичних методів. Наприклад, застосування параметричних критеріїв, дисперсійного аналізу вимагає попередньої перевірки нормальності розподілу досліджуваної ознаки.

Серед методів оцінювання законів розподілу ймовірностей випадкових величин біля двох десятків було спеціально розроблено для перевірки нормальності. Найбільш розповсюдженими вважаються критерії асиметрії й ексцесу, хі-квадрат та ін. Проте варто рекомендувати критерій Шапіро-Вілка W, який за рейтингом потужності посідає перше місце [37, С 278]. Розглянемо методику, техніку й особливості використання трьох критеріїв: асиметрії й ексцесу, хі-квадрат і Шапіро-Вілка. Причому для порівняння будемо використовувати у навчальних прикладах одні й ті самі емпіричні дані.

Критерії асиметрії та ексцесу

Критерії асиметрії та ексцесу застосовують для приблизної перевірки гіпотези про нормальність емпіричного розподілу. Асиметрія характеризує ступінь несиметричності, ексцес – ступінь загостреності (згладженості) кривої диференціальної функції емпіричного розподілу в порівнянні з функцією щільності нормального розподілу.

Для нормального розподілу $N(\mu,\sigma)$ з математичним сподіванням μ і дисперсією σ^2 третій і четвертий центральні моменти мають сенс асиметрії і ексцесу. Відповідні коефіцієнти A і E дорівнюють нулю:

$$A = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^3 p_i = 0;$$

$$E = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 = \left[\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^3 p_i\right] - 3 = 0. \qquad (5.1)$$

Отже, нормальний розподіл є симетричний відносно середнього значення і є «ідеальний» – не загострений і не згладжений.

Дисперсії асиметрії та ексцесу відповідно дорівнюють

$$D(A) = \frac{6\cdot(n-1)}{(n+1)\cdot(n+3)}; \qquad D(E) = \frac{24\cdot n\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-5)}{(n-1)^2\cdot(n+3)\cdot(n+5)}. \qquad (5.2)$$

Вважається, що при нормальному розподілі вибіркові показники асиметрії та ексцесу дорівнюватимуть нулю, але реально таке майже не спостерігається. Тому емпіричний розподіл вважають близьким до нормального (приймають нульову гіпотезу), якщо виконуються умови:

$$\left|A_x\right| \le 3\sqrt{D(A)} \quad \text{і} \quad \left|E_x\right| \le 5\sqrt{D(E)}\,. \tag{5.3}$$

Технологічно у цьому методі розраховують показники t_A і t_E

$$\mathrm{t_A} = \frac{\left|A_x\right|}{\sqrt{D(A)}} \quad \text{і} \quad \mathrm{t_E} = \frac{\left|E_x\right|}{\sqrt{D(E)}}\,. \tag{5.4}$$

Про достовірну відмінність емпіричного розподілу від нормального свідчать показники t_A і t_E, якщо приймають значення 3 і більше.

Приклад 5.2. Перевірити відповідність розподілу емпіричних вибіркових даних (стовпчики A:B рис. 5.4) нормальному законові розподілу ознаки.

Послідовність рішення.

- *Формулювання гіпотез*:

  H_0: емпіричний розподіл *не відрізняється* від нормального;

  H_1: емпіричний розподіл *відрізняється* від нормального.

- *Вибір статистичного критерію*. Для перевірки статистичних гіпотез використаємо метод критеріїв асиметрії та ексцесу з розрахунком t_A і t_E:

$$\mathrm{t_A} = \frac{\left|A_x\right|}{m_A} \quad \text{і} \quad \mathrm{t_E} = \frac{\left|E_x\right|}{m_E}, \tag{5.5}$$

де A_x і E_x – емпіричні коефіцієнти асиметрії та ексцесу; m_A і m_E дорівнюють:

$$m_A = \sqrt{\frac{6\cdot(n-1)}{(n+1)\cdot(n+3)}}; \quad m_E = \sqrt{\frac{24\cdot n\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-5)}{(n-1)^2\cdot(n+3)\cdot(n+5)}}\,. \tag{5.6}$$

- *Розрахунки емпіричних критеріїв t_A і t_E* (рис. 5.4) виконано за допомогою формул (див. рис. 5.5). Вибіркові значення асиметрії (A_x) та ексцесу (E_x) за формулами (2.12а) і (2.12б) розраховано за допомогою функцій MS Excel =СКОС() і =ЭКСЦЕСС().

- *Формулювання висновків*. Чисельні значення критеріїв t_A і t_E (рис. 5.4) не перевищують 3 ($t_A \approx 0{,}47 < 3$; $t_E \approx 0{,}49 < 3$), що дає можливість стверджувати про відсутність відмінностей між емпіричним і теоретичним нормальним розподілами.

	A	B	C	D
1	Емпіричні дані		Критерії t_A і t_E	
2	j	x_j	Розрахунки	
3	1	4		
4	2	4	n =	18
5	3	4	A_x =	-0,24
6	4	5	E_x =	-1,53
7	5	6	m_A =	0,51
8	6	7	m_E =	3,11
9	7	8	t_A =	0,47
10	8	9	t_E =	0,49
11	9	10		
12	10	11	$\bar{X}$=	9,94
13	11	12	s_x =	4,15
14	12	13		
15	13	13		
16	14	14		
17	15	14		
18	16	15		
19	17	15		
20	18	15		

Рис. 5.4. Результати розрахунку t_A і t_E

	C	D
1	Критерії t_A і t_E	
2	Розрахунки	
3		
4	n =	=СЧЁТ(B3:B20)
5	A_x =	=СКОС(B3:B20)
6	E_x =	=ЭКСЦЕСС(B3:B20)
7	m_A =	=КОРЕНЬ(6*(D4-1)/(D4+1)/(D4+3))
8	m_E =	=КОРЕНЬ(24*D4*(D4-2)*(D4-3)*(D4-5)/(D4-1)^2/(D4+3)/(D4+5))
9	t_A =	=ABS(D5)/D7
10	t_E =	=ABS(D6)/D8
11		
12	$\bar{X}$=	=СРЗНАЧ(B3:B20)
13	s_x =	=СТАНДОТКЛОН(B3:B20)
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Рис. 5.5. Формули для розрахунку критеріїв асиметрії і ексцесу t_A і t_E

Проте порівняння графіків цих розподілів дають підстави для сумніву щодо відповідності емпіричного розподілу нормальному законові (див. рис. 5.6), що потребує додаткової перевірки.

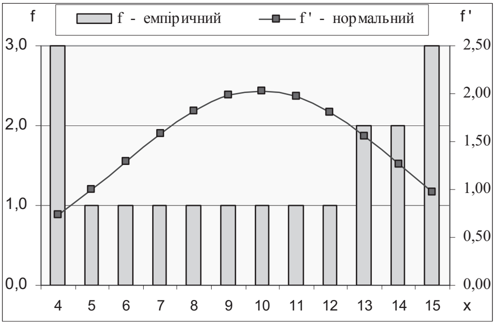


Рис. 5.6. Емпіричний і нормальний теоретичний розподіли

Більш того, у науковій і спеціальній літературі з математичної статистики при посиланні на критерії асиметрії й ексцесу як на засіб перевірки нормальності розподілу, нерідко звертається увага на застереження про те, що ці критерії дозволяють перевіряти лише деякі співвідношення між моментами розподілу і аж ніяк не є спроможними критеріями нормальності.

Критерій згоди χ^2

Критерій χ^2 засновано на порівнянні емпіричної гістограми розподілу випадкової величини з її теоретичною щільністю. Діапазон виміряних емпіричних даних розбивають на k інтервалів і розраховують статистику

$$\chi^2_{емп} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \tag{5.7}$$

де m_i – кількість значень випадкової величини, що потрапили в i-й інтервал; n – обсяг вибірки; p_i – теоретична ймовірність випадкової величини потрапити в i-й інтервал.

Для гіпотетичного теоретичного розподілу, який має закон розподілу $F(x)$, теоретична ймовірність p_i визначається як $p_i = F(x_{i+1}) - F(x_i)$, тобто

$$p_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x)dx = \int_{-\infty}^{x_{i+1}} F(x)dx - \int_{-\infty}^{x_i} F(x)dx = F(x_{i+1}) - F(x_i). \tag{5.8}$$

За умов $k<<n$ і $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} << n$ вважається, що статистика $\chi^2_{емп}$ має розподіл близький до розподілу хі-квадрат для k–1 ступенів вільності. Нульова гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості α, якщо $\chi^2_{емп} > \chi^2_{\alpha}$.

Приклад 5.3. Перевірити за критерієм згоди χ^2 гіпотезу про нормальний розподіл емпіричних даних попереднього прикладу 5.2.

Послідовність рішення:

- *Формулювання гіпотез:*

  H_0: емпіричний розподіл *не відрізняється* від нормального;

  H_1: емпіричний розподіл *відрізняється* від нормального.

• *Статистичний критерій* $\chi^2_{емп}$ дорівнює сумі квадратів відхилень емпіричних частот m_i від очікуваних теоретичних частот np_i (5.7).

• *Послідовність розрахунку* емпіричного критерію $\chi^2_{емп}$ (результати показано на рис. 5.7, необхідні формули – на рис. 5.8):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Емпіричні дані		Розрахунки критерію χ^2									
2	x_j		i	x_i	x_{i+1}	m_i	$F(x_i)$	$F(x_{i+1})$	p_i	np_i	$(m_i-np_i)^2$	$(m_i-np_i)^2/np_i$
3	4	11	1	- ∞	4	3	0	0,067	0,067	1,203	3,231	2,687
4	4	12	2	4	6	2	0,067	0,159	0,092	1,653	0,120	0,073
5	4	13	3	6	8	2	0,159	0,309	0,150	2,698	0,487	0,181
6	5	13	4	8	10	2	0,309	0,500	0,191	3,446	2,092	0,607
7	6	14	5	10	12	2	0,500	0,691	0,191	3,446	2,092	0,607
8	7	14	6	12	+ ∞	7	0,691	1,000	0,309	5,554	2,092	0,377
9	8	15		Суми:		18			1,000		$\chi^2_{емп}$ =	4,531
10	9	15	k =	5	μ =	10,00					$\chi^2_{0,1}$ =	9,24
11	10	15	λ =	2	σ_x =	4,00					$\chi^2_{0,05}$ =	11,07

Рис. 5.7. Результати розрахунку критерію χ^2

– внести емпіричні дані у комірки A1:B11;

– розрахувати кількість класів k за формулою Стерджеса k=1+3,32·lg(n) Для цього вираз =ОКРУГЛ(1+3,32*LOG(СЧЁТ(A3:B11));0) внести у комірку D10 і отримати k=1+3,32·lg(18) = 5,2 ≈ 5;

– у комірці D11 розрахувати розмір класового інтервалу $\lambda=(x_{max}-x_{min})/k$ за допомогою виразу =(МАКС(A3:B11)-МИН(A3:B11))/D10 і отримати $\lambda \approx 2$;

– внести у комірки D3:E8 значення початкових x_i і кінцевих x_{i+1} границь діапазонів x_i кратними 2. Мінімальне значення першого діапазону становить –∞ (комірка D3), максимальне останнього інтервалу +∞ (комірка E8);

– у комірках F3:F8 розрахувати емпіричні абсолютні частоти m_i за допомогою функції =ЧАСТОТА(). Сума частот m_i дорівнюватиме обсягу вибірки, тобто 18;

– теоретична ймовірність випадкової величини p_i потрапити в i-й інтервал розраховується як різниця значень нормального розподілу $F(x_{i+1}) - F(x_i)$. Значення нормального розподілу можна отримати за допомогою функції MS

Excel = НОРМРАСП(). Середнє μ і стандартне відхилення σ_x теоретичного нормального розподілу внести у комірки F10 і F11 відповідно (зауваження: заміна параметрів нормального розподілу вибірковими статистиками може призвести до суттєвого спотворення статистичних висновків);

– внести у інші комірки відповідні розрахункові вирази за рис. 5.8 і отримати значення емпіричного критерію $\chi^2_{емп}$,що становитиме 4,53

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Емпіричні дані		Розрахунки критерію χ^2									
2	x_j		i	x_i	x_{i+1}	m_i	$F(x_i)$	$F(x_{i+1})$	p_i	np_i	$(m_i-np_i)^2$	$(m_i-np_i)^2/np_i$
3	4	11	1	$-\infty$	4	=ЧАСТОТА(	0	=НОРМРАСП(E3;F	=H3-G3	=F$9*I3	=(F3-J3)^2	=K3/J3
4	4	12	2	4	6	=ЧАСТОТА(	=НОРМРАС	=НОРМРАСП(E4;F	=H4-G4	=F$9*I4	=(F4-J4)^2	=K4/J4
5	4	13	3	6	8	=ЧАСТОТА(	=НОРМРАС	=НОРМРАСП(E5;F	=H5-G5	=F$9*I5	=(F5-J5)^2	=K5/J5
6	5	13	4	8	10	=ЧАСТОТА(	=НОРМРАС	=НОРМРАСП(E6;F	=H6-G6	=F$9*I6	=(F6-J6)^2	=K6/J6
7	6	14	5	10	12	=ЧАСТОТА(	=НОРМРАС	=НОРМРАСП(E7;F	=H7-G7	=F$9*I7	=(F7-J7)^2	=K7/J7
8	7	14	6	12	$+\infty$	=ЧАСТОТА(	=НОРМРАСП(D8;$F$10;$F$11;1)		=H8-G8	=F$9*I8	=(F8-J8)^2	=K8/J8
9	8	15		Суми:		=СУММ(F3:F8)			=СУММ(I3:I8)		$\chi^2_{емп}$ =	=СУММ(L3:L8)
10	9	15	k =	=ОК	μ =	10					$\chi^2_{0,1}$ =	=ХИ2ОБР(0,1;6-1
11	10	15	λ =	=(М,	σ_x =	4					$\chi^2_{0,05}$ =	=ХИ2ОБР(0,05;6-

Рис. 5.8. Формули для розрахунку критерію $\chi^2_{емп}$

- *Критичне значення* критерію $\chi^2_{кр}$ можна отримати за допомогою функції =ХИ2ОБР(), яка повертає значення двобічного критерію у комірках L9 і 10 відповідно: $\chi^2_{0,1} \approx 9{,}24$ і $\chi^2_{0,05} \approx 11{,}07$.
- *Прийняття рішення.* Оскільки $\chi^2_{емп} \approx 4{,}53$ не перевищує критичного значення навіть на рівні α=0,1 ($\chi^2_{0,1} \approx 9{,}24$) , нульова гіпотеза H_0 приймається.
- *Формулювання висновків*: розбіжності емпіричного і теоретичного нормального розподілів можуть мати винятково випадковий характер.

Перевірку нормальності емпіричного розподілу виконаємо за допомогою критерію Шапіро-Вілка W.

Критерій Шапіро-Вілка W

Статистика критерію W Шапіро-Вілка має вигляд:

$$W = \frac{1}{s^2}\left[\sum_{i=1}^{m} a_{n-i+1}(x_{n-i+1} - x_i)\right]^2, \tag{5.9}$$

де n – обсяг вибірки; $s^2 = \sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 = s_x^2(n-1)$; $\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j$; m – ціла частина $\frac{n}{2}$; коефіцієнти a_{n-i+1} для невеликих n і i наведено у табл. 1 Додатків.

Приклад 5.4. Перевірити за критерієм Шапіро-Вілка гіпотезу щодо відповідності нормальному законові розподілу емпіричних даних прикладу 5.2.

Послідовність рішення:

- *Формулювання гіпотез:.*

  H_0: емпіричний розподіл *не відрізняється* від нормального;

  H_1: емпіричний розподіл *відрізняється* від нормального.

- *Послідовність розрахунку* емпіричного критерію W (результати показано на рис. 5.9, необхідні формули – на рис. 5.10):

– у комірках C2:D11 розмістити індекси (i) і ($n–i$+1), причому i змінюється від 1 до m (m у прикладі дорівнює n/2 = 18/2 = 9);

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Емпіричні дані		Розрахунки критерію Шапіро-Вілка W					
2	j	x_j	i	n-i+1	a_{n-i+1}	x_i	x_{n-i+1}	b_i
3	1	4	1	18	0,4886	4	15	5,375
4	2	4	2	17	0,3253	4	15	3,578
5	3	4	3	16	0,2553	4	15	2,808
6	4	5	4	15	0,2027	5	14	1,824
7	5	6	5	14	0,1587	6	14	1,270
8	6	7	6	13	0,1197	7	13	0,718
9	7	8	7	12	0,0837	8	13	0,419
10	8	9	8	11	0,0496	9	12	0,149
11	9	10	9	10	0,0173	10	11	0,017
12	10	11					$(\Sigma b_i)^2$ =	261,08
13	11	12					s^2 =	292,94
14	12	13	n =	18			W =	0,891
15	13	13	γ =	-4,8850		$W_{18}(0,05)$ =		0,897
16	14	14	η =	1,7700				
17	15	14	ε =	0,2528				
18	16	15	z =	-1,7527				
19	17	15	p =	0,0398	<	0,05		
20	18	15						

Рис. 5.9. Результати розрахунку W-критерію Шапіро-Вілка

– у комірки E2:E11 внести 9 коефіцієнтів з табл. 1 Додатків з рядка для n=18;

– заповнити комірки F2:G11 значеннями x_i і x_{n-i+1} або «вручну», або з використанням функцію MS Excel =ВПР(), яка за індексом у лівому стовпчику таблиці повертає значення в тім же рядку із зазначеного стовпця таблиці;

– у комірках H2:H11 розрахувати значення $b_i = a_{n-i+1}(x_{n-i+1} - x_i)$;

– у комірці H12 визначити квадрат суми параметрів – $(\Sigma b_{\text{i}})^2$, тобто чисельник виразу (5.9), а у комірці H13 – знаменник – s^2 ;

– значення критерію W у комірці H14 дорівнює $(\Sigma b_{\text{i}})^2 / s^2 = 0{,}891$;

– критичне значення критерію $W_{18}(0{,}05)$ отримати з табл. 2 Додатків. Для n=18 і α=0,05 це значення складає 0,897 (див. комірку H15 рис. 5.9).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Емпіричні дані		Розрахунки критерію Шапіро-Вілка W					
2	j	x_j	i	n-i+1	a_{n-i+1}	x_i	x_{n-i+1}	b_i
3	1	4	1	=D$14-C3+1	0,4886	=ВПР(C3;$A$3:$B$20;2)	=ВПР(D3;$A$3:$B$20;2)	=E3*(G3-F3)
4	2	4	2	=D$14-C4+1	0,3253	=ВПР(C4;$A$3:$B$20;2)	=ВПР(D4;$A$3:$B$20;2)	=E4*(G4-F4)
5	3	4	3	=D$14-C5+1	0,2553	=ВПР(C5;$A$3:$B$20;2)	=ВПР(D5;$A$3:$B$20;2)	=E5*(G5-F5)
6	4	5	4	=D$14-C6+1	0,2027	=ВПР(C6;$A$3:$B$20;2)	=ВПР(D6;$A$3:$B$20;2)	=E6*(G6-F6)
7	5	6	5	=D$14-C7+1	0,1587	=ВПР(C7;$A$3:$B$20;2)	=ВПР(D7;$A$3:$B$20;2)	=E7*(G7-F7)
8	6	7	6	=D$14-C8+1	0,1197	=ВПР(C8;$A$3:$B$20;2)	=ВПР(D8;$A$3:$B$20;2)	=E8*(G8-F8)
9	7	8	7	=D$14-C9+1	0,0837	=ВПР(C9;$A$3:$B$20;2)	=ВПР(D9;$A$3:$B$20;2)	=E9*(G9-F9)
10	8	9	8	=D$14-C10+1	0,0496	=ВПР(C10;$A$3:$B$20;2)	=ВПР(D10;$A$3:$B$20;2	=E10*(G10-F10)
11	9	10	9	=D$14-C11+1	0,0173	=ВПР(C11;$A$3:$B$20;2)	=ВПР(D11;$A$3:$B$20;2	=E11*(G11-F11)
12	10	11					$(\Sigma b_i)^2$ =	=СУММ(H3:H11)^2
13	11	12					s^2 =	=ДИСП(B3:B20)*(D14-1)
14	12	13	n =	=СЧЁТ(B3:B20)			W =	=H12/H13
15	13	13	γ =	-4,885			$W_{18}(0{,}05)$ =	0,897
16	14	14	η =	1,77				
17	15	14	ε =	0,2528				
18	16	15	z =	=D15+D16*LN((H14-D17)/(1-H14))				
19	17	15	p =	=НОРМСТРАСП(D18)	<	0,05		
20	18	15						

Рис. 5.10. Формули для розрахунку W-критерію Шапіро-Вілка

• *Прийняття рішення* відбувається за правилом: якщо $W < W_n(\alpha)$, H_0 відхиляється на рівні 2α. Оскільки W ≈ 0,891 не перевищує критичного значення 0,897 критерію $W_{18}(0{,}05)$, нульова гіпотеза щодо нормальності розподілу відхиляється на рівні 0,1.

• *Формулювання висновків*. Розходження між емпіричним і очікуваним теоретичним нормальним розподілами можна вважати статистично значущими на рівні 0,1.

Таким чином, на основі порівняння трьох критеріїв (асиметрії та ексцесу, хі-квадрат, Шапіро-Вілка) можна зробити такі загальні висновки:

– нульові значення моментів у разі застосування критеріїв асиметрії та ексцесу можуть прийматися і для розподілів, відмінних від нормальних. Близькість вибіркових значень асиметрії та ексцесу до теоретичних не обов'язково свідчить про нормальність розподілу результатів спостережень. Ці критерії служать не стільки для перевірки нормальності, скільки для виявлення відхилень розподілу від нормального, або, точніше, для перевірки альтернативних гіпотез [49];

– переважна більшість розподілів спостережень не є нормальними, тому в умовах реальних завдань малоймовірно приймати гіпотезу нормальності. Коректніше стверджувати, що розподіли *мало відрізняється* від нормального;

– критерій хі-квадрат, як і критерії моментів, не є спроможним. Його доцільно застосовувати лише для відхилення гіпотези нормальності. До того ж, на потужність критерію хі-квадрат сильно впливає кількість (k) і розмір (λ) інтервалів, практично цей критерій можна застосовувати, якщо $np_i \geq 5$;

– кожен критерій має свої «проблеми», існують спеціально розроблені модифікації різних класичних критеріїв, наприклад, типу «хі-квадрат», які можна найбільш ефективно застосовувати у конкретних ситуаціях;

– при розрахунках теоретичного нормального розподілу його параметри (μ і σ_x) не завжди відомі дослідникові. Заміна їх вибірковими статистиками ($\overline{X}$ і s_x) може призвести до суттєвого спотворення статистичних висновків;

– найбільш потужним і позбавленим вище перерахованих вад виявився критерій Шапіро-Вілка *W*. За рейтингом цей критерій посідає перше місце серед двадцяти одного аналогічного методу [37, С.278] і може бути рекомендований для перевірки нормальності емпіричних розподілів.

Запитання. Завдання.

1. Які основні недоліки критеріїв асиметрії та ексцесу для перевірки нормальності розподілів?

2. Коли доцільно застосовувати критерію хі-квадрат в завданнях перевірки нормальності розподілів?

3. Проаналізуйте схему вибору параметричних критеріїв залежно від характеру сукупності і досліджуваних завдань.

4. Обґрунтуйте порівняльну характеристику трьох критеріїв (асиметрії та ексцесу, хі-квадрат, Шапіро-Вілка) як засобу оцінки відповідності емпіричного розподілу нормальному законові.

5. Повторіть математичні процедури завдань за прикладами 5.1 і 5.4.

6. Виконайте лабораторну роботу № 10.

5.3. ПЕРЕВІРКА ОДНОРІДНОСТІ ВИБІРОК

У дослідженнях з педагогіки чи психології часто виникає необхідність з'ясувати, чи розрізняються генеральні сукупності, з яких узято вибірки. Наприклад, чи відрізняються між собою експериментальна і контрольна група учнів за результатами тестування навчальних досягнень. Методи перевірки статистичних гіпотез про однорідність вибірок можуть бути реалізовані на основі *параметричних* і *непараметричних* критеріїв для незалежних (незв'язаних) і залежних (зв'язаних) вибірок. Отже, гіпотези про однорідність вибірок – це гіпотези про схожість або відмінність двох і більше вибірок.

Для варіанту незалежних вибірок постановка математико-статистичної задачі виглядає так: дві вибірки обсягом n_1 і n_2 взято випадковим методом з двох генеральних сукупностей, неперервні функції розподілу яких $F_1(x)$ і $F_2(x)$ є невідомими. Потрібно перевірити їхню однорідність (неоднорідність). Нульова й альтернативна гіпотези мають вигляд:

$$H_0: F_1(x) = F_2(x);$$

$$H_1: F_1(x) \neq F_2(x).$$

В математиці розроблено декілька методів (критеріїв) перевірки однорідності двох незалежних вибірок. Проте з точки зору прикладної статистики у дослідника нерідко виникає проблема оптимального вибору критерію перевірки однорідності. Тому розглянемо і проаналізуємо особливості та можливості використання декількох критеріїв.

Критерій Стьюдента *t*

Для перевірки однорідності незв'язаних вибірок нерідко використовується критерій Стьюдента t, статистика якого має вид:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, \qquad (5.10)$$

де $\overline{X}_1$ і $\overline{X}_2$, s_1^2 і s_2^2, n_1 і n_2 – середні, дисперсії та обсяги першої і другої вибірок відповідно.

Критичне значення критерію $t_{\text{кр}}$ для заданого рівня значущості α й числа ступенів вільності (n_1+n_2–2) можна отримати з таблиць розподілу Стьюдента, а також за допомогою функції =СТЬЮДРАСПОБР(). Якщо $| t | \geq | t_{\text{кр}}|$, то гіпотезу однорідності (гіпотезу H_0 про відсутність розходження) відхиляють.

Приклад 5.5. Перевірити статистичні гіпотези на рівні значущості 0,05 щодо однорідності двох незалежних вибірок за критерієм Стьюдента (емпіричні дані рис. 5.11 представлено умовними значеннями).

Послідовність рішення:

- Ситуації відповідає варіант *неспрямованих гіпотез*:

  H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (μ_1 не відрізняється від μ_2);

  H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (μ_1 відрізняється від μ_2).

- *Перевірка припущень*: розподіл досліджуваних параметрів, а також дисперсії *невідомі*; вибірки *незв'язані*; обсяги вибірок різні; виміри *інтервальні*.

- *Розрахунки емпіричного критерію* показано на рис. 5.11 і 5.12. Емпіричне значення критерію $t_{емп}$ можна оцінити також з елементарних розрахунків:

$$t_{емп} = \frac{4{,}72 - 3{,}90}{\sqrt{\frac{(18-1) \cdot 1{,}98 + (20-1) \cdot 2{,}09}{14 + 20 - 2}\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{20}\right)}} \approx 1{,}77.$$

- *Критичне значення* $t_{\text{кр}}$ для рівня значущості 0,05 можна отримати за допомогою функції =СТЬЮДРАСПОБР(), яка повертає значення $t_{0,05} \approx 2,03$ двобічного t-критерію, що відповідає варіанту неспрямованих гіпотез.

- *Прийняття рішення.* Оскільки $t_{емп}<t_{0,05}$, тобто 1,77 < 2,04, нульова гіпотеза H_0 приймається на рівні значущості 0,05.

	A	B	C
1	Емпіричні дані		
2	i	x_1	x_2
3	1	6	4
4	2	7	4
5	3	4	5
6	4	5	4
7	5	4	1
8	6	5	5
9	7	3	5
10	8	6	3
11	9	7	3
12	10	3	6
13	11	7	2
14	12	3	3
15	13	5	4
16	14	4	3
17	15	4	7
18	16	3	5
19	17	5	3
20	18	4	2
21	19		4
22	20		5
23	Розрахунки		
24	Середні	4,72	3,90
25	Дисперсії	1,98	2,09
26	n =	18	20
27	$t_{емп}$ =	1,77	
28	$t_{0,05}$ =	2,03	
29	$p_{емп}$ =	8,48%	
30	ТТЕСТ	8,48%	

Рис. 5.11. Розрахунки t-критерію

	A	B	C
1	Емпіричні дані		
2	i	x_1	x_2
3	1	6	4
4	2	7	4
5	3	4	5
6	4	5	4
7	5	4	1
8	6	5	5
9	7	3	5
10	8	6	3
11	9	7	3
12	10	3	6
13	11	7	2
14	12	3	3
15	13	5	4
16	14	4	3
17	15	4	7
18	16	3	5
19	17	5	3
20	18	4	2
21	19		4
22	20		5
23	Розрахунки		
24	Середні	=СРЗНАЧ(B3:B20)	=СРЗНАЧ(C3:C22)
25	Дисперсії	=ДИСП(B3:B20)	=ДИСП(C3:C22)
26	n =	=СЧЁТ(B3:B20)	=СЧЁТ(C3:C22)
27	$t_{емп}$ =	=(B24-C24)/КОРЕНЬ(((B26-1)*B25+(C26-1)*C25)/(B26+C26-2)*(1/B26+1/C26))	
28	$t_{0,05}$ =	=СТЬЮДРАСПОБР(0,05;$B26+$C26-2)	
29	$p_{емп}$ =	=СТЬЮДРАСП(B27;B26+C26-2;2)	
30	ТТЕСТ	=ТТЕСТ(B3:B20;C3:C22;2;2)	

Рис. 5.12. Розрахункові формули t-критерію (незв'язані вибірки різних обсягів)

- *Формулювання висновків.* На рівні значущості 0,05 відсутні підстави стверджувати про неоднорідність незалежних вибірок. Проте слід мати на увазі, що статистика критерію Студента перевіряє не збіг функцій розподілу вибірок, а збіг характеристик випадкових величин – математичних очікувань.

Перевірку гіпотез можна провести шляхом визначення ймовірності $p_{емп}$ за допомогою функції =СТЬЮДРАСП(B27;B26+C26-2;2) (див. комірку B29 рис. 5.11 і 5.12 $p_{емп} \approx 8,48\%$). Якщо $p_{емп} \leq \alpha$, нульова гіпотеза H_0 відхиляється. Як бачимо, ця умова не виконується: 8,48% > 5%, а це значить, що нульова гіпотеза H_0 повинна бути прийнята.

Експрес-оцінювання ймовірності $p_{емп}$ можна провести і за допомогою функції MS Excel =TTECT(). Аргументами функції виступають: вибіркові масиви і деякі параметри. Для двобічної моделі нульова гіпотеза H_0 приймається на рівні значущості α, якщо виконується умова $\alpha \leq$ TTECT $\leq 1-\alpha$, інакше H_0 відхиляється. У комірку B30 внесено вираз =TTECT(B3:B20;C3:C22;2;2) і отримано вже відоме значення, яке дорівнює приблизно 8,48% (див. рис. 5.11 і 5.12). Отже, на рівні значущості α = 0,05(5%) умова 5% ≤ 8,48% ≤ 95% *виконується*, тому нульова гіпотеза H_0 приймається.

Перевірку статистичних гіпотез щодо однорідності двох незалежних вибірок можна здійснити за допомогою пакета «Аналіз даних» розділ «Двовибірковий *t*-тест з однаковими дисперсіями» (рис. 5.13).

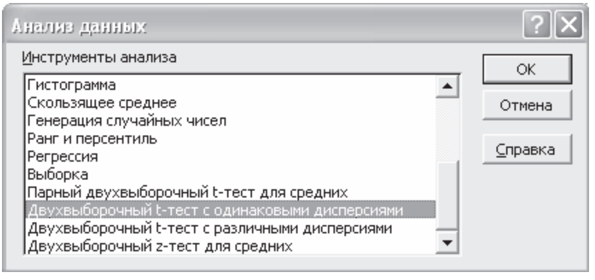


Рис. 5.13. Меню пакета «Аналіз даних»

Для реалізації цього засобу у відповідне діалогове вікно необхідно ввести параметри, як показано на рис. 5.14, виконати команду «OK» і отримати результати t-тестування (рис. 5.15).

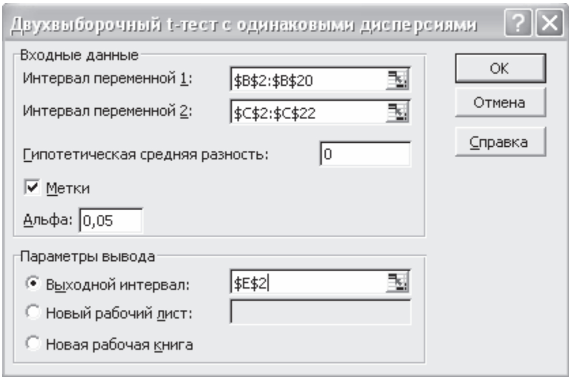


Рис. 5.14. Діалогове вікно
«Двовибірковий *t*-тест з однаковими дисперсіями»

	A	B	C	D	E	F	G
1	Емпіричні дані						
2	i	x_1	x_2		Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями		
3	1	6	4				
4	2	7	4			x_1	x_2
5	3	4	5		Среднее	4,72	3,90
6	4	5	4		Дисперсия	1,98	2,09
7	5	4	1		Наблюдения	18	20
8	6	5	5		Объединенная дисперсия	2,04	
9	7	3	5		Гипотетическая разность средних	0	
10	8	6	3		df	36	
11	9	7	3		t-статистика	1,77	
12	10	3	6		P(T<=t) одностороннее	4,24%	
13	11	7	2		t критическое одностороннее	1,69	
14	12	3	3		P(T<=t) двухстороннее	8,48%	
15	13	5	4		t критическое двухстороннее	2,03	
16	14	4	3				
17	15	4	7				
18	16	3	5				
19	17	5	3				
20	18	4	2				
21	19		4				
22	20		5				

Рис. 5.15. Результати двовибіркового *t*-тесту

Двовибірковий *t*-тест (рис. 5.15) розраховує значення основних статистик (середні, дисперсії), емпіричних і теоретичних критеріїв, що дає можливість приймати статистичні рішення аналогічні попереднім. Проте цей метод передбачає виконання вимоги рівності дисперсій сукупностей.

Критерій Крамера-Велча *T*

Критерій Крамера-Велча T побудований на підході оцінювання рівності математичних очікувань генеральних сукупностей, звідки взято вибірки. Статистика критерію має вигляд:

$$T = \frac{\sqrt{n_1 n_2}\,(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{\sqrt{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}}, \qquad (5.11)$$

де невідомі дисперсії замінені їхніми вибірковими оцінками. Більш того, при рості обсягів вибірок розподіл статистики T Крамера-Велча збігається до стандартного нормального розподілу з математичним очікуванням 0 і дисперсією 1,00. З асимптотической нормальності статистики T правило ухвалення рішення для критерію Крамера-Велча виглядає так: якщо $|T_{емп}| < z(1-\alpha/2)$, то гіпотеза однорідності (рівності математичних очікувань) приймається на рівні значущості α. У прикладній статистиці найбільше часто застосовується рівень значущості 0,05. Тоді значення модуля статистики T Крамера-Велча треба порівнювати із критичним значенням $z_{кр}$=1,96.

Приклад 5.6. Зробити статистичні висновки на рівні значущості 0,05 щодо однорідності двох вибірок за критерієм Крамера-Велча (емпіричні дані взято з попереднього прикладу 5.5).

Послідовність рішення:

- *Розрахунки емпіричного критерію* показано на рис. 5.16 і 5.17. Емпіричне значення критерію $T_{емп}$ можна оцінити з елементарних розрахунків:

$$T = \frac{\sqrt{18 \cdot 20}(4{,}72 - 3{,}90)}{\sqrt{18 \cdot 1{,}98 + 20 \cdot 2{,}09}} \approx 1{,}77\,.$$

- *Критичне значення* $T_{кр}$ для рівня значущості 0,05 отримаємо за допомогою функції =НОРМСТОБР(1-0,05/2), яка повертає значення 1,96.

- *Прийняття рішення.* Оскільки $T_{емп} < z_{0,05}$ (1,77<1,96), нульова гіпотеза H_0 приймається на рівні значущості 0,05.

	A	B	C
1	Емпіричні дані		
2	i	x_1	x_2
3	1	6	4
4	2	7	4
5	3	4	5
6	4	5	4
7	5	4	1
8	6	5	5
9	7	3	5
10	8	6	3
11	9	7	3
12	10	3	6
13	11	7	2
14	12	3	3
15	13	5	4
16	14	4	3
17	15	4	7
18	16	3	5
19	17	5	3
20	18	4	2
21	19		4
22	20		5
23	Розрахунки		
24	Середні	4,72	3,90
25	Дисперсії	1,98	2,09
26	n =	18	20
27	$T_{емп}$ =	1,77	
28	$z_{0,05}$ =	1,96	

Рис. 5.16. Розрахунки *T*-критерію

	A	B	C
1	Емпіричні дані		
2	i	x_1	x_2
3	1	6	4
4	2	7	4
5	3	4	5
6	4	5	4
7	5	4	1
8	6	5	5
9	7	3	5
10	8	6	3
11	9	7	3
12	10	3	6
13	11	7	2
14	12	3	3
15	13	5	4
16	14	4	3
17	15	4	7
18	16	3	5
19	17	5	3
20	18	4	2
21	19		4
22	20		5
23	Розрахунки		
24	Середні	=СРЗНАЧ(B3:B20)	=СРЗНАЧ(C3:C22)
25	Дисперсії	=ДИСП(B3:B20)	=ДИСП(C3:C22)
26	n =	=СЧЁТ(B3:B20)	=СЧЁТ(C3:C22)
27	$T_{емп}$ =	=КОРЕНЬ(B26*C26)*(B24-C24)/КОРЕНЬ((B26*B25+C26*C25))	
28	$z_{0,05}$ =	=НОРМСТОБР(1-0,05/2)	

Рис. 5.17. Розрахункові формули *T*-критерію (незв'язані вибірки різних обсягів)

• *Формулювання висновків.* На рівні значущості 0,05 відсутні підстави стверджувати про неоднорідність незалежних вибірок.

Серед психолого-педагогічних завдань нерідко інтерес становить не перевірка рівності математичних очікувань або інших параметрів розподілу, а виявлення будь-яких розходжень генеральних сукупностей, з яких витягнуті вибірки. Але методи, що засновані на використанні статистик Стьюдента t і Крамера-Велча T, не дозволяють перевіряти гіпотезу H_0 щодо розходжень сукупностей. Тому варто використовувати непараметричні методи (наприклад, Колмогорова-Смірнова, Вілкоксона-Манна-Вітні, Лемана-Розенблатта та ін.), для яких не є обов’язковими припущення приналежності розподілу результатів спостережень певному параметричному сімейству.

Критерій Колмогорова-Смірнова λ

Критерій Колмогорова-Смірнова λ призначений для зіставлення двох емпіричних розподілів $F_1(x)$ і $F_2(x)$ між собою. Статистика критерію має вид:

$$\lambda = \max\left|F_1(x) - F_2(x)\right|, \qquad (5.12)$$

де $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – емпіричні функції розподілу вибірок n_1 і n_2.

Критерій дозволяє знайти точку, у якій сума накопичених розбіжностей між двома розподілами $F_1(x)$ і $F_2(x)$ є найбільшою (максимальною), і оцінити достовірність цієї розбіжності. Для λ-критерію зіставляють *накопичені* (інтегральні) частоти. Нульова гіпотеза H_0 свідчить про те, що відмінності між двома розподілами *недостовірні*.

Приклад 5.7. Зробити статистичні висновки на рівні значущості 0,05 щодо однорідності двох вибірок за критерієм Колмогорова-Смірнова (емпіричні дані взято з прикладу 5.5).

Послідовність рішення:

- *Формулювання гіпотез*:

H_0: відмінності між двома розподілами *недостовірні* (судячи з точки максимальної накопиченої розбіжності між ними);

H_1: відмінності між двома розподілами *достовірні* (судячи з точки максимальної накопиченої розбіжності між ними).

- *Розрахунки емпіричного критерію* Колмогорова-Смірнова $\lambda_{емп}$ показано на рис. 5.18. У стовпчику J розраховано абсолютні різниці накопичених емпіричних частот $| F_1 – F_2 |$, максимальне значення яких складе емпіричний λ-критерій Колмогорова-Смірнова:

$$\lambda_{емп} = \max| F_1 – F_2 | = 0{,}178.$$

Розрахункові формули для визначення $\lambda_{емп}$ наведено на рис. 5.19.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Емпіричні дані				Інтервали	Частоти:				$\lvert F_1 - F_2 \rvert$
2	i	x_1	x_2			диференціальні		інтегральні		
3	1	6	4			абсолютні		відносні		
4	2	7	4		x_i	n_1	n_2	F_1	F_2	
5	3	4	5		0	0	0	0,00	0,00	0,000
6	4	5	4		1	0	1	0,00	0,05	0,050
7	5	4	1		2	0	2	0,00	0,15	0,150
8	6	5	5		3	4	5	0,22	0,40	**0,178**
9	7	3	5		4	5	5	0,50	0,65	0,150
10	8	6	3		5	4	5	0,72	0,90	0,178
11	9	7	3		6	2	1	0,83	0,95	0,117
12	10	3	6		7	3	1	1,00	1,00	0,000
13	11	7	2		Суми:	18	20		$\lambda_{емп}$ =	**0,178**
14	12	3	3							
15	13	5	4						$\lambda_{0,05}$ =	0,294
16	14	4	3							
17	15	4	7							
18	16	3	5							
19	17	5	3							
20	18	4	2							
21	19		4							
22	20		5							

Рис. 5.18. Розрахунки емпіричного критерію $\lambda_{емп}$

- *Критичні значення* λ-критерію для рівня значущості 0,05 і n = 20 визначаються за табл. 3 Додатків $\lambda_{0,05} \approx 0,294$.

	E	F	G	H	I	J
1	Інтервали	Частоти:				$\lvert F_1 - F_2 \rvert$
2		диференціальні		інтегральні		
3		абсолютні		відносні		
4	x_i	n_1	n_2	F_1	F_2	
5	0	=ЧАСТОТА(B3:B20;E5:E12)	=ЧАСТОТА(C3:C22;E5:E12)	=F5	=G5	=ABS(H5-I5)
6	1	=ЧАСТОТА(B3:B20;E5:E12)	=ЧАСТОТА(C3:C22;E5:E12)	=F6/18+H5	=G6/20+I5	=ABS(H6-I6)
7	2	=ЧАСТОТА(B3:B20;E5:E12)	=ЧАСТОТА(C3:C22;E5:E12)	=F7/18+H6	=G7/20+I6	=ABS(H7-I7)
8	3	=ЧАСТОТА(B3:B20;E5:E12)	=ЧАСТОТА(C3:C22;E5:E12)	=F8/18+H7	=G8/20+I7	=ABS(H8-I8)
9	4	=ЧАСТОТА(B3:B20;E5:E12)	=ЧАСТОТА(C3:C22;E5:E12)	=F9/18+H8	=G9/20+I8	=ABS(H9-I9)
10	5	=ЧАСТОТА(B3:B20;E5:E12)	=ЧАСТОТА(C3:C22;E5:E12)	=F10/18+H9	=G10/20+I9	=ABS(H10-I10)
11	6	=ЧАСТОТА(B3:B20;E5:E12)	=ЧАСТОТА(C3:C22;E5:E12)	=F11/18+H10	=G11/20+I10	=ABS(H11-I11)
12	7	=ЧАСТОТА(B3:B20;E5:E12)	=ЧАСТОТА(C3:C22;E5:E12)	=F12/18+H11	=G12/20+I11	=ABS(H12-I12)
13	Суми:	=СУММ(F5:F12)	=СУММ(G5:G12)		$\lambda_{емп}$ =	=МАКС(J5:J12)
14						
15					$\lambda_{0,05}$ =	0,294

Рис. 5.19. Розрахункові формули для визначення $\lambda_{емп}$

- *Прийняття рішення.* Оскільки емпіричне значення критерію $\lambda_{емп} \approx 0,178$ менше за критичне значенню $\lambda_{0,05} \approx 0,294$, гіпотеза H_0 приймається на рівні значущості 0,05.

• *Формулювання висновків.* На рівні значущості 0,05 відсутні підстави стверджувати про неоднорідність незалежних вибірок.

Критерій Вілкоксона-Манна-Вітні *U*

Статистика критерію Вілкоксона-Манна-Вітні[25] U визначається у такий спосіб. Всі X-елементи першої і Y-елементи другої вибірки об'єднуються. Об'єднана вибірка $x_1, x_2, ..., x_{n1}, y_1, y_2, ..., y_{n2}$ (n_1 і n_2 – обсяги вибірок) упорядковуються за зростанням. Елементи першої вибірки $x_1, x_2, ..., x_{n1}$ займають у загальному варіаційному ряді місця з номерами $R_1, R_2, ..., R_{n1}$, інакше кажучи, мають ранги $R_1, R_2, ..., R_{n1}$. Тоді сума рангів елементів першої вибірки є статистикою Вілкоксона T_x:

$$T_x = R_1 + R_2 + ... + R_{n1}. \qquad (5.13)$$

Статистика Манна-Вітні U визначається формулою

$$U = (n_1 \cdot n_2) + \frac{n_x \cdot (n_x + 1)}{2} - T_x. \qquad (5.14)$$

Оскільки T_x і U лінійно зв'язані, то часто мова йдеться не про два критерії – Вілкоксона і Манна-Вітні, а про один – критерій Вілкоксона-Манна-Вітні[26]. Метод Манна-Вітні визначає зону значень між двома чисельними рядами, що перехрещуються. *Чим менше* емпіричне значення критерію $U_{емп}$, *тим більш* ймовірно, що відмінності *достовірні.* Коли обсяги обох вибірок безмежно зростають, розподіли статистик Вілкоксона і Манна-Вітні є асимптотично нормальними.

Приклад 5.8. За допомогою U-критерію перевірити припущення щодо однорідності вибірок (відмінності між показниками груп) за емпіричними даними прикладу 5.5).

Послідовність рішення:

• *Формулювання гіпотез*:

H_0: відмінності у показниках ознаки не є статистично значущі;

---

[25] Інколи цей критерій називають критерієм Манна-Вітні [17].
[26] Критерій Вілкоксона може застосовуватися і окремо.

H_1: відмінності у показниках ознаки є статистично значущі.

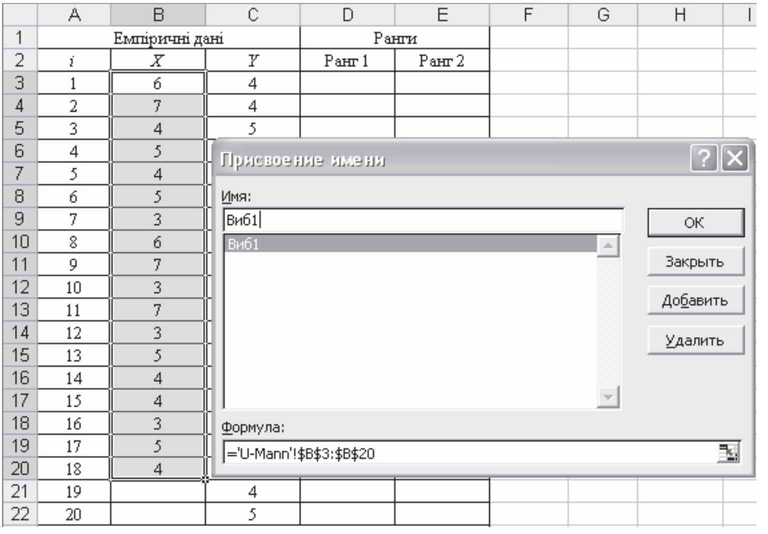


Рис. 5.20. Присвоєння імені «Виб1» діапазону даних $B$3:$B$20

- *Розрахунки емпіричного критерію* (рис. 5.20 і 5.21):

– присвоїти ім'я «Виб1» і «Виб2» двом вибіркам. Для цього виконати команди головного меню MS Excel [Вставка –> Ім'я –> Присвоїти…]. У діалоговому вікні (рис. 5.20) внести ім'я «Виб1» (ім'я записати без пробілів), а також діапазон комірок даних ($B$3:$B$20 – адреса абсолютна). Присвоїти ім'я «Виб2» діапазонові даних C3:C22 за аналогічними діями;

– виконати ранжирування значень вибірок, розглядаючи їх як одну об'єднану групу, приписуючи меншому значенню нижчий ранг (загальна кількість рангів $n_1 + n_2$). Для цього внести у стовпчики «Ранг 1» і «Ранг 2» відповідний вираз, який, наприклад, для комірки D3 виглядатиме як:

=(СЧЁТ(Виб1:Виб2) + 1 – РАНГ(B3;Виб1:Виб2; 1) –
РАНГ(B3;Виб1:Виб2; 0))/2+РАНГ(B3;Виб1:Виб2;1);

	A	B	C	D	E
1	Емпіричні дані			Ранги	
2	*i*	*X*	*Y*	Ранг 1	Ранг 2
3	1	6	4	33	17,5
4	2	7	4	36,5	17,5
5	3	4	5	17,5	27
6	4	5	4	27	17,5
7	5	4	1	17,5	1
8	6	5	5	27	27
9	7	3	5	8	27
10	8	6	3	33	8
11	9	7	3	36,5	8
12	10	3	6	8	33
13	11	7	2	36,5	2,5
14	12	3	3	8	8
15	13	5	4	27	17,5
16	14	4	3	17,5	8
17	15	4	7	17,5	36,5
18	16	3	5	8	27
19	17	5	3	27	8
20	18	4	2	17,5	2,5
21	19		4		17,5
22	20		5		27
23	Розрахунки				
24	n_1 =	18			
25	n_2 =	20			
26	T_1 =	403,0			
27	T_2 =	338,0			
28	n_x =	18			
29	T_x =	403,0			
30	$U_{емп}$ =	128,0			
31	$U_{0,05}$ =	123,0	H_0	приймається	

Рис. 5.21. Результати розрахунків критерію $U_{емп}$

– скопіювати вираз в інші комірки стовпчиків D і E;

– розрахувати обсяг вибірок n_1 і n_2. Для цього у комірку B24 внести вираз =СЧЁТ(Виб1), а у комірку B25 – вираз =СЧЁТ(Виб2);

– розрахувати суми рангів T_1 і T_2 для двох вибірок. У комірку B26 внести вираз =СУММ(D3:D20), у комірку B27 – вираз =СУММ(E3:E22);

– визначити обсяг n_x вибірки з *більшою* сумою рангів. У комірку B28 внести вираз =ЕСЛИ(B26>B27;B24;B25);

– визначити T_x – *найбільшу* з двох (T_1 і T_2) рангових сум. У комірку B24 внести вираз =ЕСЛИ(B26>B27;B26;B27);

– визначити емпіричне значення *U*-критерію за формулою:

$$U_{емп} = (n_1 \cdot n_2) + \frac{n_x \cdot (n_x + 1)}{2} - T_x, \qquad (5.15)$$

де n_1 і n_2 – обсяги вибірок; n_x – обсяг вибірки з *більшою* сумою рангів; T_x – *найбільша* із двох рангових сум. Для цього у комірку B25 внести вираз =(B24*B25)+B28*(B28+1)/2-B29. $U_{емп}$=128.00 (див. рис. 5.21).

- *Визначення критичного значення U-критерію*. За табл. 4 Додатків для n_1 =18 і n_2 =20, а також α = 0,05 критичне значення $U_{0,05}$ = 123.

- *Прийняття рішення.* Оскільки $U_{емп}>U_{0,05}$ (128>123), нульова гіпотеза H_0 приймається на рівні 0,05. *Зауваження:* для *U*-критерію H_0 приймається за умови $U_{емп} > U_{кр}$.

- *Формулювання висновків.* На рівні значущості 0,05 можна стверджувати, що відмінності у показниках ознаки не є статистично значущі.

Критерій Вілкоксона-Манна-Вітні придатний для статистичного аналізу даних, виміряних за порядковою шкалою. Проте у варіанті загальної альтернативи критерій не завжди дозволяє виявити розходження функцій розподілу. Для цього варіанту перевірки однорідності вибірок доцільно застосовувати критерій Лемана-Розенблатта ω^2.

Критерій Лемана-Розенблатта $\omega^2_{n,m}$

Непараметричний критерій Лемана-Розенблатта типу омега-квадрат застосовується для перевірки однорідності двох незалежних вибірок. Як і за методом Вілкоксона-Манна-Вітні, елементи першої і другої вибірки, що взято з невідомих розподілів $F_n(x)$ і $G_m(x)$, об’єднуються. Для об'єднаної упорядкованої за зростанням вибірки $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m$ визначаються ранги $R_{x1}, R_{x2}, ..., R_{xn}, R_{y1}, R_{y2}, ..., R_{ym}$.

Висувається нульова гіпотеза однорідності H_0: $F_n(x) = G_m(x)$ проти альтернативної гіпотези H_1: $F_n(x) \neq G_m(x)$.

Статистика критерію Лемана-Розенблатта визначається формулою

$$\omega^2_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{F}_n(x) - G_m(x)\right]^2 d\hat{H}_{n+m}(x). \qquad (5.16)$$

де $\hat{F}_n(x)$ і $G_m(x)$ – емпіричні функції розподілу вибірок обсягами n і m, $\hat{H}_{n+m}(x) = \frac{n}{n+m}\hat{F}_n(x) + \frac{m}{n+m}\hat{G}_n(x)$ – емпірична функція об'єднаної вибірки.

Значення статистики залежить лише від рангів елементів вибірки:

$$\omega^2_{n,m} = \frac{1}{nm}\left[1/6 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}(R_i - i)^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}(S_j - j)^2 + \right] - 2/3, \qquad (5.17)$$

де R_i – ранг $x_{(i)}$, S_j – ранг $y_{(j)}$ в об'єднаній варіаційній вибірці.

Критерій має однобічну (праву) критичну область. При потраплянні значення статистики $\frac{nm}{n+m}\omega^2_{n,m}$ у напівінтервал $\{z_{1-\alpha}, \infty\}$, гіпотеза H_0 відхиляється. Значення деяких основних квантилів наведено у табл. 5.2.

Таблиця 5.2

$\alpha =$	0,5	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001
$Z_{1-\alpha} =$	0,12	0,28	0,35	0,46	0,58	0,74	1,17

Для незначних за обсягом вибірок (n, m ≥ 7) використовується нормована статистика

$$Z = \left(\frac{nm}{n+m}\omega^2_{n,m} - M\right)/\sqrt{45D} + 1/6, \qquad (5.18)$$

де $M = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n+m}\right)$ і $D = \frac{1}{45}\left(1 + \frac{1}{n+m}\right)\left[1 + \frac{1}{n+m} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\right]$.

*Приклад 5.9. З*а допомогою критерію Лемана-Розенблатта перевірити гіпотезу щодо однорідності вибірок (за даними прикладу 5.5).

Послідовність рішення:

- *Формулювання гіпотез*:

H_0: відмінності у вибіркових показниках *не є статистично значущі*;

H_1: відмінності у вибіркових показниках *є статистично значущі*.

- *Розрахунки емпіричного критерію* (рис. 5.22 і 5.23):

– присвоїти ім'я «Виб1» і «Виб2» двом вибіркам (див. розрахунки *U*-критерію);

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Емпіричні дані			Ранги		Ранги упорядковані		Квадрати різниць	
2	i, j	X	Y	R_i	S_i	R_i	S_i	$(R_i - i)^2$	$(S_j - j)^2$
3	1	6	4	33	17,5	8	1	49,00	0,00
4	2	7	4	36,5	17,5	8	2,5	36,00	0,25
5	3	4	5	17,5	27	8	2,5	25,00	0,25
6	4	5	4	27	17,5	8	8	16,00	16,00
7	5	4	1	17,5	1	17,5	8	156,25	9,00
8	6	5	5	27	27	17,5	8	132,25	4,00
9	7	3	5	8	27	17,5	8	110,25	1,00
10	8	6	3	33	8	17,5	8	90,25	0,00
11	9	7	3	36,5	8	17,5	17,5	72,25	72,25
12	10	3	6	8	33	27	17,5	289,00	56,25
13	11	7	2	36,5	2,5	27	17,5	256,00	42,25
14	12	3	3	8	8	27	17,5	225,00	30,25
15	13	5	4	27	17,5	27	17,5	196,00	20,25
16	14	4	3	17,5	8	33	27	361,00	169,00
17	15	4	7	17,5	36,5	33	27	324,00	144,00
18	16	3	5	8	27	36,5	27	420,25	121,00
19	17	5	3	27	8	36,5	27	380,25	100,00
20	18	4	2	17,5	2,5	36,5	27	342,25	81,00
21	19		4		17,5		33		196,00
22	20		5		27		36,5		272,25
23	Розрахунки					Суми:		3481,00	1335,00
24	n =	18							
25	m =	20							
26	ω^2 =	0,02							
27	M =	0,17							
28	D =	0,02							
29	Z =	0,22							
30	$Z_{1-\alpha}$ =	0,12	0,28	0,35	0,46	0,58	0,74	1,17	
31	α =	0,5	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001	

Рис. 5.22. Результати розрахунків критерію ω^2

– у стовпчиках D і E отримати ранги значень вибірок, розглядаючи їх як одну об'єднану групу, приписуючи меншому значенню нижчий ранг (загальна кількість рангів $n + m$). Для цього внести у стовпчики R_i і S_i відповідний вираз, який, наприклад, для комірки D3 виглядатиме як:

=(СЧЁТ(Виб1:Виб2) + 1 – РАНГ(B3;Виб1:Виб2; 1) –

– РАНГ(B3;Виб1:Виб2; 0))/2+РАНГ(B3;Виб1:Виб2;1);

– скопіювати цей вираз в інші комірки стовпчиків D і E, отримати ранги;

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Емпіричні дані			Ранги		Ранги упорядковані		Квадрати різниць	
2	*i, j*	*X*	*Y*	R_i	S_i	R_i	S_i	$(R_i - i)^2$	$(S_j - j)^2$
3	1	6	4	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	8	1	=(F3-A3)^2	=(G3-A3)^2
4	2	7	4	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	8	2,5	=(F4-A4)^2	=(G4-A4)^2
5	3	4	5	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	8	2,5	=(F5-A5)^2	=(G5-A5)^2
6	4	5	4	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	8	8	=(F6-A6)^2	=(G6-A6)^2
7	5	4	1	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	17,5	8	=(F7-A7)^2	=(G7-A7)^2
8	6	5	5	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	17,5	8	=(F8-A8)^2	=(G8-A8)^2
9	7	3	5	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	17,5	8	=(F9-A9)^2	=(G9-A9)^2
10	8	6	3	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	17,5	8	=(F10-A10)^2	=(G10-A10)^2
11	9	7	3	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	17,5	17,5	=(F11-A11)^2	=(G11-A11)^2
12	10	3	6	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	27	17,5	=(F12-A12)^2	=(G12-A12)^2
13	11	7	2	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	27	17,5	=(F13-A13)^2	=(G13-A13)^2
14	12	3	3	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	27	17,5	=(F14-A14)^2	=(G14-A14)^2
15	13	5	4	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	27	17,5	=(F15-A15)^2	=(G15-A15)^2
16	14	4	3	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	33	27	=(F16-A16)^2	=(G16-A16)^2
17	15	4	7	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	33	27	=(F17-A17)^2	=(G17-A17)^2
18	16	3	5	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	36,5	27	=(F18-A18)^2	=(G18-A18)^2
19	17	5	3	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	36,5	27	=(F19-A19)^2	=(G19-A19)^2
20	18	4	2	=(СЧЁТ(Ви	=(СЧЁТ(В	36,5	27	=(F20-A20)^2	=(G20-A20)^2
21	19		4		=(СЧЁТ(В		33		=(G21-A21)^2
22	20		5		=(СЧЁТ(В		36,5		=(G22-A22)^2
23	Розрахунки					Суми:		=СУММ(H3:H	=СУММ(I3:I22)
24	*n* =	=СЧЁТ(Виб1)							
25	*m* =	=СЧЁТ(Виб2)							
26	ω^2 =	=(1/6+H23/B25+I23/B24)/B24/B25-2/3							
27	*M* =	=1/6*(1+1/(B24+B25))							
28	*D* =	=1/45*(1+1/(B24+B25)*(1+1/(B24+B25)-3/4*(1/B24+1							
29	*Z* =	=(B24*B25/(B24+B25)*B26-B27)/КОРЕНЬ(45*B28)+1							
30	$Z_{1-\alpha}$ =	0,12	0,28	0,35	0,46	0,58	0,74	1,17	
31	α =	0,5	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001	

Рис. 5.23. Розрахункові формули критерію ω^2

– скопіювати за допомогою команд головного меню MS Excel [Правка –> Спеціальна вставка…] значення рангів у комірки стовпчиків F і G, упорядкувати ранги за зростанням;

– у комірках H2:I22 розрахувати квадрати різниць $(R_i - i)^2$ і $(S_j - j)^2$;

– у комірках H23 і I23 розрахувати суми квадратів різниць $\sum(R_i - i)^2$ і $\sum(S_j - j)^2$ ();

– розрахувати обсяги вибірок *n* і *m*, критерій ω^2 (5.17), параметри *M*, *D* і *Z* (5.18), а також значення емпіричної нормованої статистики $Z \approx 0{,}22$.

• *Визначити критичне значення* $Z_{1-\alpha}$ за табл. 5.2 для $\alpha = 0{,}05$. Квантиль $Z_{0,95} = 0{,}46$.

• *Прийняття рішення*. Оскільки $Z<Z_{0,95}$ (0,22<0,46), нульова гіпотеза H_0 приймається на рівні 0,05, тобто можна стверджувати, що відмінності у показниках досліджуваної ознаки не є статистично значущі.

На основі порівняльного аналізу критеріїв можна зробити такі висновки.

1) Область застосувань методу перевірки однорідності за допомогою критерію Стьюдента обмежена. Він дозволяє перевіряти гіпотезу про рівність математичних очікувань, але не гіпотезу про те, що обидві вибірки взяті з однієї й тієї ж генеральної сукупності. Класичні умови застосовності критерію Стьюдента в переважній більшості психолого-педагогічних і інших завдань не виконуються. При значних і приблизно рівних обсягах вибірок його можна застосовувати. При кінцевих обсягах вибірок традиційний метод носить досить наближений характер.

2) Застосування критерію Крамера-Велча не менш обґрунтовано, чим застосування критерію Стьюдента. Додаткова перевага – не потрібно контролювати вимоги рівності дисперсій. Тому представляється доцільним замінити використання критерію Стьюдента на критерій Крамера-Велча.

3) При зіставленні двох емпіричних розподілів за критерієм Колмогорова-Смірнова необхідно, щоб обсяги вибірок були $n_{1,}$ $n_2 \geq 50$, при зіставленні емпіричного розподілу з теоретичним допускається при $n \geq 5$. Розряди мають бути впорядковані за зростанням (спаданням) ознаки.

4) Критерій Вілкоксона-Манна-Вітні є одним із найбільш розповсюджених непараметричних рангових критеріїв, що використовується для перевірки однорідності двох вибірок. Проте у варіанті загальної альтернативи критерій не є спроможним, тому рекомендують застосовувати спроможні критерії, зокрема, критерій Лемана-Розенблатта типу омега-квадрат.

Отже, для перевірки *однорідності функцій розподілу* рекомендують застосовувати статистику Лемана-Розенблатта типу омега-квадрат. Для перевірки *однорідності математичних очікувань* доцільно застосовувати критерій Крамера-Велча. Статистики Стьюдента, Вілкоксона-Манна-Вітні та ін. припустимо використовувати лише в окремих випадках [49].

Запитання. Завдання.

1. Чому область застосувань методу перевірки однорідності за допомогою критерію Стьюдента обмежена?

2. Коли доцільно застосовувати критерій Стьюдента *t*?

3. Обґрунтуйте доцільним заміну використання критерію Стьюдента на критерій Крамера-Велча.

4. Які існують обмеження при зіставленні двох емпіричних розподілів за критерієм Колмогорова-Смірнова?

5. Проаналізуйте критерії Вілкоксона-Манна-Вітні і Лемана-Розенблатта, які використовується для перевірки однорідності двох вибірок

6. Повторіть математичні процедури завдань за прикладами 5.5 і 5.9.

7. Виконайте лабораторні роботи № 11 і № 12.

5.4. ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ ПРО ЧИСЕЛЬНІ ЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ

Гіпотези про чисельні значення параметрів зустрічаються тоді, коли необхідно переконатися, що параметри центральних тенденції або мінливості відповідають номіналові. Наприклад, для середнього значення параметру це означає, що необхідно перевірити нульову гіпотезу H_0: μ = a проти альтернативної H_1: $\mu \neq$ a, або H_2: $\mu >$ a, або H_3: $\mu <$ a. Аналогічні гіпотези можна сформулювати для інших параметрів. У табл. 5.3 приведено варіанти гіпотез, статистичні критерії та умови прийняття рішень для здійснення перевірки гіпотез про чисельні значення параметрів нормального закону розподілу.

Таблиця 5.3.

Критерії перевірки гіпотез про чисельні значення параметрів

Параметр	Нульова гіпотеза	Припущення	Статистика критерію	Альтернативні гіпотези	Правило відхилення H_0
Середнє	H_0: $\mu = \mu_0$	σ^2 відома	$z = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$	H_1: $\mu \neq \mu_0$	$\lvert z \rvert > z_{1-\alpha}$
				H_2: $\mu > \mu_0$	$\lvert z \rvert > z_{1-2\alpha}$
				H_3: $\mu < \mu_0$	
		σ^2 невідома	$t = \frac{\mu - \mu_0}{s}\sqrt{n-1}$	H_1: $\mu \neq \mu_0$	$\lvert t \rvert > t_{1-\alpha}$
				H_2: $\mu > \mu_0$	$\lvert t \rvert > t_{1-2\alpha}$
				H_3: $\mu < \mu_0$	
Дисперсія	H_0: $\sigma^2 = \sigma^2_0$	μ невідоме	$\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot s_x^2}{\sigma_0^2}$	H_0: $\sigma^2 \neq \sigma^2_0$	$\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}$ $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}$
				H_0: $\sigma^2 > \sigma^2_0$	$\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$
				H_0: $\sigma^2 < \sigma^2_0$	$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$

Методи перевірки гіпотез про чисельне значення середнього параметра з нормальним законом розподілу поділяються на дві групи: для сукупностей з *відомою* (z-критерій) і з *невідомою* дисперсією (t-критерій). Статистика критерію першої групи використовує нормальний розподіл, другої – розподіл Стьюдента (похідний від нормального розподілу). Обидві моделі призначені для даних, виміряних за інтервальною шкалою або шкалою відношень

Значущість середнього (критерій *Z*, дисперсія відома)

Статистика двобічний *z-критерію*, коли дисперсія генеральної сукупності відома має вид:

$$z = \frac{\mu - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2}}\sqrt{n}\,, \qquad (5.19)$$

де μ і σ^2 – середнє і дисперсія генеральної сукупності; μ_0 і n – середнє та обсяг вибірки.

Приклад 5.10. Чи можна прийняти на рівні значущості 0,05 середні показники результатів тестування 40 учнів як задовільний прогноз, що не відрізнятиметься від середнього нормативного показника 4,0 при дисперсії 0,4?

Послідовність рішення:

- Ситуації відповідає варіант *неспрямованих гіпотез*:

  $H_0: \mu = \mu_0$;

  $H_1: \mu \neq \mu_0$.

- *Перевірка припущень*: досліджуваний параметр має *нормальний* розподіл; дисперсія σ^2 *відома*; виміри зроблено за шкалою *інтервалів*.

- *Результати розрахунку* емпіричного z-критерію показано на рис. 5.24, необхідні для цього формули наведено на рис. 5.25.

- Вибіркове середнє показника результатів тестування учнів $\mu_0 \approx 3{,}88$; емпіричне значення z-критерію дорівнює

$$z_{емп} = \frac{4{,}0 - 3{,}88}{\sqrt{0{,}4}}\sqrt{40} \approx 1{,}25\,.$$

- *Критичне значення* z-критерію можна визначити за допомогою функції MS Excel =НОРМСТОБР(1–α), яка у разі двобічної моделі для α=0,05 повертає значення $Z_{1-0,05} \approx 1{,}64$ (див. комірку B18).

	A	B	C	D
1	Емпіричні дані			
2	3	5	5	2
3	4	4	3	4
4	5	5	5	3
5	5	3	4	4
6	4	5	3	5
7	3	3	5	4
8	4	4	4	5
9	3	3	3	4
10	5	5	3	3
11	4	3	2	4
12	Розрахунки			
13	n =	40		
14	μ =	3,88		
15	μ_0 =	4,00		
16	σ^2 =	0,40		
17	$z_{емп}$ =	1,25		
18	$z_{1-0,05}$ =	1,64		
19	$p_{емп}$ =	0,89		
20	zтест	0,89		

Рис. 5.24. Розрахунки z-критерію

	A	B	C	D
1	Емпіричні дані			
2	3	5	5	2
3	4	4	3	4
4	5	5	5	3
5	5	3	4	4
6	4	5	3	5
7	3	3	5	4
8	4	4	4	5
9	3	3	3	4
10	5	5	3	3
11	4	3	2	4
12	Розрахунки			
13	n =	=СЧЁТ(A2:D11)		
14	μ =	=СРЗНАЧ(A2:D11)		
15	μ_0 =	4		
16	σ^2 =	0,4		
17	$z_{емп}$ =	=(B15-B14)/КОРЕНЬ(B16)*КОРЕНЬ(B13)		
18	$z_{1-0,05}$ =	=НОРМСТОБР(1-0,05)		
19	$p_{емп}$ =	=НОРМСТРАСП(B17)		
20	zтест	=ZТЕСТ(A2:D11;B15;КОРЕНЬ(B16))		

Рис. 5.25. Емпіричні дані і формули розрахунку z-критерію (дисперсія відома)

- *Прийняття рішення.* Оскільки $| z | < z_{1-0,05}$, тобто $|1{,}25| < 1{,}64$, нульова гіпотеза H_0 приймається на рівні значущості 0,05.

- *Формулювання висновків.* На рівні значущості 0,05 відсутні підстави стверджувати про те, що середнє значення відрізняється від нормативного.

Перевірку гіпотези про невідоме значення математичного очікування генеральної сукупності можна провести, якщо визначити ймовірність $p_{емп}$, яка відповідає емпіричному критерію $z_{емп}$. Таку перевірку можна виконати за допомогою функції =НОРМСТРАСП($z_{емп}$), яка повертає значення $p_{емп} \approx 0{,}11 \approx 11\%$ (див. комірку B19). Нульова гіпотеза H_0 відхиляється за умови $p_{емп} \leq \alpha$. У прикладі ця умова не виконується $p_{емп} \approx 11\% > 5\%$, тому H_0 приймається.

Табличний процесор MS Excel надає можливість перевірки статистичних гіпотез щодо рівня середнього сукупності з нормальним законом розподілу за допомогою функції =ZТЕСТ(), яка повертає значення $1–p_{емп}$. У якості аргументів функції виступають: вибірковий масив, математичне очікування і стандартне відхилення генеральної сукупності (у разі відсутності останньої використовується вибіркова статистика).

Нульова гіпотеза H_0 приймається на рівні значущості α, якщо ZТЕСТ<1–α. У комірку B20 внесено =ZТЕСТ(A2:D11;B15;КОРЕНЬ(B16)) і отримано значення приблизно 0,89 або 89% (див. рис. 5.24 і 5.25). Отже, на рівні значущості 0,05 умова 89% < 95% виконується і H_0 приймається.

Значущість середнього (критерій *t*, дисперсія невідома)

Критерій Стьюдента t використовується для перевірки гіпотез про чисельне значення середнього параметра з нормальним законом розподілу, коли дисперсія сукупності є *невідомою*.

Приклад 5.11. Мета вибіркового тестування 40 учнів (таблиця рис. 5.26) – оцінити показники успішності у навчанні за новою методикою. Чи можна на рівні значущості 0,05 прийняти, що результати тестування перевищать середній нормативний показник у 4,0 бали?

Послідовність рішення:

- Ситуації відповідає варіант *спрямованих гіпотез*:

H_0: $\mu = \mu_0$;

H_1: $\mu > \mu_0$.

• *Перевірка припущень*: досліджуваний параметр має *нормальний* розподіл; дисперсія *невідома*; виміри зроблено за шкалою *інтервалів*.

• *Вибір статистичного критерію*. Згідно з припущеннями цій ситуації відповідає однобічний *t*-критерій:

$$t = \frac{\mu - \mu_0}{\sqrt{s^2}} \sqrt{n-1}, \tag{5.20}$$

де μ – середнє генеральної сукупності; μ_0, s^2 і n – середнє, дисперсія та обсяг вибірки.

• *Результати розрахунку* емпіричного *t*-критерію $t_{емп}$ показано на рис. 5.26, необхідні формули – на рис. 5.27. Емпіричне значення *t*-критерію:

$$t_{емп} = \frac{4.20 - 4{,}00}{\sqrt{0{,}45}} \sqrt{50-1} \approx 2{,}09.$$

	A	B	C	D	E
1	Емпіричні дані				
2	4	5	4	4	5
3	4	4	4	4	4
4	5	5	5	5	5
5	5	3	4	5	3
6	4	5	3	4	5
7	5	3	5	5	3
8	4	4	4	4	4
9	5	4	3	3	4
10	4	5	4	4	5
11	4	4	4	4	4
12	Розрахунки				
13	n =	50			
14	μ =	4,20			
15	μ_0 =	4,00			
16	s^2 =	0,45			
17	$t_{емп}$ =	2,09			
18	$t_{0,05}$ =	2,01			
19	$p_{емп}$ =	0,02			

Рис. 5.26. Розрахунки *t*-критерію

	A	B	C	D	E
1	Емпіричні дані				
2	4	5	4	4	5
3	4	4	4	4	4
4	5	5	5	5	5
5	5	3	4	5	3
6	4	5	3	4	5
7	5	3	5	5	3
8	4	4	4	4	4
9	5	4	3	3	4
10	4	5	4	4	5
11	4	4	4	4	4
12	Розрахунки				
13	n =	=СЧЁТ(A2:E11)			
14	μ =	=СРЗНАЧ(A2:E11)			
15	μ_0 =	4			
16	s^2 =	=ДИСП(A2:E11)			
17	$t_{емп}$ =	=(B14-B15)/КОРЕНЬ(B16)*КОРЕНЬ(B13-1)			
18	$t_{0,05}$ =	=СТЬЮДРАСПОБР(0,05;B13-1)			
19	$p_{емп}$ =	=СТЬЮДРАСП(ABS(B17);B13-1			

Рис. 5.27. Розрахункові формули *t*-критерію (дисперсія невідома)

• *Визначення критичного значення t*-критерію можна здійснити за допомогою функції =СТЬЮДРАСПОБР(), аргументами якої є рівень значущості α

і число ступенів вільності $df = n–1$. Для значень $\alpha = 0{,}05$ $df = 50–1 = 49$ функція =СТЬЮДРАСПОБР() повертає значення однобічного критерію відповідно до варіанту спрямованих гіпотез: $t_{0,05} \approx 2{,}01$.

- *Прийняття рішення.* Оскільки $|t_{емп}| > t_{0,05}$, тобто (2,09 > 2,01), нульова гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05.
- *Формулювання висновків*. На рівні значущості 0,05 можна стверджувати, що результати тестування перевищують нормативний показник у 4,0 бали. Пропонуємо також самостійно розібратися у значенні й сенсі ймовірності $p_{емп}$ (див. комірку B19 рис. 5.27).

Значущість дисперсії (критерій χ^2)

У дослідженнях з психології і педагогіки мають місце завдання, коли необхідно оцінити властивості варіативності параметрів. Для таких ситуацій використовуються методи перевірки статистичних гіпотез щодо дисперсій сукупностей. Передбачається, що інтервальні дані мають нормальний закон розподілу.

Приклад 5.12. Чи можна стверджувати про те, що вибірка взята із генеральної сукупності з дисперсією σ_0^2=0,25 (дані наведено у таблиці рис. 6.24)?

Послідовність рішення:

- *Формулювання* неспрямованих *гіпотез*:
  H_0: $\sigma^2 = 0{,}25$;
  H_1: $\sigma^2 \neq 0{,}25$.
- *Перевірка припущень*: досліджуваний параметр має *нормальний* розподіл; виміри зроблено за шкалою *інтервалів*.
- *Вибір статистичного критерію*. Згідно з припущеннями цій ситуації відповідає модель двобічного χ^2-критерію:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot s_x^2}{\sigma_0^2}, \tag{5.21}$$

де n – обсяг вибірки; s_x^2 – дисперсія вибірки.

• *Результати розрахунку* емпіричного критерію $\chi^2_{емп}$ показано на рис. 5.28, необхідні для цього формули – на рис. 5.29. Значення вибіркової дисперсії дорівнює: s_x^2=0,44. Значення емпіричного критерію $\chi^2_{емп}$ таке:

$$\chi^2_{емп} = \frac{(30-1)\cdot 0{,}44}{0{,}25} \approx 51{,}20\,.$$

	A	B	C
1	Емпіричні дані		
2	4	5	4
3	4	4	4
4	5	5	5
5	5	4	4
6	4	5	3
7	5	3	5
8	4	4	4
9	5	4	3
10	4	5	4
11	4	4	3
12	Розрахунки		
13	n =	30	
14	s_x^2 =	0,44	
15	σ_0^2 =	0,25	
16	$\chi^2_{емп}$ =	51,20	
17	$\chi^2_{0,025}$ =	45,72	α = 0,050
18	$\chi^2_{0,975}$ =	16,05	
19	$\chi^2_{0,005}$ =	52,34	α = 0,010
20	$\chi^2_{0,995}$ =	13,12	
21	$p_{емп}$ =	0,007	

Рис. 5.28. Оцінка χ^2-критерію

	A	B	C
1	Емпіричні дані		
2	4	5	4
3	4	4	4
4	5	5	5
5	5	4	4
6	4	5	3
7	5	3	5
8	4	4	4
9	5	4	3
10	4	5	4
11	4	4	3
12	Розрахунки		
13	n =	=СЧЁТ(A2:C11)	
14	s_x^2 =	=ДИСП(A2:C11)	
15	σ_0^2 =	0,25	
16	$\chi^2_{емп}$ =	=(B13-1)*B14/B15	
17	$\chi^2_{0,025}$ =	=ХИ2ОБР(0,05/2;B13-1)	α = 0,050
18	$\chi^2_{0,975}$ =	=ХИ2ОБР(1-0,05/2;B13-1)	
19	$\chi^2_{0,005}$ =	=ХИ2ОБР(0,01/2;B13-1)	α = 0,010
20	$\chi^2_{0,995}$ =	=ХИ2ОБР(1-0,01/2;B13-1)	
21	$p_{емп}$ =	=ХИ2РАСП(B16;B13-1)	

Рис. 5.29. Розрахункові формули χ^2-критерію

• *Критичне значення* критерію χ^2 для двобічної моделі на рівні значущості α встановлюються для точок (α/2) і (1– α/2) розподілу χ^2, який є похідним від нормального, з числом ступенів вільності $df = n$–1. Значення $\chi^2_{\alpha/2}$ і $\chi^2_{1-\alpha/2}$ можна отримати за допомогою функції MS Excel =ХИ2ОБР(). Для α=0,05 і df=29 функція повертає: $\chi^2_{0,025} \approx 45{,}72$ і $\chi^2_{0,975} \approx 16{,}05$; для α=0,01 – відповідно: $\chi^2_{0,005} \approx 52{,}34$ і $\chi^2_{0,995} \approx 13{,}12$.

• *Прийняття рішення.* Оскільки для рівні значущості 0,05 $\chi^2_{емп}$ знаходиться у критичній зоні $\chi^2_{емп} > \chi^2_{0,025} > \chi^2_{0,975}$ (51,20 > 45,72 > 16,05), нульова гіпотеза H_0 відхиляється. Проте на рівні значущості 0,01 нульова гіпотеза H_0 приймається, оскільки $\chi^2_{0,005} > \chi^2_{ем\,п} > \chi^2_{0,995}$, тобто умова 52,34 > 51,20 > 13,12 виконується.

- *Формулювання висновків.* На рівні значущості 0,01 є підстави стверджувати про те, що вибірка належить генеральній сукупності. Про це також свідчить ймовірність $p_{емп}$, яку можна отримати за допомогою функції MS Excel =ХИ2РАСП(), яка повертає однобічну ймовірність $p_{емп}$ = 0,007 розподілу χ^2. Отже, нульова гіпотеза H_0 приймається лише на рівні значущості α=0,01, оскільки виконується умова $\alpha/2 \leq p_{емп}$ (0,01/2=0,005<0,007). Пропонуємо самостійно проаналізувати отримані результати.

Відмінності у значеннях середніх (*t*-критерій для двох зв'язаних вибірок)

Процедури перевірки гіпотез про рівність середніх для двох незалежних (незв'язаних) вибірок на основі критерію Стьюдента t продемонстровано у розділі 5.3, формула (5.10). Для двох зв'язаних вибірок, якщо є природна парність спостережень, наприклад, тестування об'єктів двічі – до та після експерименту, використовується так званий двовибірковий t-критерій Стьюдента. Статистика критерію має вигляд:

$$t = \frac{2 \cdot d}{s_d}\sqrt{n}, \qquad (5.22)$$

де $d = \frac{1}{n}\sum d_i$ – середнє різниць; n – обсяг вибірки; $d_i = (x_{i1} - x_{i2})$ – різниця значень; $s_d = \sqrt{\frac{\sum (d - d_i)^2}{n-1}}$ – стандартне відхилення d_i. Для статистики не передбачається рівність дисперсій сукупностей, з яких обрано дані.

Приклад 5.13. Чи можна стверджувати на рівні значущості 0,05 (0,01) про те, що середні показники вибірки до і після експериментальної дії відрізняються одне від одного? Емпіричні дані представлено на рис. 5.30.

Послідовність рішення:

- *Формулювання гіпотез*:

  H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (μ_1 не відрізняється від μ_2);

  H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (μ_1 відрізняється від μ_2).

- *Перевірка припущень*: досліджуваний параметр має *нормальний* розподіл; дисперсії сукупностей *невідомі*; вибірки *зв'язані*; виміри за шкалою *відношень*.

- *Вибір статистичного критерію*. Згідно з припущеннями умовам відповідає модель двобічного *t*-критерію Стьюдента для *зв'язаних* вибірок:

$$t_{емп} = \frac{2 \cdot d}{s_d} \sqrt{n}\,.$$

- *Результати розрахунку* емпіричного критерію $t_{емп}$ показано на рис. 5.30, необхідні для цього формули – на рис. 5.31. Емпіричне значення критерію дорівнює:

$$t_{емп} = \frac{2 \cdot 0{,}27}{0{,}47} \sqrt{11} \approx 3{,}87\,.$$

	A	B	C	D	E
1	Емпіричні дані			d_i	$(d-d_i)^2$
2	i	x_1	x_2		
3	1	4	3	1	0,53
4	2	3	3	0	0,07
5	3	4	3	1	0,53
6	4	4	4	0	0,07
7	5	4	4	0	0,07
8	6	4	4	0	0,07
9	7	4	4	0	0,07
10	8	5	4	1	0,53
11	9	5	5	0	0,07
12	10	5	5	0	0,07
13	11	5	5	0	0,07
14	Розрахунки				
15	Середні	4,27	4,00		
16	Дисперсії	0,42	0,60		
17	n =	11	11		
18	d =	0,27			
19	s_d =	0,47			
20	$t_{емп}$ =	3,87			
21	$t_{0,05}$ =	2,23			
22	$t_{0,01}$ =	3,17			
23	$p_{емп}$ =	0,003			

Рис. 5.30. Розрахунки *t*-критерію

	A	B	C	D	E
1	Емпіричні дані			d_i	$(d-d_i)^2$
2	i	x_1	x_2		
3	1	4	3	=B3-C3	=(D3-B$18)^2
4	2	3	3	=B4-C4	=(D4-B$18)^2
5	3	4	3	=B5-C5	=(D5-B$18)^2
6	4	4	4	=B6-C6	=(D6-B$18)^2
7	5	4	4	=B7-C7	=(D7-B$18)^2
8	6	4	4	=B8-C8	=(D8-B$18)^2
9	7	4	4	=B9-C9	=(D9-B$18)^2
10	8	5	4	=B10-C10	=(D10-B$18)^2
11	9	5	5	=B11-C11	=(D11-B$18)^2
12	10	5	5	=B12-C12	=(D12-B$18)^2
13	11	5	5	=B13-C13	=(D13-B$18)^2
14	Розрахунки				
15	Середні	=СРЗНАЧ(B3:B13)	=СРЗНАЧ(C3:C13)		
16	Дисперсії	=ДИСП(B3:B13)	=ДИСП(C3:C13)		
17	n =	=СЧЁТ(B3:B13)	=СЧЁТ(C3:C13)		
18	d =	=СУММ(D3:D13)/B17			
19	s_d =	=КОРЕНЬ(СУММ(E3:E13)/(B17-1))			
20	$t_{емп}$ =	=2*B18/B19*КОРЕНЬ(B17)			
21	$t_{0,05}$ =	=СТЬЮДРАСПОБР(0,05;B17-1)			
22	$t_{0,01}$ =	=СТЬЮДРАСПОБР(0,01;B17-1)			
23	$p_{емп}$ =	=СТЬЮДРАСП(B20;B17-1;2)			

Рис. 5.31. Розрахункові формули t-критерію (зв'язані вибірки)

• *Визначення критичного значення* двобічного t-критерію Стьюдента можна виконати за допомогою функції =СТЬЮДРАСПОБР(). Для прийнятого рівня значущості α=0,05 (0,01) і ступенів вільності $df= n–1=11–1=10$ критичне значення дорівнюватиме: $t_{0,05} \approx 2,23$ ($t_{0,01} \approx 3,17$).

• *Прийняття рішення.* Оскільки $t_{емп} > t_{0,01}$ (3,87 > 3,17), нульова гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,01.

• *Формулювання висновків*. Підстави стверджувати про те, що показники вибірок не відрізняються одне від одного, відсутні на рівні значущості 0,01.. Пропонуємо самостійно прокоментувати значення показника $p_{емп}$.

Відмінності у значеннях дисперсій (*F*-критерій Фішера для двох незв'язаних вибірок)

Порівняння дисперсій двох сукупностей набагато цікавіше, аніж завдання перевірки відповідності дисперсії деякому передбачуваному значенню. Для перевірки гіпотези про рівність дисперсій двох незалежних сукупностей використовується критерій Фішера F, статистика якого має вид:

$$F = s_1^2 / s_2^2, \qquad (5.23)$$

де s_1^2 і s_2^2– дисперсії вибірок.

При цьому обсяги вибірок можуть бути як однакові, так і різні.

Приклад 5.14. Чи можна стверджувати, що показники вибіркових дисперсій за даними рис. 5.32 статистично не відрізняються одне від одного?

Послідовність рішення:

• *Формулювання гіпотез*. Умовам перевірки однаковості дисперсій $\sigma^2{}_1$ і $\sigma^2{}_,$ отриманих із двох сукупностей, відповідає варіант неспрямованих гіпотез:

H_0: $\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2$ ($\sigma^2{}_1$ не відрізняється від $\sigma^2{}_2$);

H_1: $\sigma^2{}_1 \neq \sigma^2{}_2$ ($\sigma^2{}_1$ відрізняється від $\sigma^2{}_2$).

• *Перевірка припущень*: досліджуваний параметр має *нормальний* розподіл; вибірки *незв'язані*; виміри зроблено за шкалою *інтервалів*.

• *Вибір* статистичного критерію. Ситуації відповідає модель двобічного

F-критерію Фішера: $F_{емп} = s_1^2 / s_2^2$.

• *Результати розрахунку $F_{емп}$* показано на рис. 5.32, необхідні для цього формули – на рис. 5.33. Дисперсії вибірок $s_1^2 \approx 1{,}54$ $s_2^2 \approx 0{,}70$. Звідси значення емпіричного критерію таке: $F_{емп}$= 1,54/0,70 ≈ 2,21.

• *Визначення критичного значення критерію F*. Для двобічної моделі на рівні значущості α встановлюються два критичні значення $F_{кр}$ для точок (α/2) і (1– α/2) F-розподілу, тобто: $F_{\alpha/2}$ і $F_{1\text{-}\alpha/2}$ з числом ступенів вільності $df_1 = n_1 -$ 1= 14–1=13 і $df_2 = n_2 -$ 1= 16–1=15,

	A	B	C
1	Емпіричні дані		
2	*i*	x_1	x_2
3	1	6	6
4	2	2	4
5	3	4	4
6	4	4	6
7	5	3	5
8	6	4	4
9	7	6	5
10	8	5	5
11	9	2	4
12	10	4	6
13	11	4	4
14	12	3	4
15	13	4	5
16	14	5	5
17	15		6
18	16		4
19	Розрахунки		
20	Середні	4,00	4,81
21	Дисперсії	1,54	0,70
22	n =	14	16
23	$F_{емп}$ =	2,21	
24	$F_{0,025}$ =	2,92	α = 0,05
25	$F_{0,975}$ =	0,33	
26	$F_{0,005}$ =	4,18	α = 0,01
27	$F_{0,995}$ =	0,22	
28	$p_{емп}$ =	7,2%	0,072
29	ФТЕСТ	7,2%	0,072

	A	B	C
1	Емпіричні дані		
2	*i*	x_1	x_2
3	1	6	6
4	2	2	4
5	3	4	4
6	4	4	6
7	5	3	5
8	6	4	4
9	7	6	5
10	8	5	5
11	9	2	4
12	10	4	6
13	11	4	4
14	12	3	4
15	13	4	5
16	14	5	5
17	15		6
18	16		4
19	Розрахунки		
20	Середні	=СРЗНАЧ(B3:B18)	=СРЗНАЧ(C3:C18)
21	Дисперсії	=ДИСП(B3:B18)	=ДИСП(C3:C18)
22	n =	=СЧЁТ(B3:B18)	=СЧЁТ(C3:C18)
23	$F_{емп}$ =	=B21/C21	
24	$F_{0,025}$ =	=FРАСПОБР(0,05/2;B22-1;C22-1)	α = 0,05
25	$F_{0,975}$ =	=FРАСПОБР(1-0,05/2;B22-1;C22-1)	
26	$F_{0,005}$ =	=FРАСПОБР(0,01/2;B22-1;C22-1)	α = 0,01
27	$F_{0,995}$ =	=FРАСПОБР(1-0,01/2;B22-1;C22-1)	
28	$p_{емп}$ =	=FРАСП(B23;B22-1;C22-1)	=FРАСП(B23;B22-1;C22-1)
29	ФТЕСТ	=ФТЕСТ(B3:B18;C3:C18)/2	=ФТЕСТ(B3:B18;C3:C18)/2

Рис. 5.32. Розрахунки F-критерію

Рис. 5.33. Розрахункові формули F-критерію (вибірки незв'язані)

Для прийнятого рівня значущості α і ступенів вільності df_1 і df_2 критичні значення двобічного критерію можна отримати за допомогою функції =FРАСПОБР(). Для α = 0,05 отримаємо $F_{0,025} \approx 2{,}92$ і $F_{0,975} \approx 0{,}33$; для α = 0,01 критичні значення $F_{0,005} \approx 4{,}18$ і $F_{0,995} \approx 0{,}22$.

- *Прийняття рішення.* Оскільки значення $F_{емп} \approx 2{,}21$ не знаходиться у жодній критичній зоні ($0{,}33 < 2{,}21 < 2{,}92$), приймається нульова гіпотеза H_0.

- *Формулювання висновків*. Навіть на рівні значущості 0,05 немає підстав стверджувати про те, що показники дисперсій відрізняються одне від одного.

Перевірку статистичних гіпотез про істотність різниці дисперсій двох незв'язаних вибірок можна провести шляхом оцінювання ймовірності $p_{емп}$ за допомогою функції =FРАСП(B23;B22–1;C22–1), яку внесено у комірку B28 (див. рис. 5.32 і 5.33). Як бачимо, $p_{емп} \approx 0{,}072$ (7,2%). Нульова гіпотеза H_0 приймається за умови $p_{емп} \geq \alpha$. У нашому прикладі навіть на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$(5%) ця умова виконується: 7,2% > 5%. Це значить, що нульова гіпотеза H_0 повинна бути прийнята, як це зроблено вище.

Експрес-оцінювання можна провести за допомогою функції MS Excel =ФТЕСТ(B3:B18;C3:C18)/2, яку внесено у комірку B29 (див. рис. 5.32 і 5.33). Оскільки функція повертає однобічну ймовірність однаковості двох сукупностей, для двобічної ймовірності слід брати її половину. Аргументами функції виступають вибіркові масиви. Для двобічної моделі нульова гіпотеза H_0 приймається на рівні значущості α, якщо виконується умова $\alpha \leq$ ФТЕСТ $\leq 1 - \alpha$.

У нашому прикладі навіть на рівні значущості α=0,05 (5%) умова 5%≤7,2%≤95% *виконується*, а це значить, що H_0 приймається.

Перевірку статистичних гіпотез щодо різниці дисперсій можна виконати за допомогою пакета «Аналіз даних» розділ «Двовибірковий F-тест для дисперсій» (рис. 5.34).

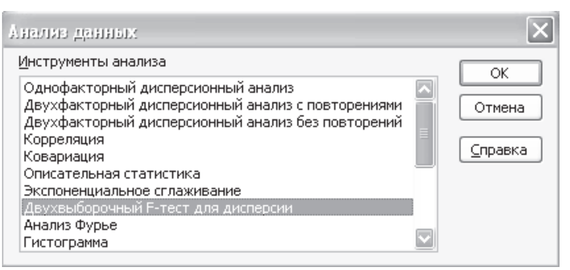


Рис. 5.34. Меню пакета «Аналіз даних»

Для цього у діалоговому вікні необхідно ввести параметри, як показано на рис. 5.35, виконати команду «ОК» і отримати результати (рис. 5.36).

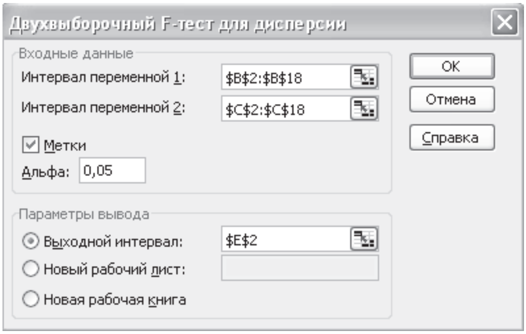


Рис. 5.35. Діалогове вікно
«Двовибірковий F-тест для дисперсій»

	A	B	C	D	E	F	G
1	Емпіричні дані						
2	*i*	x_1	x_2		Двухвыборочный F-тест для дисперсии		
3	1	6	6				
4	2	2	4			*x1*	*x2*
5	3	4	4		Среднее	4,00	4,81
6	4	4	6		Дисперсия	1,54	0,70
7	5	3	5		Наблюдения	14	16
8	6	4	4		df	13	15
9	7	6	5		F	2,21	
10	8	5	5		P(F<=f) одностороннее	0,07	
11	9	2	4		F критическое одностороннее	2,45	
12	10	4	6				
13	11	4	4				
14	12	3	4				
15	13	4	5				
16	14	5	5				
17	15		6				
18	16		4				

Рис. 5.36. Результати двовибіркового F-тесту

Комп'ютерний засіб виконує розрахунки основних статистик (середні, дисперсії), а також значення емпіричних і теоретичних *F*-критеріїв, які дозволяють зробити висновки щодо різниці дисперсій на рівні значущості α.

Відмінності у значеннях дисперсій
(*t*-критерій Стьюдента для двох зв'язаних вибірок)

Для перевірки гіпотези щодо дисперсій двох сукупностей, які представлені залежними вибірками використовується критерій Стьюдента *t*, статистика якого має вигляд:

$$t = \frac{s_1^2 - s_2^2}{\sqrt{\frac{4 \cdot s_1^2 \cdot s_2^2}{n-2}(1 - r_{12}^2)}}, \tag{5.24}$$

де s_1^2 і s_2^2– дисперсії вибірок; *n* – кількість пар спостережень; r^2_{12} – квадрат коефіцієнта парної кореляції.

Методика перевірки гіпотези аналогічна попередньому прикладу.

Приклад 5.15. Виконати перевірку статистичних гіпотез щодо дисперсій *n* пар спостережень (емпіричні дані у таблиці рис 5.37).

Послідовність рішення:

- *Формулювання гіпотез*. Умовам перевірки однаковості дисперсії *n* пар спостережень відповідає варіант неспрямованих гіпотез:

  H_0: $\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2$ ($\sigma^2{}_1$ не відрізняється від $\sigma^2{}_2$);

  H_1: $\sigma^2{}_1 \neq \sigma^2{}_2$ ($\sigma^2{}_1$ відрізняється від $\sigma^2{}_2$).

- *Перевірка припущень*: досліджуваний параметр має *нормальний* розподіл; вибірки *зв'язані*; виміри проведено за шкалою *відношень*.

- *Вибір статистичного критерію*. Згідно з припущеннями цій ситуації відповідає модель двобічного *t*-критерію Стьюдента:

$$t_{емп} = \frac{s_1^2 - s_2^2}{\sqrt{\frac{4 \cdot s_1^2 \cdot s_2^2}{n-2}(1 - r_{12}^2)}}.$$

- *Розрахунки емпіричного критерію* і відповідні формули показано на рис. 5.37 і 5.38. Дисперсії вибірок $s_1^2 \approx 1{,}60$ і $s_2^2 \approx 0{,}78$, а також значення квадрату коефіцієнта кореляції Пірсона $r^2_{12} \approx 0{,}17$ розраховано за допомогою функцій MS Excel =ДИСП() і =КВПИРСОН(). Емпіричний критерій приймає таке значення:

$$t_{емп} = \frac{1,60 - 0,78}{\sqrt{\frac{4 \cdot 1,60 \cdot 0,78}{16-2}(1-0,17)}} \approx 1,49 .$$

	A	B	C
1	Емпіричні дані		
2	i	x_1	x_2
3	1	6	7
4	2	2	4
5	3	4	4
6	4	4	4
7	5	3	5
8	6	4	4
9	7	5	5
10	8	5	5
11	9	7	5
12	10	4	6
13	11	4	5
14	12	3	4
15	13	4	5
16	14	5	5
17	15	5	6
18	16	6	4
19	Розрахунки		
20	Середні	4,44	4,88
21	Дисперсії	1,60	0,78
22	n =	16	16
23	r^2_{12} =	0,17	
24	$t_{емп}$ =	1,49	
25	$t_{0,025}$ =	2,49	$\alpha = 0,05$
26	$t_{0,975}$ =	0,03	
27	$t_{0,005}$ =	3,29	$\alpha = 0,01$
28	$t_{0,995}$ =	0,01	
29	$p_{емп}$ =	0,16	

Рис. 5.37. Розрахунки *t*-критерію

	A	B	C
1	Емпіричні дані		
2	i	x_1	x_2
3	1	6	7
4	2	2	4
5	3	4	4
6	4	4	4
7	5	3	5
8	6	4	4
9	7	5	5
10	8	5	5
11	9	7	5
12	10	4	6
13	11	4	5
14	12	3	4
15	13	4	5
16	14	5	5
17	15	5	6
18	16	6	4
19	Розрахунки		
20	Середні	=СРЗНАЧ(B3:B18)	=СРЗНАЧ(C3:C18)
21	Дисперсії	=ДИСП(B3:B18)	=ДИСП(C3:C18)
22	n =	=СЧЁТ(B3:B18)	=СЧЁТ(C3:C18)
23	r^2_{12} =	=КВПИРСОН(B3:B18;C3:C18)	
24	$t_{емп}$ =	=(B21-C21)/КОРЕНЬ(4*B21*C21/(B22-2)*(1-B23))	
25	$t_{0,025}$ =	=СТЬЮДРАСПОБР(0,05/2;B22-1)	$\alpha = 0,050$
26	$t_{0,975}$ =	=СТЬЮДРАСПОБР(1-0,05/2;B22-1)	
27	$t_{0,005}$ =	=СТЬЮДРАСПОБР(0,01/2;B22-1)	$\alpha = 0,010$
28	$t_{0,995}$ =	=СТЬЮДРАСПОБР(1-0,01/2;B22-1)	
29	$p_{емп}$ =	=СТЬЮДРАСП(B24;B22-1;2)	

Рис. 5.38. Розрахункові формули ***t***-критерію (вибірки зв'язані)

• *Визначення критичного значення критерію*. Для двобічної моделі встановлюються два критичні значення $t_{кр}$ для точок (α/2) і (1–α/2) t-розподілу з числом ступенів вільності df=n–2= 16–2=14, тобто: $t_{\alpha/2}$ і $t_{1-\alpha/2}$. За допомогою функції =СТЬЮДРАСПОБР() для α = 0,05 отримаємо $t_{0,025} \approx 2,49$ і $t_{0,975} \approx 0,03$; для α = 0,01 $t_{0,005} \approx 3,29$ і $t_{0,995} \approx 0,01$ відповідно (рис. 5.37).

• *Прийняття рішення.* Оскільки значення $t_{емп} \approx 1,49$ не знаходиться у жодній критичній зоні (0,03 < 1,49 < 2,49), приймається нульова гіпотеза H_0.

* *Формулювання висновків*. Навіть на рівні значущості 0,05 немає підстав стверджувати, що показники дисперсій відрізняються одне від одного.

Відмінності у значеннях дисперсій 3-х і більш сукупностей (критерій Кохрана *q* для вибірок однакових обсягів)

Для перевірки гіпотез про рівність дисперсій 3-х і більш сукупностей використовується критерій Кохрана q.

Приклад 5.16. Виконати перевірку статистичних гіпотез істотності різниць дисперсій трьох незв'язаних вибірок за емпіричними даними рис. 5.39.

Послідовність рішення:

* *Формулювання гіпотез*:

  H_0: $\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2 = \sigma^2{}_3$ (дисперсії між собою не відрізняються);

  H_1: $\sigma^2{}_1 \neq \sigma^2{}_2 \neq \sigma^2{}_3$ (дисперсії між собою відрізняються).

* *Перевірка припущень*: досліджуваний параметр має *нормальний* розподіл; кількість вибірок більша двох; вибірки *незв'язані* однакових обсягів; виміри проведено за шкалою *інтервалів*.

* *Вибір критерію*. Ситуації відповідає статистика критерію Кохрана q:

$$q = \frac{s_{\max}^2}{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_m^2}, \tag{5.25}$$

де $s^2{}_1$, $s^2{}_2$, …, $s^2{}_m$ – дисперсії вибірок; $s^2{}_{max}$ – максимальна дисперсія; m – кількість вибірок.

* *Результати оцінки емпіричного критерію* $q_{емп}$ і додаткових параметрів показано на рис. 5.39. Значення дисперсій вибірок s^2 розраховано за допомогою функції =ДИСП(), для отримання емпіричного критерію $q_{емп}$ у комірку B16 введено вираз =МАКС(B15:D15)/СУММ(B15:D15), що відповідає елементарним розрахункам цього критерію:

$$q_{емп} = \frac{1{,}56}{1{,}09 + 1{,}56 + 0{,}87} \approx 0{,}44.$$

* *Критичне значення* q-критерію Кохрана можна отримати за допомогою табл. 5 Додатків. На рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ для кількості ступенів вільно-

сті $v1 = n-1 = 11-1=10$ і $v2 = m = 3$ критичне значення $q_{0,05} \approx 0{,}60$.

- *Прийняття рішення.* Оскільки $q_{емп} < q_{0,05}$ (0,44 < 0,60) приймається нульова гіпотеза H_0.

	A	B	C	D
1	Емпіричні дані			
2	*i*	x_1	x_2	x_3
3	1	7	3	4
4	2	4	2	4
5	3	4	4	5
6	4	6	4	6
7	5	5	3	5
8	6	4	4	4
9	7	5	5	5
10	8	5	5	3
11	9	4	2	4
12	10	6	4	6
13	11	4	6	4
14	Розрахунки			
15	$s^2 =$	1,09	1,56	0,87
16	$q_{емп} =$	0,44		
17	$v1 =$	10		
18	$v2 =$	3		
19	$q_{0,05} =$	0,60		

Рис. 5.39. Розрахунки критерію Кохрана *q*

	A	B	C	D
1	Емпіричні дані			
2	*i*	x_1	x_2	x_3
3	1	7	3	4
4	2	4	2	4
5	3	4	4	5
6	4	6	4	6
7	5	5	3	5
8	6	4	4	4
9	7	5	5	5
10	8	5	5	3
11	9	4	2	4
12	10	6	4	6
13	11	4	6	4
14	Розрахунки			
15	$s^2 =$	=ДИСП(B3:B13)	=ДИСП(C3:C13)	=ДИСП(D3:D13)
16	$q_{емп} =$	=МАКС(B15:D15)/СУММ(B15:D15)		
17	$v1 =$	=СЧЁТ(B3:B13)-1		
18	$v2 =$	=СЧЁТ(B15:D15)		
19	$q_{0,05} =$	0,6025		

Рис. 5.40. Формули для розрахунку критерію Кохрана *q*

- *Формулювання висновків*. На рівні значущості 0,05 немає підстав стверджувати про те, що показники дисперсій відрізняються одне від одного.

Одна з переваг методу перевірки статистичних гіпотез за критерієм Кохрана *q* є простота обчислень. Недоліком вважається те, що критерій виявляє ознаки відхилення тільки у бік зростання.

Відмінності у значеннях дисперсій 3-х і більш сукупностей (критерій Бартлета *M* для вибірок різних обсягів)

Критерій Бартлета вважається найпотужнішим для перевірки гіпотези щодо рівності дисперсій для ознак з нормальним розподілом. Він не є обмеженим попарними порівняннями і дозволяє одночасно порівнювати декілька дисперсій.

Приклад 5.17. Виконати перевірку статистичних гіпотез щодо істотності різниць дисперсій п'ятьох незв'язаних вибірок за емпіричними даними рис. 5.41.

Послідовність рішення:

- *Формулювання гіпотез* для варіанта неспрямованих гіпотез:

H_0: $\sigma^2_1 = \sigma^2_2 = \sigma^2_3 = \sigma^2_4 = \sigma^2_5$ (дисперсії між собою не відрізняються);

H_1: $\sigma^2_1 \neq \sigma^2_2 \neq \sigma^2_3 \neq \sigma^2_4 \neq \sigma^2_5$ (дисперсії між собою відрізняються).

- *Перевірка припущень*: досліджуваний параметр має *нормальний* розподіл; чисельність вибірок більша двох; вибірки *незв'язані* різних обсягів; виміри зроблено за шкалою *інтервалів*.

- *Вибір статистичного критерію*. Ситуації відповідає статистика двобічного критерію Бартлета *M*.

$$M_{емп} = \frac{M}{C}, \tag{5.26}$$

де $M = 2{,}3026 \cdot (\lg(s^2) \cdot \sum_{j=1}^{m} n_j - \sum_{j=1}^{m} (n_j \cdot \lg(s_j^2))$; m – кількість вибірок;

n_j і s_j^2 – обсяги і дисперсії вибірок (j = 1, 2, …, m);

$s^2 = \frac{\sum (s_j^2 \cdot n_j)}{\sum n_j}$ – середнє арифметичне дисперсій;

$C = 1 + \frac{\sum 1/n_j - 1/\sum n_j}{3 \cdot (m-1)}$ – нормуючий коефіцієнт.

- *Послідовність розрахунку критерію* Бартлета (рис. 5.41 і 5.42):

– у комірках H3:L3 і H4:L4 розрахувати обсяги n_j і дисперсії вибірок s_j^2;

– у комірках H5:L5 розрахувати десяткові логарифми дисперсій вибірок $\lg(s_j^2)$ за допомогою функції =LOG10();

– у комірці H6 знайти середнє арифметичне порівнюваних s^2, яке можна оцінити елементарними розрахунками:

$$s^2 = \frac{0{,}84 \cdot 15 + 0{,}92 \cdot 13 + 1{,}05 \cdot 16 + 1{,}76 \cdot 14 + 0{,}57 \cdot 8}{15 + 13 + 16 + 14 + 8} \approx 1{,}07;$$

– у комірці H8 розрахувати значення:

$$(\lg(s^2)\cdot\sum n_j = \lg(1{,}0702)\cdot(15+13+16+14+8)\approx 1{,}95\,;$$

– у комірці H9 розрахувати значення:

$$\sum_{j=1}^{m}(n_j\cdot\lg(s_j^2)) = 15\cdot(-0{,}08)+13\cdot(-0{,}03)+16\cdot 0{,}02+14\cdot 0{,}25+8\cdot(-24)\approx 0{,}24\,;$$

– у комірках H10, H11 і H12 розрахувати значення M, C і $M_{емп}$:

$$M = 2{,}3026\cdot(1{,}95-0{,}24)\approx 3{,}92;$$

$$C = 1+\frac{\frac{1}{15}+\frac{1}{13}+\frac{1}{16}+\frac{1}{14}+\frac{1}{8}-(15+13+16+14+8)}{3\cdot(5-1)}\approx 1{,}03\,;$$

$$M_{емп} = \frac{M}{C} = \frac{3{,}92}{1{,}03}\approx 3{,}80\,.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	i \ j	Емпіричні дані					Розрахунки					
2		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5						
3	1	7	3	7	3	6	n_j =	15	13	16	14	8
4	2	4	2	4	5	5	s^2_j =	0,84	0,92	1,05	1,76	0,57
5	3	4	4	5	4	4	$\lg(s^2_j)$ =	-0,08	-0,03	0,02	0,25	-0,24
6	4	6	4	6	4	5	s^2 =	1,07				
7	5	5	3	5	7	5	m =	5				
8	6	4	4	4	4	4	$\lg(s^2)\times\Sigma n_j$ =	1,95				
9	7	5	5	5	5	6	$\Sigma[n_j\times\lg(s^2_j)]$ =	0,24				
10	8	5	5	5	5	5	M =	3,92				
11	9	4	2	4	2		C =	1,03				
12	10	6	4	6	4		$M_{емп}$ =	3,80				
13	11	4	4	4	4		$\chi^2_{0,05}$ =	9,49				
14	12	5	4	7	3							
15	13	4	3	4	5							
16	14	5		5	2							
17	15	5		6								
18	16			5								

Рис. 5.41. Розрахунки критерію Бартлета M

• *Визначення критичного значення критерію*. Відношення M/C підкоряється розподілу χ^2 з числом ступенів вільності $df=m-1$. Критичне значення *критерію* M для $\alpha=0{,}05$ і $df=5-1=4$ отримано за допомогою функції =ХИ2ОБР() і становить $\chi^2_{0,05}\approx 9{,}49$.

	G	H	I	J	K	L
1	Розрахунки					
2						
3	n_j =	=СЧЁТ(B3:B18)	=СЧЁТ(C3:C18)	=СЧЁТ(D3:D18)	=СЧЁТ(E3:E18)	=СЧЁТ(F3:F18)
4	s^2_j =	=ДИСП(B3:B18)	=ДИСП(C3:C18)	=ДИСП(D3:D18)	=ДИСП(E3:E18)	=ДИСП(F3:F18)
5	$\lg(s^2_j)$ =	=LOG10(H4)	=LOG10(I4)	=LOG10(J4)	=LOG10(K4)	=LOG10(L4)
6	s^2 =	=СУММПРОИЗВ(H3:L3;H4:L4)/СУММ(H3:L3)				
7	m =	=СЧЁТ(H3:L3)				
8	$\lg(s^2)\cdot\Sigma n_j$ =	=LOG10(H6)*СУММ(H3:L3)				
9	$\Sigma[n_j\cdot\lg(s^2_j)]$ =	=СУММПРОИЗВ(H3:L3;H5:L5)				
10	M =	=2,3026*(H8-H9)				
11	C =	=1+(H7/СРГАРМ(H3:L3)-1/СУММ(H3:L3))/3/(H7-1)				
12	$M_{емп}$ =	=H10/H11				
13	$\chi^2_{0,05}$ =	=ХИ2ОБР(0,05;H7-1)				

Рис. 5.42. Формули для розрахунку критерію Бартлета *M*

- *Прийняття рішення.* Оскільки $M_{емп} < \chi^2_{0,05}$ нульова гіпотеза H_0 приймається на рівні значущості 0,05.
- *Формулювання висновків*. На рівні значущості 0,05 відмінності між дисперсіями вважаються статистично незначущими.

Запитання. Завдання.

1. При яких умовах використовується *z*-критерій?

2. Яка ідея методу перевірки статистичних гіпотез, що використовує функцію MS Excel =ZTECT().

3. При яких умовах використовується *t*-критерій Стьюдента для перевірки статистичної гіпотези щодо оцінки середнього?

4. Для яких ситуацій використовується *t*-критерій Стьюдента, якщо необхідно оцінити істотність різниць середніх двох сукупностей?

5. Виконайте перевірку статистичних гіпотез щодо різниці середніх за допомогою пакета «Аналіз даних» розділ «Двовибірковий t-тест із різними дисперсіями».

6. Виконайте перевірку статистичних гіпотез щодо різниці середніх за

допомогою функції MS Excel =TTECT().

7. Який критерій використовується для оцінки рівня дисперсії?

8. Для яких ситуацій використовується *F*-критерій Фішера, якщо необхідно оцінити істотність різниць дисперсій двох сукупностей?

9. Для яких ситуацій використовується *t*-критерій Стьюдента, якщо необхідно оцінити істотність різниць дисперсій двох сукупностей?

10. Для яких ситуацій використовуються критерії Кохрана і Бартлета?

11. Виконайте перевірку гіпотез щодо різниці дисперсій за допомогою пакета «Аналіз даних» розділ «Двовибірковий *F*-тест для дисперсій».

12. Виконайте перевірку статистичних гіпотез щодо різниці дисперсій за допомогою функції MS Excel =ФТЕСТ().

13. Повторіть математичні процедури завдань за прикладами 5.10 – 5.17.

14. Виконайте лабораторні роботи № 13 – № 17.

5.5. ВИЯВЛЕННЯ ВІДМІННОСТЕЙ І ЗСУВУ У РІВНІ ОЗНАКИ

Виявлення відмінностей між двома, трьома і більше чинниками застосовується при оцінці вірогідності впливу тієї чи іншої методики навчання, тренінгу, психоаналітичних засобів на особистість або групу осіб. Встановлення відмінностей може розглядатися і як мета, дослідницький результат, і як етап, що дозволяє сформулювати нові гіпотези. Для оцінки відмінностей застосовують, наприклад, критерій Крускала-Волліса *H*.

Достовірні зміни («зсуви») у вимірюваних показниках в результаті дії якихось чинників можуть стати об’єктивним показником у ефективності психолого-педагогічних досліджень. Статистично достовірні зсуви дозволять стверджувати, що експериментальні дії були істотними. Для оцінки вірогідності зсуву застосовують, наприклад, критерії Фрідмана χ^2_r , Пейджа *L*.

Критерій Крускала-Волліса *H*

Критерій Крускала-Волліса *H* призначений для оцінки відмінностей одночасно між трьома, чотирма і т.д. вибірками за рівнем досліджуваної ознаки. Критерій *H* дозволяє встановити, що мають місце відмінності ознаки при переході від групи до групи, але не вказує на напрям цих змін.

Гіпотези:

H_0: між вибірками 1, 2, 3 і т.д. існують лише *випадкові* відмінності за рівнем досліджуваної ознаки;

H_1: між вибірками 1, 2, 3 і т.д. існують *невипадкові* відмінності за рівнем досліджуваної ознаки.

Обмеження критерію: на рівні значущості α=0,05 допускається, щоб в одній із 3-х вибірок $n = 3$, а в двох інших $n = 2$; для α=0,01 необхідно, щоб у кожній вибірці $n \geq 3$.

Приклад 5.18. Дані опитувань позитивного ставлення (у %) студентів щодо відмови від «шкідливих звичок» (паління тютюну, вживання алкоголю тощо) представлено у таблиці рис. 5.43. Чи відрізняються середні показники позитивного ставлення студентів за різними роками навчання до важливості і необхідності «здорового способу життя»? В опитуванні приймали участь 6 груп студентів 1-го курсу, 5 груп 2-го і по чотири групи 3-го і 4-го курсів.

Послідовність рішення:

- *Формулювання гіпотез*:

H_0: середні показники позитивного ставлення студентів до «здорового способу життя» *не відрізняються* для різних курсів;

H_1: середні показники позитивного ставлення студентів до «здорового способу життя» *відрізняються* для різних курсів.

- *Перевірка обмежень*: виміри зроблено за шкалою *інтервалів*; кількість вибірок – чотири (c =4); вибірки *незв'язані*.

- *Розрахунки емпіричного* критерію Крускала-Волліса *H* (рис. 5.43):

– присвоїти ім'я вибіркам: «Виб1», «Виб2», «Виб3», «Виб4» (послідовність і склад операцій див. у прикладі 5.8);

– підрахувати для вибірок: Обсяги, Суми, Середні за допомогою функцій MS Excel =СЧЕТ(), =СУММ() і =СРЗНАЧ();

– визначити ранги індивідуальних значень для загальної вибірки, що об'єднує всі чотири окремі вибірки. Для цього у стовпчики «Ранг1–Ранг4» внести математичні вирази. Наприклад, для комірки F3 це буде:

=(СЧЁТ(Виб1:Виб2:Виб3:Виб4) + 1 – РАНГ(B3;Виб1:Виб2:Виб3:Виб4; 1) – РАНГ(B3;Виб1:Виб2:Виб3:Виб4; 0))/2 + РАНГ(B3;Виб1:Виб2:Виб3:Виб4;1);

– скопіювати вираз в інші комірки стовпчиків F:I («Ранг1–Ранг4»);

– для стовпчиків «Ранг1–Ранг4» підрахувати обсяги n_j, суми рангів T_j і середні значення рангів за допомогою функцій =СЧЕТ(), =СУММ() і =СРЗНАЧ();

– визначити обсяг об'єднаної вибірки $N = 6 + 5 + 4 + 4 = 19$. Для цього у комірку B12 внести вираз =СУММ(B9:E9;

– визначити суму відносних квадратів рангів:

$T = \sum_{j=1}^{c} \frac{T_j^2}{n_j} = 36^2/6 + 40^2/5 + 51^2/4 + 63^2/4 = 2178{,}50$ (у комірку B13 внести вираз =F10^2/F9+G10^2/G9+H10^2/H9+I10^2/I9);

– для розрахунку емпіричного значення H-критерію за формулою:

$$H_{емп} = \left[\frac{12}{N \cdot (N+1)} \cdot \sum_{j=1}^{c} \frac{T_j^2}{n_j} \right] - 3(N+1), \qquad (5.27)$$

внести у комірку B14 вираз =12/B12/(B12+1)*B13-3*(B12+1) і отримати значення критерію $H_{емп}$=12/(19·(19+1)·2178,50–3·(19+1)=8,79 (див. рис. 5.43).

- *Визначення критичного значення* H-критерію для кількості груп $c \le 5$ зосереджено у відповідних таблицях, для $c > 5$ необхідно користуватися критичними значеннями χ^2-критерію. Для α=0,05 і 0,01 і ступенів вільності $\nu = c–1 = 4–1= 3$ значення $\chi^2_{0,05}$ і $\chi^2_{0,01}$ можна отримати за допомогою функції =ХИ2ОБР(), яку внести у комірки B15 і B16 з відповідними аргументами: =ХИ2ОБР(0,05;3) і =ХИ2ОБР(0,01;3).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Академічні групи	Позитивне ставлення (у %) за роками навчання				Розрахунки рангів			
2	i	I	II	III	IV	Ранг1	Ранг2	Ранг3	Ранг4
3	1	62,05	60,17	74,20	60,11	11	10	15	9
4	2	31,16	44,25	67,13	81,60	1	5	13	18
5	3	63,28	68,56	49,07	79,55	12	14	7	17
6	4	36,50	38,23	77,15	84,16	2	3	16	19
7	5	45,06	50,08			6	8		
8	6	44,18				4			
9	Обсяги:	6	5	4	4	6	5	4	4
10	Суми:	282,23	261,29	267,55	305,42	36	40	51	63
11	Середні:	47,04	52,26	66,89	76,36	6,00	8,00	12,75	15,75
12	$N =$	19							
13	$T =$	2178,50							
14	$H_{емп} =$	8,79							
15	$\chi^2_{0,05} =$	7,81	H_0	відхиляється					
16	$\chi^2_{0,01} =$	11,34	H_0	приймається					

Рис. 5.43. Результати розрахунків критерію $H_{емп}$

- *Прийняття рішення.* Оскільки $H_{емп} > \chi^2_{0,05}$ (8,79>7,81), але $H_{емп} < \chi^2_{0,01}$ (8,79<11,34), нульова гіпотеза H_0 відхиляється лише на рівні значущості 0,05 і приймається на рівні значущості 0,01.

- *Формулювання висновків.* На рівні значущості 0,05 середні показники позитивного ставлення студентів різних курсів до «здорового способу життя» *відрізняються* один від одного. Якщо ця різниця не може вважатися (на рівні значущості 0,05) достатньо переконливою, необхідно провести додаткові і більш ретельні дослідження.

Критерій Фрідмана χ^2_r

Критерій Фрідмана χ^2_r застосовується для зіставлення показників, виміряних у трьох або більше умовах на одній і тій же вибірці і будується на рангових послідовностях. Критерій χ^2_r дозволяє встановити факт того, що значення показників від умови до умови змінюються, проте не указує на напрям цих змін.

Гіпотези:

H_0: між показниками, виміряними в різних умовах, існують лише *випад-*

кові розходження;

H_1: між показниками, виміряними в різних умовах, існують *невипадкові* розходження.

Обмеження критерію: мінімальна кількість випробовуваних осіб $n \geq 2$, кожна особа має пройти більше трьох випробувань $c \geq 3$.

Приклад 5.19. На рис. 5.44 наведено результати самооцінки емпатичних здібностей студентів інституту (за методикою О.П.Єлісеєва). Чи достовірні розходження у значеннях самооцінки студентів у різні роки навчання?

Послідовність рішення:

- *Формулювання гіпотез*:

H_0: між показниками самооцінки емпатичних здібностей, виміряними в різні роки, існують лише *випадкові* розходження;

H_1: між показниками самооцінки емпатичних здібностей, виміряними в різні роки, існують *невипадкові* розходження.

- *Перевірка обмежень*: виміри зроблено за шкалою інтервалів; кількість умов $c = 4$ ($c \geq 3$); кількість випробовуваних $n = 10$ ($n \geq 2$); вибірки *зв'язані*.

- *Розрахунки емпіричного критерію Фрідмана* χ^2_r (рис. 5.44):

– визначити середнє самооцінки за кожною умовою (для кожного курсу навчання), для чого у комірку B13 внести вираз =СРЗНАЧ(B3:B12). Аналогічні вирази внести у комірки C13:E13;

– проранжувати індивідуальні значення самооцінки для кожного студента (ранжирування за рядками), нараховуючи меншому значенню менший ранг. Для цього у комірку B16 внести вираз

=(СЧЁТ($B3:$E3) + 1 – РАНГ(B3;$B3:$E3; 1) –

– РАНГ(B3;$B3:$E3; 0))/2+РАНГ(B3;$B3:$E3;1);

– аналогічні вирази внести у комірки всього діапазону B16:E25;

– у комірках B26:E26 підрахувати суми рангів T_j за кожною умовою;

– у комірках F16:F26 перевірити збіг отриманих сум за рядками і за стовпчиками (суми рангів індивідуальних значень дорівнюватиме 10);

– у комірки B27:B28 внести значення параметрів n і c за допомогою функцій =СЧЁТ(A3:A12) і =СЧЁТ(B3:E3);

– у комірці B29 підрахувати суму квадратів рангів за допомогою виразу =СУММКВ(B26:E26);

– у комірку B30 внести вираз =12/B27/B28/(B28+1)*B29–3*B27*(B28+1), який дозволить підрахувати значення критерію χ^2_r за формулою:

$$\chi_r^2 = \left[\frac{12}{n \cdot c \cdot (c+1)} \cdot \sum_{j=1}^{c} (T_j^2) \right] - 3 \cdot n \cdot (c+1), \qquad (5.28)$$

де c – кількість умов; n – кількість випробовуваних осіб.

Як бачимо, значення емпіричного критерію Фрідмана $\chi^2_r \approx 15,39$.

	A	B	C	D	E	F
1	i	Самооцінка емпатичних здібностей				
2		*I курс*	*II курс*	*III курс*	*IV курс*	
3	1	27,27	43,64	32,73	69,09	
4	2	41,82	56,36	45,45	45,45	
5	3	43,64	34,55	45,45	74,55	
6	4	25,45	49,09	29,09	34,55	
7	5	40,00	30,91	45,45	80,00	
8	6	36,36	43,64	36,36	56,36	
9	7	29,09	32,73	25,45	74,55	
10	8	34,55	52,73	25,45	36,36	
11	9	27,27	32,73	47,27	80,00	
12	10	40,00	45,45	34,55	56,36	
13	Середнє	34,55	42,18	36,73	60,73	
14	i	Ранги				Сума рангів
15		*I курс*	*II курс*	*III курс*	*IV курс*	
16	1	1	3	2	4	10
17	2	1	4	2,5	2,5	10
18	3	2	1	3	4	10
19	4	1	4	2	3	10
20	5	2	1	3	4	10
21	6	1,5	3	1,5	4	10
22	7	2	3	1	4	10
23	8	2	4	1	3	10
24	9	1	2	3	4	10
25	10	2	3	1	4	10
26	T_j =	15,5	28	20	36,5	100
27	n =	10				
28	c =	4				
29	$\Sigma(T_j^2)$ =	2756,5				
30	χ^2_r =	15,39				
31	$\chi^2_{0,05}$ =	7,81	H_0	відхиляється		
32	$\chi^2_{0,01}$ =	11,34	H_0	відхиляється		

Рис. 5.44. Результати розрахунку критерію Фрідмана χ^2_r

• *Визначити критичні значення* χ^2_r-критерію для α=0,05 і 0,01 можна трьома способами, залежно від параметрів c і n:

– для $c = 3$ і $n \leq 9$ – з табл. 7 Додатків;

– для $c = 4$ і $n \leq 4$ – з табл. 8 Додатків;

– для $c>4$ або $n>9$ – за критичними значеннями χ^2-критерію.

Для α=0,05 і 0,01 і ступенів вільності $v = c–1 = 4–1= 3$ критичні значення $\chi^2_{0,05} \approx 7,81$ і $\chi^2_{0,01} \approx 11,34$ отримаємо за допомогою функції Excel =ХИ2ОБР(), яку необхідно внести у комірки B31 і B32 з відповідними аргументами: =ХИ2ОБР(0,05;3) і =ХИ2ОБР(0,01;3).

Прийняття рішення. Оскільки $\chi^2_r > \chi^2_{0,01}$ (15,39>11,34), нульова гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 і 0,01 (див. рис. 5.44).

• *Формулювання висновків.* Між показниками самооцінки емпатичних здібностей, виміряними в різні роки навчання студентів, існують *невипадкові* розходження на рівні значущості 0,01. Проте визначити *тенденцію* розходжень на підставі критерію Фрідмана неможливо, це дозволяє зробити критерій тенденцій Пейджа L.

Критерій тенденцій Пейджа *L*

Критерій тенденцій Пейджа L застосовується для зіставлення показників, вимірюваних у трьох і більш умовах на одній і тій же вибірці випробовуваних. L-критерій дозволяє виявити тенденції у вимірі ознаки при переході від умови до умови. Його можна розглядати як розвиток критерію Фрідмана, оскільки він не тільки констатує розходження, але і вказує на напрямок змін.

Гіпотези:

H_0: збільшення індивідуальних показників при переході від першої умови до другої, а потім до третьої і далі *випадкове*;

H_1: збільшення індивідуальних показників при переході від першої умови до другої, а потім до третьої і далі *невипадкове*.

При формулюванні гіпотез мається на увазі нова нумерація умов, що відповідає передбачуваним тенденціям.

Обмеження критерію: кількість випробовуваних осіб повинна бути у межах $2 \leq n \leq 12$, кожна особа має пройти c випробувань – $3 \leq c \leq 6$.

Приклад 5.20. Чи *підвищується* самооцінка емпатичних здібностей студентів при їх послідовному переході з курсу на курс навчання в інституті (за даними прикладу 5.19)?

Послідовність рішення:

- *Формулювання гіпотез*:

H_0: збільшення індивідуальних показників самооцінки емпатичних здібностей студентів при переході від курсу до курсу навчання *випадкове*;

H_1: збільшення індивідуальних показників самооцінки емпатичних здібностей студентів при переході від курсу до курсу навчання *невипадкове*.

- *Перевірка обмежень*: виміри зроблені за шкалою інтервалів; кількість умов $c = 4$ ($3 \leq c \leq 6$); кількість випробовуваних $n = 10$ ($2 \leq n \leq 12$); вибірки *зв'язані*.

- *Розрахунки емпіричного критерію тенденцій* Пейджа $L_{емп}$ (рис. 5.45):

– визначити середнє самооцінки за кожною умовою (для кожного курсу навчання), для чого у комірку B13 внести вираз =СРЗНАЧ(B3:B12). Аналогічні вирази внести у комірки C13:E13;

– проранжирувати індивідуальні значення самооцінки для кожного студента (ранжирування за рядками), нараховуючи меншому значенню менший ранг. Для цього у комірку B16 внести вираз

=(СЧЁТ($B3:$E3) + 1 – РАНГ(B3;$B3:$E3; 1) –

– РАНГ(B3;$B3:$E3; 0))/2+РАНГ(B3;$B3:$E3;1);

– аналогічні вирази внести у комірки всього діапазону B16:E25;

– у комірках B26:E26 підрахувати суми рангів T_j за кожною умовою;

– у комірках F16:F26 перевірити збіг отриманих сум за рядками і за стовпчиками;

– у комірки B27:E27 внести значення нових індексів j: 1, 2, 3, …, c;

– у комірки B28:E28 *внести з клавіатури* упорядковані за збільшенням значення сум рангів T^*_j за кожною умовою;

– у комірки B29 і B30 внести значення параметрів n і c за допомогою виразів =СЧЁТ(A3:A12) і =СЧЁТ(B3:E3);

– у комірку B31 внести вираз =СУММПРОИЗВ(B27:E27;B28:E28), який дозволить підрахувати емпіричне значення $L_{емп}$ критерію Пейджа за формулою:

$$L_{емп} = \sum_{j=1}^{c}(j \cdot T_j^*), \tag{5.29}$$

де c – кількість умов; T^*_j – суми рангів за кожною умовою; j – індекси нової нумерації умов. Отримаємо емпіричне значення критерію Пейджа $L_{емп}$ = 285,5.

• *Визначити критичні значення* критерію Пейджа $L_{кр}$ для α=0,05 і 0,01 можна за табл.9 Додатків. Для параметрів c=4 і n=10 критичні значення такі: $L_{0,05}$ = 266, $L_{0,01}$ = 272.

• *Прийняття рішення.* Оскільки $L_{емп} > L_{0,01}$ (285,5>272), нульова гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,01 (див. рис. 5.45).

• *Формулювання висновків.* Між показниками самооцінки емпатичних здібностей, виміряними в різні роки навчання студентів у вищих навчальних закладах, існують *невипадкові* розходження. Збільшення індивідуальних показників при переході від умови до умови також є *невипадковим*.

	A	B	C	D	E	F
1	*i*	Самооцінка емпатичних здібностей				
2		*I курс*	*II курс*	*III курс*	*IV курс*	
3	1	27,27	43,64	32,73	69,09	
4	2	41,82	56,36	45,45	45,45	
5	3	43,64	34,55	45,45	74,55	
6	4	25,45	49,09	29,09	34,55	
7	5	40,00	30,91	45,45	80,00	
8	6	36,36	43,64	36,36	56,36	
9	7	29,09	32,73	25,45	74,55	
10	8	34,55	52,73	25,45	36,36	
11	9	27,27	32,73	47,27	80,00	
12	10	40,00	45,45	34,55	56,36	
13	Середнє	34,55	42,18	36,73	60,73	
14	*i*	Ранги				*Сума*
15		*I курс*	*II курс*	*III курс*	*IV курс*	*рангів*
16	1	1	3	2	4	10
17	2	1	4	2,5	2,5	10
18	3	2	1	3	4	10
19	4	1	4	2	3	10
20	5	2	1	3	4	10
21	6	1,5	3	1,5	4	10
22	7	2	3	1	4	10
23	8	2	4	1	3	10
24	9	1	2	3	4	10
25	10	2	3	1	4	10
26	$T_j =$	15,50	28,00	20,00	36,50	100
27	j	1	2	3	4	*Сума*
28	$T^*_j =$	15,50	20,00	28,00	36,50	100
29	$n =$	10				
30	$c =$	4				
31	$L_{емп} =$	285,5				
32	$L_{0,05} =$	266	H_0	відхиляється		
33	$L_{0,01} =$	272	H_0	відхиляється		

Рис. 5.45. Результати розрахунків $L_{емп}$

Запитання. Завдання.

1. Для яких ситуацій використовується критерій Крускала-Волліса *H*?
2. Для яких ситуацій використовується критерій Фрідмана χ^2_r?
3. Для яких ситуацій використовується критерій тенденцій Пейджа *L*?
4. Повторіть математичні процедури завдань за прикладами 5.18 – 5.20.
5. Виконайте лабораторні роботи № 18 і № 19.

5.6. ПЕРЕВІРКА ЗНАЧУЩОСТІ КОЕФІЦІЄНТІВ КОРЕЛЯЦІЇ

Коефіцієнти кореляції як міри зв'язку між випадковими величинами є також величинами випадковими, носять імовірнісний характер. Статистичні висновки про кореляційний зв'язок між величинами роблять не з генерального коефіцієнта кореляції ρ (значення цього параметра є звичайно невідомим), а за його вибірковим аналогом r. Оскільки коефіцієнти кореляції r розраховується за значеннями змінних, які випадково потрапили у вибірку з генеральної сукупності, то й статистика r є величиною випадковою, яка потребує статистичної оцінки.. Як правило, перевіряють нульову гіпотезу про відсутність кореляційного зв'язку між змінними у генеральній сукупності, тобто H_0: $\rho = 0$. Достовірність (вірогідність) коефіцієнтів кореляції залежить від прийнятого рівня значущості α і обсягу вибірки n.

Коефіцієнт лінійної кореляції Персона r_{xy}

Коефіцієнт кореляції r_{xy} як *вибіркова статистика* є мірою оцінкою свого *генерального параметра* ρ_{xy}. Статистика лінійного коефіцієнта кореляції має розподіл Стьюдента:

$$t_r = \frac{r_{xy}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)/(n-2)}}\,. \tag{5.30}$$

Нульову гіпотезу H_0 відхиляють на рівні значущості α, якщо критичне значення t-критерію (t_{st}) не перевищує емпіричного значення t_r.

Приклад 5.21. Оцінити значущість кореляційного зв'язку між успішністю виконання тестових завдань з фізики (X) і математики (Y) учнями загальноосвітньої школи (табл. 5.46).

Послідовність рішення:

- за емпіричними даними B2:C13 (рис. 5.46) оцінити характер лінійності зв'язку між ознаками X і Y за допомогою діаграми розсіяння (рис. 5.47);

	A	B	C
1	i	X	Y
2	1	22	18
3	2	25	22
4	3	18	20
5	4	24	25
6	5	14	15
7	6	20	18
8	7	16	20
9	8	15	13
10	9	24	18
11	10	20	15
12	11	11	10
13	12	11	13
14	r_{xy} =	0,77	
15	t_r =	3,87	
16	α =	0,01	
17	t_{st} =	3,17	

Рис. 5.46. Коефіцієнт кореляції $r_{xy} \approx 0{,}77$; t-критерій $t_r \approx 3{,}87$

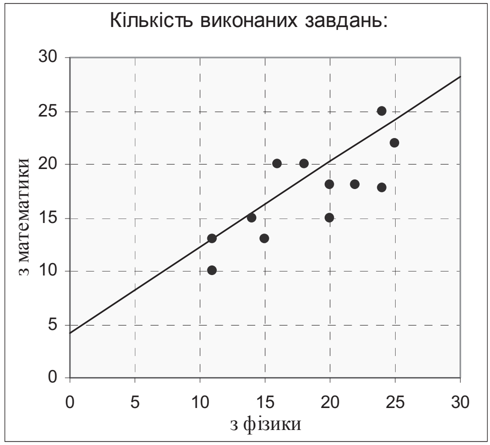


Рис. 5.47. Діаграма розсіяння кількості виконаних завдань з фізики (X)і математики (Y)

- переконатися, що кореляція лінійна. З діаграми видно, що зв'язок прямий і лінійний (рис. 5.47).Це дає підстави для застосування критерію t_r для оцінювання значущості коефіцієнта кореляції Пірсона r_{xy};
- у комірці B14 розрахувати *коефіцієнт кореляції Пірсона* r_{xy} за допомогою функції MS Excel =ПИРСОН(B2:B13;C2:C13). Значення $r_{xy} \approx +0{,}77$ свідчить про *сильний прямий зв'язок* між ознаками X і Y;
- у комірці B15 розрахувати емпіричний критерій t_r за допомогою виразу =B14*КОРЕНЬ((СЧЁТ(A2:A13)-2)/(1-B14^2)) і отримати значення $t_r \approx 3{,}87$;
- отримати однобічне критичне значення t-критерію Стьюдента за допомогою функції =СТЬЮДРАСПОБР(), яка повертає $t_{0,01} \approx 2{,}76$. Для цього у комірку B17 внести вираз =СТЬЮДРАСПОБР(2*B16;СЧЁТ(A2:A13)-2).
- *Прийняття рішення*: Оскільки $t_r > t_{0,01}$ (3,87>2,76), нульова гіпотеза відхиляється.
- *Висновки*: значення $r_{xy} \approx +0{,}77$, яке свідчить про *суттєвий прямий лінійний зв'язок* між результатами виконання учнями тестових завдань з фізики і математики, можна вважати істотними на рівні значущості α=0,01.

Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена r_s

Коефіцієнт рангової кореляції *Спірмена* r_s використовується для визначення тісноти зв'язків між кількісними і якісними ознаками, якщо їх значення проранжовані. Коефіцієнт кореляції рангів r_s розраховується за формулою:

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}{n \cdot (n^2 - 1)}, \tag{5.31}$$

де: n – обсяг сукупності об'єктів; $(x_i – y_i)$ – різниця рангів i-го об'єкта. Коефіцієнт r_s приймає значення в інтервалі від –1 до +1.

Приклад 5.22. Оцінити наявність і значущість зв'язку між оцінками експертів толерантності студентів до викладача (змінна X) і толерантності до інших студентів (змінна Y). Дані представлено в таблиці рис. 5.48.

	A	B	C	D	E
1	№	Ранги неприязні до:		Розрахунки	
2	студента	викладача	студентів		
3	i	x	y	$(x-y)$	$(x-y)^2$
4	1	8	2	6	36
5	2	5	6	-1	1
6	3	4	5	-1	1
7	4	3	7	-4	16
8	5	5	3	2	4
9	6	9	9	0	0
10	7	10	10	0	0
11	8	2	1	1	1
12	9	6	8	-2	4
13	10	3	4	-1	1
14	11	12	11	1	1
15	12	11	12	-1	1
16	Суми	78	78	0	66
17	r_s =	0,77			
18	$t_{емп}$ =	3,81			
19	$t_{кр}$ =	3,58			

Рис. 5.48. Результати розрахунку коефіцієнта рангової кореляції Спірмена r_s

	A	B	C	D	E
1	№	Ранги неприязні до:		Розрахунки	
2	студент	викладача	студентів		
3	i	x	y	$(x-y)$	$(x-y)^2$
4	1	8	2	=B4-C4	=D4^2
5	2	5	6	=B5-C5	=D5^2
6	3	4	5	=B6-C6	=D6^2
7	4	3	7	=B7-C7	=D7^2
8	5	5	3	=B8-C8	=D8^2
9	6	9	9	=B9-C9	=D9^2
10	7	10	10	=B10-C10	=D10^2
11	8	2	1	=B11-C11	=D11^2
12	9	6	8	=B12-C12	=D12^2
13	10	3	4	=B13-C13	=D13^2
14	11	12	11	=B14-C14	=D14^2
15	12	11	12	=B15-C15	=D15^2
16	Суми	=СУММ(В	=СУММ(С	=СУММ(	=СУММ
17	r_s =	=1-6*E16/A15/(A15^2-1)			
18	$t_{емп}$ =	=B17/КОРЕНЬ((1-B17^2)/(A15-2))			
19	$t_{кр}$ =	=СТЬЮДРАСПОБР(0,01/2;A15-2)			

Рис. 5.49. Формули для розрахунку коефіцієнта рангової кореляції Спірмена r_s

Послідовність рішення:

- Для *обчислення коефіцієнта* кореляції r_s внести відповідні вирази:

– у комірку D4 вираз =B4-C4, аналогічні вирази –у комірки D5: D15;

– у комірку E4 вираз =D4^2, аналогічні вирази внести у комірки E5: E15;

– у комірку E16 вираз =СУММ(E4:E15);

– у комірку B17 вираз =1-6*E16/A15/(A15^2-1), отримати значення 0,77:

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot 66}{12 \cdot (12^2 - 1)} \approx 0{,}77 .$$

• *Оцінка значущості коефіцієнта* рангової кореляції r_s. Вибірковий розподіл r_s, що характеризує нульову кореляцію між двома групами рангів, пов'язаний з t-розподілом Стьюдента. Якщо значення r_s дорівнює 0 і n >10, емпіричний критерій для ступенів вільності (n–2) визначається за формулою:

$$t_{емп} = \frac{r_s}{\sqrt{(1 - r_s^2)/(n-2)}} .$$

У комірку B18 внести вираз: =B17/КОРЕНЬ((1-B17^2)/(A15-2)), отримати значення $t_{емп} \approx 3{,}81$. Для малих сукупностей (n<10) перевірка нуль-гіпотези вимагає точного визначення вибіркового розподілу r_s.

• *Критичне значення* t-критерію отримати для α =0,01 і n=15. У комірку B19 внести функцію =СТЬЮДРАСПОБР(0,01/2;A15-2), яка дасть $t_{кр} \approx 3{,}58$.

Висновки: оскільки $t_{емп} > t_{кр}$ (3,81 >3,58), нуль-гіпотеза про відсутність кореляції відхиляється на рівні 0,01. Чисельне значення $r_s \approx 0{,}77$ свідчить про суттєвий прямий зв'язок.

Дихотомічний коефіцієнт кореляції Пірсона φ

Для визначення тісноти зв'язку ознак X і Y, які оцінюються у двох значеннях 1 і 0, застосовується коефіцієнт φ Пірсона:

$$\varphi = \frac{n \cdot p_{xy} - p_x \cdot p_y}{\sqrt{p_x \cdot p_y \cdot (n - p_x) \cdot (n - p_y)}}, \qquad (5.32)$$

де: p_{xy} – число об'єктів, що мають «1» і з X, і з Y; p_x і p_y – число об'єктів, що мають «1» з X і з Y відповідно; n – загальна кількість об'єктів.

Приклад 5.23. Оцінити зв’язаність між захопленістю учнів спортом та їхньою схильністю до математики. У таблиці рис. 5.50 позначення для X і Y: 1 – наявність ознаки, 0 – її відсутність.

Послідовність рішення:

- *Розрахунки коефіцієнта φ* проводимо за допомогою таких виразів:
  - у комірку B15 внести вираз =СЧЁТ(B3:B14);
  - у комірку B16 – вираз =СУММЕСЛИ(B3:B14;"=1";C3:C14);
  - у комірку B17 – вираз =СУММ(B3:B14);
  - у комірку B18 – вираз =СУММ(C3:C14);
  - у комірку B19 – вираз =(B15*B16-B17*B18)/КОРЕНЬ(B17*B18*(B15-B17)*(B15-B18)). Звичайні арифметичні розрахунки дають аналогічний результат коефіцієнта кореляції φ Пірсона для $p_{xy} = 5$, $p_x = 6$, $p_y = 7$ і $n = 12$:

$$\varphi = \frac{12 \cdot 5 - 6 \cdot 7}{\sqrt{6 \cdot 7 \cdot (12-6) \cdot (12-7)}} \approx 0{,}51.$$

- *Оцінка значущості* коефіцієнта кореляції φ. Якщо прийняти, що вибірковий розподіл коефіцієнта φ приблизно описується нормальним законом з нульовим середнім і одиничним стандартним відхиленням, перевірка нуль-гіпотези виконується за допомогою z-критерію: $z_{емп} = \varphi \cdot \sqrt{n}$.

Внести у комірку B20 вираз =B19*КОРЕНЬ(B15) і отримати $z_{емп}$:

$$z_{емп} = 0{,}51 \cdot \sqrt{12} \approx 1{,}76.$$

	A	B	C
1	№ учня	Захопленість спортом	Схильність до математики
2	i	x	y
3	1	0	0
4	2	1	1
5	3	0	1
6	4	0	0
7	5	1	1
8	6	1	0
9	7	1	1
10	8	0	0
11	9	0	1
12	10	1	1
13	11	1	1
14	12	0	0
15	n =	12	
16	p_{xy} =	5	
17	p_x =	6	
18	p_y =	7	
19	φ =	0,51	
20	$z_{емп}$ =	1,76	
21	$z_{кр}$ =	1,96	

Рис. 5.50. Розрахунки коефіцієнта кореляції φ

• *Критичне значення* z-критерію для α=0,05 розташоване нижче $z_{\alpha/2}$ стандартного нормального розподілу (0,025 або 0,975). У комірку B21 внести функцію =НОРМСТОБР(1-0,05/2), яка поверне значення $z_{кр} \approx 1,96$.

Висновки: оскільки $z_{емп}<z_{кр}$ (1,76<1,96), на рівні значущості 0,05 нульова гіпотеза H_0 приймається. Отже, значення коефіцієнта $\varphi \approx 0,51$ не може свідчити про існування зв'язку між захопленістю спортом учнів і проявом схильності до математики.

Точково-бісеріальний коефіцієнт кореляції r_{pb}

Точково-бісеріальний коефіцієнт кореляції r_{pb} використовується для емпіричних даних, значення яких отримано за різними шкалами вимірювань, наприклад, якщо змінна X вимірюється за дихотомічною шкалою, а змінна Y – у шкалі інтервалів або відносин:

$$r_{pb} = \frac{\overline{Y}_1 - \overline{Y}_0}{s_y}\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_0}{n \cdot (n-1)}}, \qquad (5.33)$$

де $\overline{Y}_1$ і n_1 – середнє і кількість Y об'єктів, що мають 1 з X;

$\overline{Y}_0$ і n_0 – середнє і кількість Y об'єктів, що мають 0 з X;

s_y – стандартне відхилення всіх n значень Y; $n = n_1 + n_0$.

Приклад 5.24. Оцінити зв'язок між показниками «стать» і «зріст» рис. 5.51 для 15 підлітків (X = 1 для чоловічої, X = 0 для жіночої статі).

Послідовність рішення:

• *Розрахунки* коефіцієнта кореляції r_{pb} :

– у комірку E3 внести =СЧЁТ(A3:A12) і отримати n = 10;

– у комірку E4 внести =СУММ(B3:B12) і отримати n_1=6;

– у комірку E5 внести =E3-E4 і отримати n_0=4;

– у комірку E6 внести =СУММЕСЛИ(B3:B12;1;C3:C12)/E4 і отримати середній зріст хлопчиків $\overline{Y}_1 \approx 167,83$ см;

– у комірку E7 внести =СУММЕСЛИ(B3:B12;0;C3:C12)/E5 і отримати середній зріст дівчат $\overline{Y}_0 \approx 154$ см;

– у комірку E8 внести =СТАНДОТКЛОН(C3:C12) і отримати стандартне відхилення s_y=11,35;

– у комірку E9 внести вираз для розрахунку точково-бісеріального коефіцієнта =(E6-E7)/E8*КОРЕНЬ(E4*E5/E3/(E3-1)) і отримати його значення:

$$r_{pb} = \frac{167{,}83 - 154}{11{,}35}\sqrt{\frac{6 \cdot 4}{10 \cdot (10-1)}} \approx 0{,}63 .$$

На рис. 5.51 представлено результати розрахунку точково-бісеріального коефіцієнта кореляції r_{pb}, на рис. 5.52 – відповідні розрахункові формули.

	A	B	C	D	E
1	*i*	Стать	Зріст (см)	Розрахунки	
2		*x*	*y*		
3	1	1	165	*n* =	10
4	2	0	167	n_1 =	6
5	3	1	160	n_0 =	4
6	4	1	168	Y_1 =	167,83
7	5	0	140	Y_0 =	154,00
8	6	1	183	s_y =	11,35
9	7	0	157	r_{pb} =	0,63
10	8	0	152	$t_{емп}$ =	2,29
11	9	1	163	$t_{0,05}$ =	2,75
12	10	1	168		

Рис. 5.51. Результати розрахунку коефіцієнта r_{pb}

	A	B	C	D	E
1	*i*	Стать	Зріст (см)	Розрахунки	
2		*x*	*y*		
3	1	1	165	*n* =	=СЧЁТ(A3:A12)
4	2	0	167	n_1 =	=СУММ(B3:B12)
5	3	1	160	n_0 =	=E3-E4
6	4	1	168	Y_1 =	=СУММЕСЛИ(B3:B12;1;C3:C12)/E4
7	5	0	140	Y_0 =	=СУММЕСЛИ(B3:B12;0;C3:C12)/E5
8	6	1	183	s_y =	=СТАНДОТКЛОН(C3:C12)
9	7	0	157	r_{pb} =	=(E6-E7)/E8*КОРЕНЬ(E4*E5/E3/(E3-1))
10	8	0	152	$t_{емп}$ =	=E9/КОРЕНЬ((1-E9^2)/(E3-2))
11	9	1	163	$t_{0,05}$ =	=СТЬЮДРАСПОБР(0,05/2;E3-2)
12	10	1	168		

Рис. 5.52. Формули для розрахунку коефіцієнта кореляції r_{pb}

• *Оцінка значущості* коефіцієнта кореляції r_{pb} зводиться до перевірки нуль-гіпотези (H_0: $r_{pb} = 0$) , для якої використовується статистика *t*-критерій Стьюдента з (*n*–2) ступенями вільності:

$$t = \frac{r_{pb}}{\sqrt{(1 - r_{pb}^2)/(n-2)}} . \qquad (5.34)$$

Для розрахунку $t_{емп}$ у комірку E10 внести =E9/КОРЕНЬ((1-E9^2)/(E3-2)) і отримати значення $t_{емп} \approx 2{,}29$.

• *Критичне значення t*-критерію можна отримати за допомогою функції =СТЬЮДРАСПОБР(α/2; *n*–2). При α =0,05 і *n*=10 у комірку B256 внести функцію =СТЬЮДРАСПОБР(0,05/2;E3-2), яка дає значення $t_{кр} \approx 2{,}75$.

• *Висновки*: оскільки отримане значення $t_{емп}$ ≈2,29 не перевищує критичне значення $t_{кр}$≈2,75 нуль-гіпотеза про відсутність кореляції приймається. Отже, з імовірністю 95% (α=0,05) правдоподібно, що у цій ситуації коефіцієнт кореляції r_{pb} , який приймає доволі суттєве значення (0,63), не є вірогідним!

Запитання. Завдання.

1. Охарактеризуйте особливості застосування, розрахунку і перевірки значущості коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона.

2. Охарактеризуйте особливості застосування, розрахунку і перевірки значущості коефіцієнта рангової кореляції Спірмена.

3. Охарактеризуйте особливості застосування, розрахунку і перевірки значущості дихотомічного коефіцієнта кореляції Пірсона φ.

4. Охарактеризуйте особливості застосування, розрахунку і перевірки значущості точково-бісеріального коефіцієнта кореляції.

6. Повторіть математичні процедури завдань за прикладами 5.21 – 5.24.

7. Виконайте лабораторні роботи № 20 – № 22.

6. ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ

Основною метою дисперсійного аналізу, фундаментальна концепція якого була запропонована Фішером у 1920 р., є дослідження значущості відмінності між середніми декількох груп даних або змінних. Якщо порівнюються середні двох груп, дисперсійний аналіз дасть той же результат, що і звичайний *t*-критерій для незалежних або залежних вибірок. Проте використання дисперсійного аналізу має переваги особливо для малих вибірок.

У дисперсійному аналізі перевірка статистичної значущості відмінності між середніми декількох груп здійснюється на основі вибіркових дисперсій. Ця перевірка проводиться за допомогою розбиття загальної дисперсії (варіації) на частини, одна з яких обумовлена випадковою помилкою (тобто внутрішньогруповою мінливістю), а друга пов'язана з відмінністю середніх значень. Якщо ця відмінність значуща, нульова гіпотеза щодо існування відмінності між середніми значеннями відкидається на певному рівні значущості.

Дисперсійний однофакторний аналіз

Дисперсійний однофакторний аналіз використовується у дослідженнях зміни результативної ознаки під впливом зміни умов або градацій фактора. Суть математичних перетворень дисперсійного методу полягає в тому, щоб зіставити дисперсії за факторами із дисперсією усіх значень, отриманих в експерименті. Однофакторний аналіз вимагає не менше трьох градацій фактора і не менше двох випробовувань у кожній градації. При проведенні дисперсійного аналізу необхідно перевірити нормальність розподілу досліджуваної випадкової величини і відсутність відмінності дисперсій сукупностей. Це можна виконати методами перевірки статистичних гіпотез (див.розділ 5).

Припустимо, що аналізується вплив фактора A на k рівнях A_1, A_2, ..., A_k. Наприклад, в експерименті це можна реалізувати, якщо задіяти k вибірок з різними градаціями умов. На кожному рівні A_i (для кожної вибірки) проведено n спостережень $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ (див. табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Номери спостережень	Рівні фактора А			
	A_1	A_2		A_k
1	x_{11}	x_{21}	...	x_{k1}
2	x_{12}	x_{22}	...	x_{k2}
...	...	...	...	...
j	x_{1j}	x_{2j}	...	x_{kj}
...	...	...	...	...
n	x_{1n}	x_{2n}	...	x_{kn}
$\sum$	X_1	X_2	...	X_k

Розглянемо оцінки різних дисперсій.

Дисперсія s_i^2 для рівня A_i (для певної вибірки) може бути записана як

$$s_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)^2\right].$$

Дисперсія s_0^2, що характеризує варіативність поза впливу фактора A

$$s_0^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} s_i^2 = \frac{1}{k(n-1)}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2 = \frac{1}{k(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)^2\right].$$

Загальна дисперсія s^2 всіх $n{\cdot}k$ спостережень дорівнює

$$s^2 = \frac{1}{kn-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2, \text{ де } \quad \bar{\bar{x}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i \quad \text{і} \quad \bar{x}_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}.$$

Отже,

$$s_2 = \frac{1}{kn-1}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{1}{kn}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)^2\right].$$

Дисперсія s_A^2, що характеризує зміну середніх $\bar{x}_i$ під впливом фактора A:

$$s_A^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2.$$

Перевірка впливу фактора A на зміну середніх може бути зведена до порівняння дисперсій s_A^2 і s_0^2. Вплив фактора A вважатиметься значущим на ріні

α, якщо є значущим відношення $s_A^2 \,/\, s_0^2$, тобто якщо

$$s_A^2 \,/\, s_0^2 > F_{\alpha}[k-1;\, k(n-1)],$$

де $k-1;\, k(n-1)$ – ступені вільності F-розподілу, $s_A^2 \,/\, s_0^2$ – F-критерій Фішера.

Приклад 6.1. Довести припущення про те, що фактор швидкості пред'явлення слів впливає на показники їх відтворення (дані у таблиці рис. 8.1).

Послідовність рішення:

- *Формулювання гіпотез.*

H_0: фактор швидкості *не є більш вираженим*, ніж випадковим;

H_1: фактор швидкості *є більш вираженим*, ніж випадковим.

- *Перевірка припущень*: досліджуваний параметр має *нормальний* розподіл; вибірки *незв'язані однакових* обсягів; виміри за шкалою *відношень*.

- *Визначення емпіричного критерію* $F_{емп}$ базується на зіставленні квадратів сум по стовпцях із сумою квадратів усіх емпіричних значень. Кожний стовпець представляє вибірку і відповідає певній градації фактора швидкості.

- *Введені позначення*:

  $n = 6$ – кількість спостережень (рядків);

  $k = 3$ – кількість факторів (стовпчиків);

  $n \cdot k = 6 \cdot 3 = 18$ – загальна кількість індивідуальних значень;

  j – індекс рядків змінюється від 1 до n ($j = 1, 2, \ldots, n$);

  i – індекс стовпчиків змінюється від 1 до k ($i = 1, 2, \ldots, k$).

- *Математичні розрахунки* (див. рис 6.1 і 6.2):

  – розрахувати суми в комірках B13:B15 за формулами

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2; \qquad Q_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} X_i^2; \qquad Q_3 = \frac{1}{kn}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2,$$

  а саме

$$Q_1 = 6^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + \ldots + 5^2 + 5^2 = 432; \quad Q_2 = \frac{1}{6}(34^2 + 29^2 + 23^2) = 421;$$

$$Q_3 = \frac{1}{3 \cdot 6}(34 + 29 + 23)^2 = 410{,}89;$$

  – розрахувати емпіричний критерій $F_{емп}$ в комірці B16 за формулою

$$F_{емп} = \frac{s_A^2}{s_0^2} = \frac{k(n-1)}{k-1}\frac{Q_2 - Q_3}{Q_1 - Q_2}, \text{ тобто } F_{емп} = \frac{3(6-1)}{3-1}\frac{421-410{,}89}{432-421} \approx 6{,}89.$$

	A	B	C	D
1	j \ i	Швидкість пред'явлення		
2		Низька	Середня	Висока
3	1	6	5	4
4	2	7	6	4
5	3	6	5	4
6	4	5	4	3
7	5	6	4	5
8	6	4	5	3
9	Суми:	34	29	23
10	Середні:	5,67	4,83	3,83
11	*n* =	6		
12	*k* =	3		
13	*Q1* =	432,00		
14	*Q2* =	421,00		
15	*Q3* =	410,89		
16	$F_{емп}$ =	6,89		
17	$F_{0,05}$ =	3,68		
18	$F_{0,01}$ =	6,36		
19	$p_{емп}$ =	0,0075		

Рис. 6.1. Результати дисперсійного аналізу

	A	B	C	D
1	j \ i	Швидкість пред'явлення		
2		Низька	Середня	Висока
3	1	6	5	4
4	2	7	6	4
5	3	6	5	4
6	4	5	4	3
7	5	6	4	5
8	6	4	5	3
9	Суми:	=СУММ(B3:B8)	=СУММ(C3:C8)	=СУММ(D3:D8)
10	Середні:	=СРЗНАЧ(B3:B8)	=СРЗНАЧ(C3:C8)	=СРЗНАЧ(D3:D8)
11	*n* =	=СЧЁТ(B3:B8)		
12	*k* =	=СЧЁТ(B9:D9)		
13	*Q1* =	=СУММКВ(B3:D		
14	*Q2* =	=СУММКВ(B9:D9)/B11		
15	*Q3* =	=СУММ(B9:D9)^2/B11/B12		
16	$F_{емп}$ =	=(B14-B15)*B12*(B11-1)/(B13-B14)/(B12-1)		
17	$F_{0,05}$ =	=FРАСПОБР(0,05;B12-1;B12*(B11-1))		
18	$F_{0,01}$ =	=FРАСПОБР(0,01;B12-1;B12*(B11-1))		
19	$p_{емп}$ =	=FРАСП(B16;B12-1;B12*(B11-1))		

Рис. 6.2. Розрахункові формули однофакторного дисперсійного аналізу

- *Критичне значення* $F_{кр}$ можна отримати за допомогою функції =FРАСПОБР() для рівня значущості для $\alpha = 0{,}05$ (0,01) і числа ступенів вільності $k-1 = 3-1=2$ і $k(n-1) = 3(6-1)=15$. $F_{0,05} \approx 3{,}68$ і $F_{0,01} \approx 6{,}36$.

- *Прийняття рішення.* Оскільки $F_{емп} > F_{0,01}$ (6,89 > 6,36), нульова гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,01.

- *Формулювання висновків.* Відмінності в обсязі відтворення слів (фактор швидкості) є більш вираженими, ніж випадковим. Цю залежність можна представити графічно на рис. 6.3.

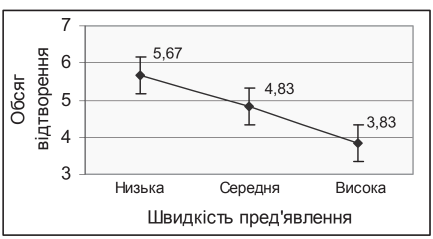


Рис. 6.3. Залежність середнього обсягу відтворених слів від швидкості пред'явлення

Розрахунки однофакторної моделі можна провести за допомогою пакета «Аналіз даних» розділ «Однофакторний дисперсійний аналіз» (рис. 6.4).

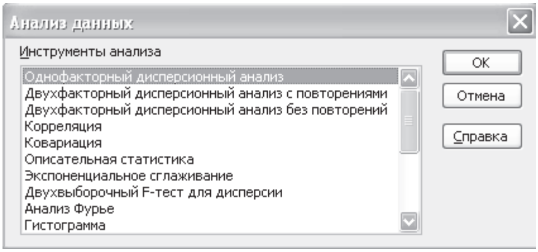


Рис. 6.4. Меню пакета «Аналіз даних»

Після введення відповідних параметрів (рис. 6.5) можна отримати результати однофакторного дисперсійного аналізу (рис. 6.6).

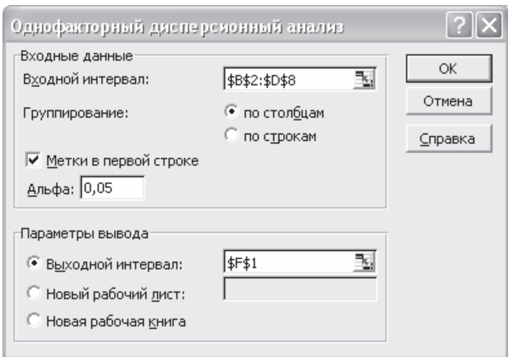


Рис. 6.5. Діалогове вікно

	F	G	H	I	J	K	L
1	Однофакторный дисперсионный анализ						
2							
3	ИТОГИ						
4	*Группы*	*Счет*	*Сумма*	*Среднее*	*Дисперсия*		
5	Низька	6	34	5,67	1,07		
6	Середня	6	29	4,83	0,57		
7	Висока	6	23	3,83	0,57		
8							
9							
10	Дисперсионный анализ						
11	*Источник вариации*	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-Значение*	*F критическое*
12	Между группами	10,11	2	5,06	6,89	0,0075	3,68
13	Внутри групп	11	15	0,73			
14							
15	Итого	21,11	17				

Рис. 6.6. Результати однофакторного дисперсійного аналізу ($\alpha = 0{,}05$)

Комп'ютерний пакет «Аналіз даних» виконує розрахунки основних статистик (суми, середні, дисперсії, значення емпіричних і теоретичних F-критеріїв тощо), що дає підстави досліджникові для статистичних висновків.

Дисперсійний двофакторний аналіз

Дисперсійний двофакторний аналіз застосовується в тих випадках, коли досліджується одночасна дія двох факторів на *різні* вибірки об'єктів, тобто коли різні вибірки опиняються під впливом різних *поєднань* двох факторів. Може статися, що одна змінна значущо діє на досліджувану ознаку тільки при певних значеннях іншої змінної. Наприклад, посилення мотивації може підвищувати швидкість рішення завдань у високоінтелектуальних осіб і знижувати її у низькоінтелектуальних. Отже, дисперсійний двофакторний аналіз дозволяє оцінити не лише вплив кожного з факторів, але й їхню взаємодію.

Суть методу залишається тією самою, як і при однофакторній моделі, але у двофакторному дисперсійному аналізі можна перевірити більшу кількість гіпотез, проте розрахунки дещо складніші, ніж в однофакторних комплексах.

Дисперсійний двофакторний аналіз пред'являє особливі вимоги до формування комплексів. Для кожного фактора має бути не менше двох градацій; у кожному осередку комплексу повинно бути не менше двох спостережуваних значень для виявлення взаємодії градацій; комплекс має бути симетричною системою: кожній градації фактора A повинна відповідати однакова кількість градацій фактора B; результативна ознака повинна мати нормальний розподіл; фактори мають бути незалежними, що може бути підтверджено відсутністю кореляційного зв'язку між змінними-чинниками.

Приклад 6.2. Чотирьом групам по 4 випробовуваних у різних комбінаціях швидкості пред’явленні і довжини слова було запропоновано завдання з 10 слів для відтворення їх через деякий час (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

Кількість відтворених слів

різної довжини і швидкості їх пред'явлення

Фактори	Групи:			
	A1B1	A2B1	A1B2	A2B2
А – довжина	короткі слова	довгі	короткі слова	довгі
В – швидкість	висока		низька	
1	7	5	4	6
2	5	4	3	4
3	4	3	3	7
4	7	4	4	5
Середні:	5,75	4,00	3,50	5,50

Необхідно довести *значущість* припущення про те, що між факторами довжини слова (А) і швидкістю їх пред'явлення (В) спостерігається *взаємодія*: при великій швидкості пред'явлення краще запам'ятовуються короткі, при низькій швидкості – довгі слова, що показано на рис. 6.7.

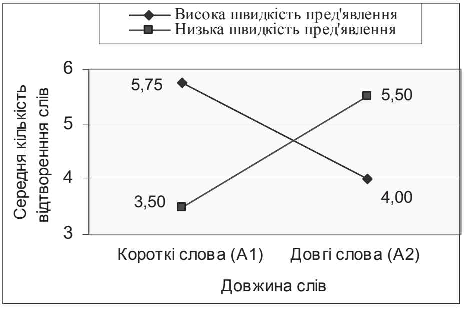


Рис. 6.7. Залежність середньої кількості відтворених слів від їхньої довжини і швидкості пред'явлення

Послідовність рішення:

• *Формулювання гіпотез.* Зважаючи на умови дослідження, необхідно висунути три комплекти неспрямованих гіпотез, які стосуються впливу фактора *А* окремо від фактора *В*, впливу фактора *В* окремо від фактора *А* і гіпотези про вплив взаємодії градацій факторів *А* і *В*.

1-й комплект гіпотез:

$H_{0(1)}$: відмінності в обсязі відтворення слів, обумовлені дією фактора A, *є не більше вираженими*, ніж випадкові відмінності між показниками;

$H_{1(1)}$: відмінності в обсязі відтворення слів, обумовлені дією фактора A, *є більш вираженими*, ніж випадкові відмінності між показниками.

2-й комплект гіпотез:

$H_{0(2)}$: відмінності в обсязі відтворення слів, обумовлені дією фактора B, *є не більше вираженими*, ніж випадкові відмінності між показниками;

$H_{1(2)}$: відмінності в обсязі відтворення слів, обумовлені дією фактора B, *є більш вираженими*, ніж випадкові відмінності між показниками.

3-й комплект гіпотез:

$H_{0(3)}$: вплив фактора A на обсяг відтворення слів *однаковий* при різних градаціях фактора B і навпаки;

$H_{1(3)}$: вплив фактора A на обсяг відтворення слів *різний* при різних градаціях фактора B і навпаки.

- *Перевірка припущень*: досліджуваний параметр має *нормальний* розподіл; вибірки *незв'язані однакових* обсягів; виміри за шкалою *відношень*.

- *Визначення емпіричного критерію*. Ситуації відповідає модель двобічного F-критерію, для якого необхідно визначати три емпіричні значення:

F_A – характеризує варіативність ознаки, зумовлену дією фактора A;

F_B – характеризує варіативність ознаки, зумовлену дією фактора B;

F_{AB} – характеризує варіативність, зумовлену взаємодією факторів A і B.

- *Введені позначення*:

  $n = 4$ – кількість об'єктів (рядків у групі випробувань);

  $l = 2$ – кількість факторів A;

  $m = 2$ – кількість факторів B;

  $n \cdot l \cdot m = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ – загальна кількість значень;

  k – індекс об'єктів змінюється від 1 до n ($i = 1, ..n$);

  i – індекс факторів A змінюється від 1 до l ($j = 1,..l$).

  j – індекс факторів B змінюється від 1 до m ($k = 1,..m$).

• *Розрахунки критеріїв* F_A , F_B і F_{AB} рекомендовано починати з побудови за емпіричними даними спеціальної таблиці, що відтворює двофакторний дисперсійний комплекс (рис.6.8 і 6.9)

	A	B	C	D	E
1	Швидкість	Довжина слів		Середні	
2	пред'явлення	Короткі (A1)	Довгі (A2)		
3	Висока (B1)	7	5	5,75	4,00
4		5	4	5,75	4,00
5		4	3	5,75	4,00
6		7	4	5,75	4,00
7	Низька (B2)	4	6	3,50	5,50
8		3	4	3,50	5,50
9		3	7	3,50	5,50
10		4	5	3,50	5,50
11	Середні	5,75	4,00	4,88	
12		3,50	5,50	4,50	
13		4,63	4,75	4,69	4,69
14	n =	4			
15	l =	2			
16	m =	2			
17	nlm =	16			
18	Q_0 =	29,44			
19	Q_1 =	0,56			
20	Q_2 =	0,06			
21	Q_3 =	14,06			
22	Q_4 =	14,75			
23	S^2_1 =	0,56	F_A =	0,46	
24	S^2_2 =	0,06	F_B =	0,05	
25	S^2_3 =	14,06	F_{AB} =	11,44	
26	S^2_4 =	1,23			
27	α =	0,05	$F_{кр(1,12)}$	4,75	

Рис. 6.8. Результати двофакторного дисперсійного аналізу

• *Розрахувати* середні значення :

у комірках B11:C12 для кожної вибірки

$$\bar{x}_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} \text{ (наприклад, } \bar{x}_{11} = \frac{1}{4}(7+5+4+7) = 5{,}75\text{);}$$

у комірках D3:E10 повторити значення для кожної вибірки;

у комірках B13:C13 по фактору A (по стовпчику)

$$\bar{x}_{*i} = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} x_{ij} \text{ (наприклад, } \bar{x}_{*1} = \frac{1}{2}(5{,}75+3{,}50) = 4{,}63\text{);}$$

у комірках D11:D12 по фактору B (по рядках)

$$\bar{x}_{j*} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \text{ (наприклад, } \bar{x}_{1*} = \frac{1}{2}(5{,}75 + 4{,}00) = 4{,}88 \text{);}$$

у комірках D13:E13 для всіх вибірок

$$\bar{x} = \frac{1}{l \cdot m}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} x_{ijk} \text{ (} \bar{x} = \frac{1}{2 \cdot 2}(5{,}75 + 4{,}00 + 3{,}50 + 5{,}50) \approx 4{,}69 \text{);}$$

- *Розрахувати* суми квадратів різниць у комірках B18:B22 за допомогою формул і відповідних виразів(див. рис. 6.9):

$Q_0 = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x})^2$ =ДИСП(B3:C10)*(B17-1);

$Q_1 = l \cdot n\sum_{i=1}^{l}(\bar{x}_{*i} - \bar{x})^2$ =B14*B15*СУММКВРАЗН(D11:D12;D13:E13);

$Q_2 = m \cdot n\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_{j*} - \bar{x})^2$ =B14*B16*СУММКВРАЗН(B13:C13;D13:E13);

$Q_4 = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x}_{ij})^2$ =СУММКВРАЗН(B3:C10;D3:E10);

$Q_3 = Q_0 - Q_1 - Q_2 - Q_4$ =B18-B19-B20-B22.

- *Розрахувати* середні квадрати у комірках B23:B26 за допомогою формул і відповідних виразів:

$$s_1^2 = \frac{Q_1}{(l-1)}; \quad s_2^2 = \frac{Q_2}{(m-1)}; \quad s_3^2 = \frac{Q_3}{(l-1)(m-1)}; \quad s_4^2 = \frac{Q_3}{l \cdot m \cdot (n-1)}.$$

- *Розрахувати* емпіричні критерії у комірках B23:B25:

$$F_A = \frac{s_1^2}{s_4^2} = \frac{0{,}56}{1{,}23} \approx 0{,}46; \quad F_B = \frac{s_2^2}{s_4^2} = \frac{0{,}06}{1{,}23} \approx 0{,}05; F_{AB} = \frac{s_3^2}{s_4^2} = \frac{14{,}06}{1{,}23} \approx 11{,}44;$$

- *Критичні значення F-критерію* можна отримати за допомогою функції =FРАСПОБР для прийнятого рівня значущості α і ступенів вільності. df_A = (l–1)=(2–1)=1, df_B=(m–1)=(2–1)=1, df_{AB} =(l–1)(m–1)=1 df_2=$l \cdot m \cdot (n-1)$=12. Отже, і відповідні критичні значення для $F_{крA}$, $F_{крB}$, $F_{крAB}$ також будуть однакові. На рівні значущості 0,05 критичне значення $F_{(1,12)} \approx 4{,}75$.

	A	B	C	D	E
1	Швидкість	Довжина слів		Середні	
2	пред'явлення	Короткі (А1)	Довгі (А2)		
3	Висока (В1)	7	5	=СРЗНАЧ(B3:B6)	=СРЗНАЧ(C3:C6)
4		5	4	5,75	4
5		4	3	5,75	4
6		7	4	5,75	4
7	Низька (В2)	4	6	=СРЗНАЧ(B7:B10)	=СРЗНАЧ(C7:C10)
8		3	4	3,5	5,5
9		3	7	3,5	5,5
10		4	5	3,5	5,5
11	Середні	=СРЗНАЧ(B3:B6)	=СРЗНАЧ(C3:C6)	=СРЗНАЧ(B11:C11)	
12		=СРЗНАЧ(B7:B10)	=СРЗНАЧ(C7:C10)	=СРЗНАЧ(B12:C12)	
13		=СРЗНАЧ(B11:B12)	=СРЗНАЧ(C11:C12)	=СРЗНАЧ(B3:C10)	4,6875
14	n =	=СЧЁТ(B3:B6)			
15	l =	2			
16	m =	2			
17	nlm =	=B14*B15*B16			
18	Q_0 =	=ДИСП(B3:C10)*(B17-1)			
19	Q_1 =	=B14*B15*СУММКВРАЗН(D11:D12;D13:E13)			
20	Q_2 =	=B14*B16*СУММКВРАЗН(B13:C13;D13:E13)			
21	Q_3 =	=B18-B19-B20-B22			
22	Q_4 =	=СУММКВРАЗН(B3:C10;D3:E10)			
23	$S^2{}_1$ =	=B19/(B16-1)	F_A =	=B23/B26	
24	$S^2{}_2$ =	=B20/(B15-1)	F_B =	=B24/B26	
25	$S^2{}_3$ =	=B21/(B16-1)/(B15-1	F_{AB} =	=B25/B26	
26	$S^2{}_4$ =	=B22/B15/B16/(B14-			
27	α =	0,05	$F_{кр(1,12)}$	=FРАСПОБР(B27;1;12)	

Рис. 6.9. Розрахункові формули двофакторного дисперсійного аналізу

- *Прийняття рішення.* Оскільки $F_A < F_{(1,12)}$ (0,46 < 4,75) і $F_B < F_{(1,12)}$ (0,05<4,75), нульові гіпотези $H_{0(1)}$ і $H_{0(2)}$ приймаються. У той же час, оскільки $F_{AB} > F_{(1,12)}$ (11,44 > 4,75), нульова гіпотеза $H_{0(3)}$ відкидається .

- *Формулювання висновків*. Відмінності в обсязі відтворення слів, що обумовлені окремо факторами A і B, не є більш вираженими, ніж випадкові. Проте вплив фактора A на обсяг відтворення слів є різним при різних градаціях фактора B і навпаки. Висновки прийнято на рівні значущості 0,05.

Аналогічні результати можна отримати за допомогою пакета MS Excel «Аналіз даних» розділ «Двофакторний дисперсійний аналіз с повтореннями». Для цього у діалоговому вікні рис. 6.10 необхідно ввести відповідні параметри і отримати результати (рис. 6.11).

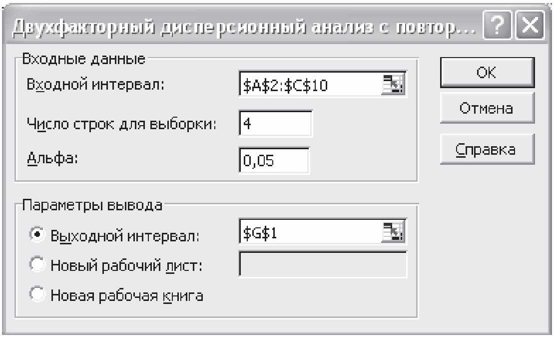


Рис. 6.10. Діалогове вікно двофакторного дисперсійного аналізу для незв'язаних вибірок

	G	H	I	J	K	L	M
1	Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями						
2							
3	ИТОГИ	Короткі (А1)	Довгі (А2)	Итого			
4	*Висока (В1)*						
5	Счет	4	4	8			
6	Сумма	23	16	39			
7	Среднее	5,75	4,00	4,88			
8	Дисперсия	2,25	0,67	2,13			
9							
10	*Низька (В2)*						
11	Счет	4	4	8			
12	Сумма	14	22	36			
13	Среднее	3,50	5,50	4,50			
14	Дисперсия	0,33	1,67	2,00			
15							
16	*Итого*						
17	Счет	8	8				
18	Сумма	37	38				
19	Среднее	4,63	4,75				
20	Дисперсия	2,55	1,64				
21							
22							
23	Дисперсионный анализ						
24	*Источник вариации*	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-Значение*	*F критическое*
25	Выборка	0,56	1	0,56	0,46	0,51	4,75
26	Столбцы	0,06	1	0,06	0,05	0,83	4,75
27	Взаимодействие	14,06	1	14,06	11,44	0,01	4,75
28	Внутри	14,75	12	1,23			
29							
30	Итого	29,44	15				

Рис. 6.11. Підсумки двофакторного дисперсійного аналізу

Отже, фактори довжини слів і швидкості їхнього пред'явлення окремо не впливають значуще на обсяг відтворення слів. Значущою виявляється взаємодія факторів: короткі слова краще запам'ятовуються при великій швидкості пред'явлення, а довгі – при повільній швидкості пред'явлення.

Пропонуємо самостійно розібратися з отриманими результатами, розрахунковими формулами та коментарем на рис. 6.7 – 6.11.

Запитання. Завдання.

1. Охарактеризуйте основні можливості методів дисперсійного аналізу.
2. Охарактеризуйте обмеження дисперсійного однофакторного аналізу.
3. Назвіть основу, на якій побудовано математичний апарат однофакторного дисперсійного аналізу.
4. Назвіть основу, на якій побудовано математичний апарат двофакторного дисперсійного аналізу.
5. Охарактеризуйте обмеження дисперсійного двофакторного аналізу.
6. Повторіть математичні процедури завдань за прикладами 6.1 – 6.2.
7. Виконайте лабораторні роботи № 23 і № 24.

7. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

7.1. ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

Лабораторні роботи спрямовано на закріплення теоретичних знань та розвиток навичок використання методів математичної статистики на базі сучасних інформаційних технологій.

Структура лабораторної роботи: тема, мета, посилання на відповідний розділ посібника, завдання для виконання.

Тематика лабораторних робіт

ЛР № 1. Незгруповані розподіли частот

ЛР № 2. Згруповані розподіли частот

ЛР № 3. Міри центральної тенденції та мінливості

ЛР № 4. Лінійний кореляційний зв'язок

ЛР № 5. Нелінійна кореляція

ЛР № 6. Взаємна зв'язаність ознак

ЛР № 7. Одномірна лінійна регресія

ЛР № 8. Теоретичні та емпіричні розподіли частот

ЛР № 9. Статистичне оцінювання

ЛР № 10. Гіпотези щодо нормальності розподілу

ЛР № 11. Перевірка однорідності вибірок (1)

ЛР № 12. Перевірка однорідності вибірок (2)

ЛР № 13. Значущість середнього μ

ЛР № 14. Значущість дисперсій σ^2

ЛР № 15. Відмінність у значеннях середніх

ЛР № 16. Відмінність у значеннях дисперсій

ЛР № 17. Відмінність у значеннях дисперсій 3-х і більш сукупностей

ЛР № 18. Виявлення відмінностей у рівні ознаки

ЛР № 19. Виявлення зсуву у значеннях ознаки

ЛР № 20. Значущість коефіцієнта рангової кореляції

ЛР № 21. Значущість дихотомічного коефіцієнта кореляції

ЛР № 22. Значущість точково-бісеріального коефіцієнта кореляції

ЛР № 23. Дисперсійний однофакторний аналіз

ЛР № 24. Дисперсійний двофакторний аналіз

Лабораторна робота № 1

Незгруповані розподіли частот

Мета роботи: побудова розподілу частот за емпіричними даними.

Теорія: Посібник, розділ 2.1, приклади 2.2 – 2.3.

Завдання: Представити в *табличній*, *графічній* та *аналітичній* формах диференціальний та інтегральний розподіли частот за табличними даними.

3	5	4	4	2	6	3	5	4	4
4	2	3	5	5	3	4	4	3	5

Лабораторна робота № 2

Згруповані розподіли частот

Мета роботи: побудова розподілу частот за емпіричними даними.

Теорія: Посібник, розділ 2.1, приклад 2.4.

Завдання: Представити в *табличній*, *графічній* та *аналітичній* формах диференціальний та інтегральний розподіли частот за табличними даними.

115	109	119	96	114	91	92	83	83	128	100	107	90	88	105	93	105	103	97	106
112	104	116	85	106	89	102	95	102	92	112	89	78	83	92	77	97	120	114	89
97	80	99	86	96	112	102	117	90	99	80	80	83	87	93	84	87	79	96	114

Лабораторна робота № 3

Міри центральної тенденції та мінливості

Мета роботи: опанувати методи розрахунку показників МЦТ і ММ.

Теорія: Посібник, розділ 2.2.

Завдання: За табличними даними розрахувати показники МЦТ і ММ:

– з використанням математичних операцій і відповідних формул: середнього, дисперсії, стандартного відхилення, асиметрії, ексцесу;

– з використанням стандартних статистичних функцій MS Excel;

– за допомогою пакета «Аналіз даних» розділу «Описова статистика».

6	7	3	2	5	5	7	3	4	4	2	8
6	4	6	4	5	4	5	6	5	6	4	2

Лабораторна робота № 4

Лінійний кореляційний зв'язок

Мета роботи: оцінка лінійного кореляційного зв'язку.

Теорія: Посібник, розділ 2.3, приклад 2.7.

Завдання: Побудувати діаграму розсіяння, розрахувати коефіцієнт лінійної кореляції Пірсона r_{xy} за наведеними даними, оцінити рівень значущості зв'язку.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	2	8	12	3	1	6	7	10	4	9	11	5
Y	6	5	10	7	3	4	9	8	1	11	12	2

Лабораторна робота № 5

Нелінійна кореляція

Мета роботи: оцінка нелінійного кореляційного зв'язку.

Теорія: Посібник, розділ 2.3, приклад 2.8.

Завдання: Побудувати діаграму розсіяння. Розрахувати коефіцієнт кореляційного відношення. Зробити висновки

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
x_i	10	10	10	10	10	14	14	14	14	18	18	18	18	22
y_i	7	8	9	9	10	8	9	10	11	9	10	11	12	11
i	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*	*27*	*28*
x_i	22	22	22	26	26	26	30	30	30	30	34	34	34	38
y_i	11	12	12	9	10	11	8	9	9	10	7	9	10	8

Лабораторна робота № 6

Взаємна зв'язаність ознак

Мета роботи: оцінка мір взаємозв'язку ознак.

Теорія: Підручник, розділ 2.3, приклад 2.9.

Завдання 1: Оцінити ступінь взаємної зв'язаності для ознак X і Y з за методами Чупрова (коефіцієнт K).

Спеціальності студентів (параметр Y)	Переваги видам діяльності у (параметр X)			
	Спорт	Мистецтво	Комп'ютерні мережі	Природа
Технічні	10	43	7	5
економічні	42	14	25	6
педагогічні	51	11	10	33

Лабораторна робота № 7

Одномірна лінійна регресія

Мета роботи: визначення коефіцієнтів лінійної регресії.

Теорія: Посібник, розділ 2.4, приклад 2.10.

Завдання: За емпіричними даними оцінити залежність параметру (X) від параметру (Y).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	2	8	12	3	1	6	7	10	4	9	11	5
Y	6	5	10	7	3	4	9	8	1	11	12	2

Лабораторна робота № 8

Теоретичні та емпіричні розподіли частот

Мета роботи: побудова теоретичних та емпіричних розподілів частот, оцінювання імовірнісних характеристики випадкових подій.

Теорія: Посібник, розділ 3.4, приклад 3.19.

Завдання: За результатами абсолютного емпіричного розподілу частот появи «бажаної» події $m_i = \mathrm{f}(x_i)$ побудувати :

– емпіричний розподіл відносних частот;

– теоретичний розподіл Бернуллі $b(x; n, p)$ з параметрами $n = 8$ і $p = 0,5$;

– оцінити значення ймовірності p^* схильності до появи «бажаної» події.

Кількість «бажаних» подій	x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Частота	m_i	0	20	42	78	60	40	10	3	3

Лабораторна робота № 9

Статистичне оцінювання

Мета роботи: виконання точкового та інтервального оцінювання параметрів генеральної сукупності за вибірковими даними.

Теорія: Посібник, розділ 4, приклад 4.4.

Завдання: Оцінити на рівні значущості 0,01 (0,05) довірчий інтервал для середнього показника ставлення старшокласників (n = 40) до незалежного тестування за даними таблиці.

2	2	2	2	2	3	4	2	3	3
3	1	5	3	3	2	2	2	2	2
4	2	2	2	2	3	4	2	3	3
1	4	3	1	2	2	2	2	2	2

Лабораторна робота № 10

Гіпотези щодо нормальності розподілу

Мета роботи: Перевірка нормальності розподілу ознаки з використанням непараметричних критеріїв.

Теорія: Посібник, розділ 5.2, приклад 5.4.

Завдання: Перевірити за критерієм Шапіро-Вілка W гіпотезу щодо відповідності нормальному законові розподілу емпіричних даних

16	4	4	5	6	3	4	10	11	8
3	7	8	9	15	14	9	11	12	13

Лабораторна робота № 11

Перевірка однорідності вибірок (1)

Мета роботи: Перевірка гіпотези щодо однорідності двох незалежних вибірок з використанням непараметричних критеріїв.

Теорія: Посібник, розділ 5.3, приклади 5.7 – 5.8.

Завдання: Перевірити за критерієм Колмогорова-Смірнова λ і критерієм Вілкоксона-Манна-Вітні U гіпотезу щодо однорідності двох незалежних вибірок X і Y за емпіричними даними (n_x=18, n_y=15).

X	5	4	6	6	3	5	9	12	8
	7	8	9	15	14	9	11	12	13
Y	4	5	5	8	3	3	10	11	
	6	7	8	13	10	9	12		

Лабораторна робота № 12

Перевірка однорідності вибірок (2)

Мета роботи: Перевірка гіпотези щодо однорідності двох незалежних вибірок з використанням критерію Лемана-Розенблатта типу омега-квадрат.

Теорія: Посібник, розділ 5.3, приклад 5.9.

Завдання: Перевірити за критерієм Лемана-Розенблатта ω^2 гіпотезу щодо однорідності двох незалежних вибірок X і Y за емпіричними даними (n_x=18, n_y=15).

X	5	4	6	6	3	5	9	12	8
	7	8	9	15	14	9	11	12	13
Y	4	5	5	8	3	3	10	11	
	6	7	8	13	10	9	12		

Лабораторна робота № 13

Значущість середнього μ

Мета роботи: перевірка статистичних гіпотез щодо середнього генеральної сукупності μ.

Теорія: Посібник, розділ 5.4, приклад 5.10.

Завдання: Чи можна стверджувати на рівні значущості 0,05 про те, що середнє вибірки $\overline{X}$ за табличними даними (n = 40, дисперсія невідома) не відрізняється статистично від значення 4,00?

5	3	2	5	5	5	3	2	5	5	4	2	2	5	5	2	3	5	3	5
5	3	5	3	3	5	4	2	4	4	5	4	3	4	5	3	4	5	2	5

Лабораторна робота № 14

Значущість дисперсій σ^2

Мета роботи: перевірка статистичних гіпотез щодо рівня дисперсії генеральної сукупності.

Теорія: Посібник, розділ 5.4, приклад 5.12.

Завдання 1: Чи можна вважати, що за показником дисперсії експериментальна вибірка студентів (n = 26) належить до генеральної сукупності з дисперсією 1,44?

4	5	4	4	4	5	4	5	3	3	5	4	5
5	4	4	5	3	4	5	4	3	5	3	5	4

Лабораторна робота № 15

Відмінність у значеннях середніх

Мета роботи: перевірка статистичних гіпотез про відмінність середніх (μ_1–μ_2) в умовах незв'язаних і зв'язаних вибірок.

Теорія: Посібник, розділ 5.3, приклад 5.5 і розділ 5.4, приклад 5.13.

Завдання: Чи відрізняються на рівні значущості 0,05 середні показники двох вибірок X_1 і X_2 Знайти рішення для варіантів незв'язаних і зв'язаних вибірок. Зробити висновки.

Вибірки	Показники досліджуваних об'єктів									
X_1	24	38	24	38	35	19	25	22	31	28
X_2	23	45	54	34	48	46	47	39	23	45

Лабораторна робота № 16

Відмінність у значеннях дисперсій

Мета роботи: перевірка статистичних гіпотез про відмінність дисперсій в умовах незв'язаних і зв'язаних вибірок.

Теорія: Посібник, розділ 5.4, приклади 5.14 – 5.15.

Завдання: Чи відрізняються на рівні значущості 0,05 показники дисперсій двох вибірок X_1 і X_2 Знайти рішення для варіантів незв'язаних і зв'язаних вибірок. Зробити висновки.

Вибірки	Показники досліджуваних об'єктів									
X_1	26	38	24	39	35	19	25	22	31	28
X_2	25	45	51	34	48	46	47	39	24	45

Лабораторна робота № 17

Відмінність у значеннях дисперсій 3-х і більш сукупностей

Мета роботи: перевірка статистичних гіпотез про відмінність дисперсій для 3-х і більш сукупностей.

Теорія: Посібник, розділ 5.4, приклад 5.17.

Завдання: Чи відрізняються на рівні значущості 0,05 показники дисперсій різних за обсягом чотирьох вибірок X_1, X_2, X_2 і X_4? Зробити висновки.

Вибірки	Показники досліджуваних об'єктів								
X_1	12	30	25	39	36	21	28	18		
X_2	24	40	44	35	47	38	41	22	35	20
X_3	30	45	41	34	48	33	35			
X_4	20	27	38	44	42	50	38	29	26	

Лабораторна робота № 18

Виявлення відмінностей у рівні ознаки

Мета роботи: перевірка статистичних гіпотез про відмінність у показниках на підставі критерію Крускала-Волліса H.

Теорія: Посібник, розділ 5.5, приклад 5.18.

Завдання 1: Оцінити відмінності в показниках досліджуваних об'єктів на рівні значущості 0,01 з обґрунтуванням вибору критерію.

Вибірки	Показники досліджуваних об'єктів							
X_1	30	32	14	23	42	42	10	
X_2	41	35	23	40	42	39		
X_3	11	31	24	34	23	43	21	32
X_4	33	45	54	24	38			

Лабораторна робота № 19

Виявлення зсуву у значеннях ознаки

Мета роботи: перевірка статистичних гіпотез зміни (зсуву) у показниках на підставі критерію Фрідмана χ^2_r і критерію тенденцій Пейджа L.

Теорія: Посібник, розділ 5.5, приклади 5.19 –5.20.

Завдання 1: Оцінити на рівні значущості 0,01 можливі зміни (зсуви) у вибіркових показниках за табличними даними. Оцінити потужність критеріїв

Фрідмана і Пейджа.

Вибірки	Показники досліджуваних об’єктів									
X_1	34	23	43	34	23	43	12	33	43	34
X_2	40	35	23	42	42	39	34	35	23	42
X_3	24	38	24	38	35	19	25	22	31	28
X_4	23	45	54	34	48	46	47	39	23	45

Лабораторна робота № 20

Значущість коефіцієнта рангової кореляції

Мета роботи: оцінка мір зв'язку при порядкових типах вимірювань ознак.

Теорія: Посібник, розділ 5.6, приклад 5.22.

Завдання 1: Оцінити зв'язок параметрів X і Y та значущість коефіцієнта рангової кореляції Спірмена r_s.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
X	3	1	7	12	2	4	11	9	10	5	6	13	8
Y	9	12	5	2	13	10	1	11	4	7	8	3	6

Лабораторна робота № 21

Значущість дихотомічного коефіцієнта кореляції

Мета роботи: оцінка мір зв'язку при номінальних типах вимірювань.

Теорія: Посібник, розділ 5.6, приклад 5.23.

Завдання 1: Виявити зв’язаність змінних X і Y за допомогою дихотомічного коефіцієнта кореляції Пірсона φ. Оцінити значущість коефіцієнта φ.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
Y	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1

Лабораторна робота № 22

Значущість точково-бісеріального коефіцієнта кореляції

Мета роботи: оцінка мір зв'язку при *різних* типах вимірювань змінних.

Теорія: Посібник, розділ 5.6, приклад 5.24.

Завдання 1: Визначити кореляційний зв'язок між статтю працівників держустанов X (1 – чоловіки, 0 – жінки) та їхнім заробітком Y (у тис. грн.).

Оцінити значущість точково-бісеріального коефіцієнта кореляції.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
Y	3,5	4,2	3,8	4,0	5,0	4,1	4,0	5,1	3,8	3,6	4,2	4,2	4,8	5,0	4,1

Лабораторна робота № 23

Дисперсійний однофакторний аналіз

Мета роботи: засвоєння методів однофакторного дисперсійного аналізу.

Теорія: Посібник, розділ 6, приклад 6.1.

Завдання: Трьом групам учнів (по 7 осіб у кожній групі) промовлялися з різною швидкістю десять слів. Чи існує зв'язок між показниками відтворення (розуміння сенсу) слів і швидкістю їх пред'явлення? Знайти рішення «традиційним» способом та за допомогою пакета MS Excel «Аналіз даних».

Швидкість	Кількість відтворених слів						
1:низька	7	8	8	6	7	5	8
2:середня	5	6	5	4	6	4	5
3:висока	2	3	3	4	2	4	3

Лабораторна робота № 24

Дисперсійний двофакторний аналіз

Мета роботи: засвоєння методів дисперсійного двофакторного аналізу.

Теорія: Посібник, розділ 6, приклад 6.2.

Завдання: Чи впливають фактори довжини слова (короткі і довгі) і швидкості їх пред’явлення на середній обсяг правильного відтворення слів? Рішення знайти «традиційним» способом і за допомогою пакета «Аналіз даних».

Фактор B (швидкість пред'явлення)	Фактор A (довжина слова)							
	A_1 (короткі слова)				A_2 (довгі слова)			
B_1 (велика швидкість)	9	8	6	7	5	3	3	4
B_2 (мала швидкість)	4	3	2	5	7	5	6	7

7.2. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

(* – правильна відповідь)

1. *Атрибутивні* розподіли використовуються у разі:

   Відповідь:

   1) номінальних типів вимірювань; *

   2) порядкових типів вимірювань;

   3) інтервальних типів вимірювань.

2. Які *варіаційні ряди* приймають тільки певні, наприклад, цілі значення?

   Відповідь:

   1) дискретні; *

   2) неперервні.

3. Коли доцільно складати розподіли *згрупованих* частот?

   Відповідь:

   1) у разі порядкових типів вимірювань;

   2) у разі інтервальних типів вимірювань;

   3) якщо кількість варіант близька до обсягу вибірки. *

4. *Відносні* частоти – це :

   Відповідь:

   1) відношення абсолютних частот до максимальної частоти;

   2) відношення абсолютних частот до загальної кількості об'єктів. *

5. Сума всіх *відносних частот* дорівнює:

   Відповідь:

   1) 1,00; *

   2) загальній кількості об'єктів.

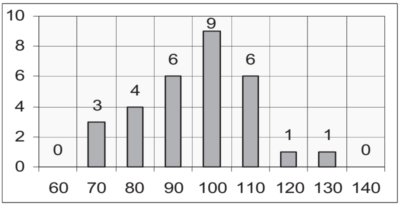
6. *Накопичені* частоти ще мають назву:

   Відповідь:

   1) диференціальних частот;

   2) інтегральних частот. *

7. Який *тип графіка* зображено :

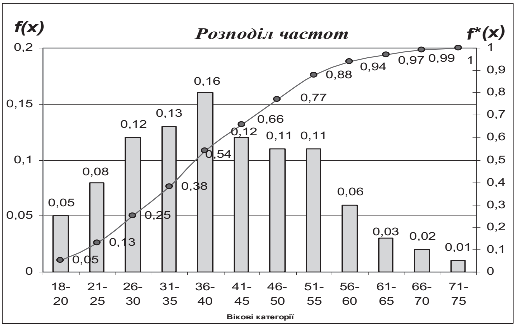


Відповідь:

1) полігон;

2) гістограма; *

8. Який *розподіл* представлено графіком $f^{*}(x)$?



Відповідь:

1) диференціальний;

2) інтегральний. *

9. Який *розподіл* представлено функцією $F(x)$?

$$F(x) = \begin{cases} 0.02, & x = x_1; \\ 0.48, & x = x_2; \\ 0.32, & x = x_3; \\ 0.14, & x = x_4; \\ 0.04, & x = x_5. \end{cases}$$

Відповідь:

1) диференціальний абсолютний;

2) інтегральний абсолютний;

3) диференціальний відносний; *

4) інтегральний відносний.

10. Яка *міра центральної тенденції* у розподілі має максимальну частоту?

Відповідь:

1) мода; *

2) медіана;

3) середнє арифметичне.

11. *Середину* варіаційного ряду визначає:

Відповідь:

1) мода;

2) медіана; *

3) середнє арифметичне.

12. Яка *міра центральної тенденції* передбачає використовування всіх значень вибірки, які впливають на її значення?

Відповідь:

1) мода;

2) медіана;

3) середнє арифметичне. *

13. Визначити *моду* вибірки (5, 4, 5, 3, 5, 4, 3, 5, 4, 5, 4, 3):

Відповідь:

1) 3;

2) 4;

3) 5. *

14. Визначити *медіану* вибірки (5, 4, 5, 3, 5, 4, 3, 5, 4, 5, 4, 3):

Відповідь:

1) 3;

2) 4; *

3) 5.

15. Визначити *середнє* вибірки (4, 5, 3, 5, 4, 3, 5, 4, 4, 3):

Відповідь:

1) 3;

2) 4; *

3) 5.

16. *Дисперсія вибірки* визначається як:

Відповідь:

1) $s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n-1}$; *

2) $\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}$.

17. Мірою *неоднорідності* вибірки служить показник:

Відповідь:

1) дисперсії; *

2) середнього;

3) математичного сподівання.

18. *Стандартне відхилення вибірки* визначається як:

Відповідь:

1) $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$;

2) $s_x = \sqrt{s_x^2}$; *

3) $s_{\overline{X}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$.

19. Яка вибірка має *більшу неоднорідність*:

вибірка *A* (3,3,4,4,4,5,5) чи вибірка *B* (3,4,4,4,4,5) ?

Відповідь:

1) більш неоднорідна вибірка *A*; *

2) більш неоднорідна вибірка *B*.

20. Яка вибірка має *нульову асиметрію* :

вибірка *A* (3,3,4,4,4,5,5) чи вибірка *B* (3,4,4,4,4,5) ?

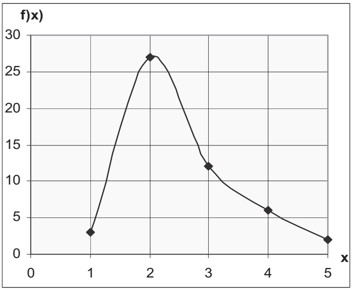
Відповідь:

1) вибірка *A*;

2) вибірка *B*;

3) обидві вибірки *A* і *B*. *

21. Яку *асиметрію* має розподіл за графіком f (x)?



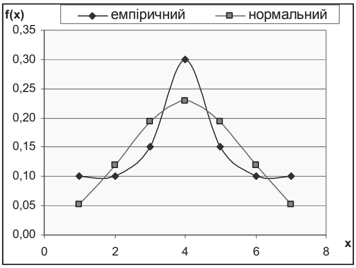
Відповідь:

1) додатну; *

2) від'ємну;

3) нульову.

22. Який *ексцес* у емпіричного розподілу за графіком f (x)?



Відповідь:

1) додатний; *

2) від'ємний;

3) нульовий.

23. Як називається операція над множинами $A \subset B$:

Відповідь:

1) слідування; *

2) приналежність *A* до *B*.

24. Як називається операція над множинами $\overline{B} = \Omega \setminus B$:

Відповідь:

1) протилежність; *

2) еквівалентність.

25. Як називається операція над множинами $A=B$:

Відповідь:

1) приналежність A до B;

2) еквівалентність. *

26. Як називається операція над множинами $A \bigcap B$:

Відповідь:

1) об'єднання;

2) перетин. *

27. Як називається операція над множинами $A \bigcup B$:

Відповідь:

1) об'єднання; *

2) перетин.

28. Ймовірність неможливої події дорівнює:

Відповідь:

1) одиниці;

2) нулю. *

29. Ймовірність достовірної події дорівнює:

Відповідь:

1) одиниці; *

2) нулю.

30. Коли ймовірність події A обчислюється як відносна частота здійснення події A?

Відповідь:

1) якщо результати досліду зводяться до схеми *випадків*; *

2) якщо події несумісні.

31. Кількість «бажаних» події 4, кількість «небажаних» подій 16. Яка ймовірність «бажаної» події?

Відповідь:

1) 0,25;

2) 0,20. *

32. Яка з аксіом Колмогорова указана неправильно?

Відповідь:

1) $P(A) \geq 0$ для будь-якої $A \in \Omega$;

2) $P(\Omega) \leq 1$; *

3) $P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$ для ($A_i \bigcap A_j = \varnothing$, $i \neq j$).

33. Сума ймовірностей *протилежних* подій дорівнює:

Відповідь:

1) одиниці; *

2) нулю.

34. Ймовірність *добутку $A \cdot B$ сумісних* подій A і B дорівнює:

Відповідь:

1) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$; *

2) $P(A \cdot B) = 0$.

35. Ймовірність *добутку $A \cdot B$ несумісних* подій A і B дорівнює:

Відповідь:

1) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$;

2) $P(A \cdot B) = 0$. *

36. Ймовірність *суми $A+B$ сумісних* подій A і B визначається формулою:

Відповідь:

1) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$; *

2) $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

37. Ймовірність *суми $A+B$ несумісних* подій A і B визначається формулою:

Відповідь:

1) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$;

2) $P(A+B)=P(A)+P(B)$. *

38. Для яких подій A і B умовна ймовірність перетворюється на звичайну?

Відповідь:

1) для незалежних подій; *

2) для залежних подій.

39. Яку назву мають події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ у формулі повної ймовірності?

Відповідь:

1) елементарні події;

2) події-гіпотези. *

40. Скільки гіпотез слід висувати у разі використанні формули повної ймовірності $P(A)=\sum_{i=1}^{4} P(A|H_i)\cdot P(H_i)$?

Відповідь:

1) 2 гіпотези;

2) 3 гіпотези;

3) 4 гіпотези. *

41. У формулі Байєса $P(H_i|A)$ – це ймовірність апріорна чи апостеріорна?

Відповідь:

1) апріорна;

2) апостеріорна. *

42. Скільки об'єктів-перестановок можна скласти з 4-х елементів?

Відповідь:

1) 6;

2) 12;

3) 24. *

43. Скільки об'єктів-розміщень можна скласти з двох елементів, вибраних із чотирьох елементів?

Відповідь:

1) 6;

2) 12; *

3) 24.

44. Скільки комбінацій можна скласти з 4-х елементів по 2 елементи?

Відповідь:

1) 6; *

2) 12;

3) 24.

45. Елементи якої випадкової величини можна перенумерувати?

Відповідь:

1) дискретної випадкової величини; *

2) неперервної випадкової величини.

46. Яку назву має сукупність ймовірностей $p_i = P(X = x_\mathrm{i})$?

Відповідь:

1) розподіл змінної X;

2) щільність розподілу змінної X. *

47. Яку назву має сукупність ймовірностей $p_i = P(X \le x_\mathrm{i})$?

Відповідь:

1) розподіл змінної X; *

2) щільність розподілу змінної X.

48. Як задається функція щільності розподілу?

Відповідь:

1) функцією $F(x) = P(X \le x)$;

2) функцією $f(x) = P(X = x)$. *

49. Для якої змінної розподіл і щільність розподілу зв'язані співвідношенням $F(x_j) = \sum_{i=1}^{j} f(x_i)$?

Відповідь:

1) для дискретної змінної; *

2) для неперервної змінної.

50. Яку геометричну інтерпретацію має функція розподілу $F(\mathrm{a}) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$?

Відповідь:

1) сенс площі; *

2) сенс дотичної до $f(x)$ у точці а.

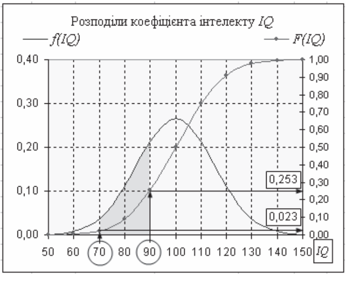
51. Що означає запис: $F(x \le 80) = \int_{-\infty}^{80} f(x)dx = 0{,}091$?

Відповідь:

1) 0,091 – це ймовірність того, що x приймає значення 80;

2) 0,091 – це ймовірність того, що x не перевищить значення 80. *

52. Який висновок щодо ймовірності IQ можна зробити із площі, яка обмежена значенням IQ 70 і 90?



Відповідь:

1) ймовірність $P(70 \le IQ \le 90) = 0{,}253$;

2) ймовірність $P(70 \ge IQ \ge 90) = 0{,}276$;

3) ймовірність $P(70 \le IQ \le 90) = 0{,}230$. *

53. Що означає запис за допомогою процентилів $P_{10} = 20$?

Відповідь:

1) 10% всіх значень X не перевищують 20; *

2) 20% всіх значень X не перевищують 10.

54. В якому виразі присутня помилка?

Відповідь:

1) $M[X - M[X]] = 0$;

2) $M[X - M[X]] = 1$. *

55. Якщо X – випадкова величина, a і b – деякі числа, $Y = aX+b$, то який ви-

раз для дисперсії випадкової величини буде правильним?

Відповідь:

1) $D[aX+b] = aD[\mathrm{X}]+b$;

2) $D[aX+b] = a^2D[\mathrm{X}]$. *

56. Яка теорема закону великих чисел має вираз

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} < x\right) = N(0,1)?$$

Відповідь:

1) теорема Бернуллі;

2) теорема Чебишева;

3) центральна гранична теорема. *

57. Укажіть формулу нормального розподілу:

Відповідь:

1) $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$;

2) $f(x;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$. *

58. Біноміальний і нормальний розподіли щільніше збігаються за умови:

Відповідь:

1) зменшення обсягу вибірки;

2) збільшення обсягу вибірки. *

59. При збільшенні обсягу вибірки розподіли Стьюдента і Фішера …

Відповідь:

1) наближаються до нормального розподілу; *

2) віддаляються від нормального розподілу.

60. *Точкова похибка* для середнього арифметичного визначається як:

Відповідь:

1) $s_x / \sqrt{n}$; *

2) $s_x / \sqrt{2n}$;

61. Величини *середнього* вибірки є:

Відповідь:

1) незміщеними оцінками генерального середнього; *

2) зміщеними оцінками генерального середнього.

62. Величини *дисперсії* вибірки є:

Відповідь:

1) незміщеними оцінками генеральної сукупності;

2) зміщеними оцінками генеральної сукупності. *

63. Якщо *статистична оцінка* при збільшенні обсягу вибірки ($\boldsymbol{n} \to \infty$) наближається до значення параметра генеральної сукупності, то вона є:

Відповідь:

1) спроможною; *

2) ефективною.

64. Величини *стандартного відхилення* вибірки є:

Відповідь:

1) спроможними; *

2) неспроможними.

65. Яка *статистична оцінка* є найбільш ефективною?

Відповідь:

1) мода *Mo*;

2) медіана *Md*;

3) середнє $\overline{\boldsymbol{X}}$. *

66. Яке співвідношення існує між *довірчою ймовірністю* θ і *рівнем значущості* α?

Відповідь:

1) $\theta = 1 - \alpha$; *

2) $\theta = 1 - \alpha^2$;

3) $\theta = 1/\alpha$.

67. Як збільшення обсягу вибірки впливає на довірчий інтервал середнього генеральної сукупності μ?

Відповідь:

1) зменшує довірчий інтервал μ; *

2) збільшує довірчий інтервал μ;.

3) не впливає на розмір довірчого інтервалу μ.

68. Який смисл має параметр t у моделі інтервальної оцінки *середнього генеральної сукупності* $\mu = \overline{X} \mp \frac{t \cdot s_x}{\sqrt{n}}$?

Відповідь:

1) t – це критерій Стьюдента;

2) t – це параметр нормального розподілу. *

69. Як збільшення неоднорідності вибірки впливає на довірчий інтервал середнього генеральної сукупності μ?

Відповідь:

1) зменшує довірчий інтервал μ;

2) збільшує довірчий інтервал μ. *

3) не впливає на розмір довірчого інтервалу μ.

70. Наведені нижче нульова й альтернативна гіпотези

H_0: $\mu_1 \le \mu_2$ (μ_1 не перевищує μ_2);

H_1: $\mu_1 > \mu_2$ (μ_1 перевищує μ_2)

Відповідь:

1) є спрямованими; *

2) є неспрямованими.

71. Якщо *критерії* включають у формулу розрахунку параметри розподілу (середні і дисперсії), то вони є:

Відповідь:

1) параметричними критеріями; *

2) непараметричними критеріями.

72. *Потужність* параметричних критеріїв вища чи нижча потужності непараметричних критеріїв ?

Відповідь:

1) вища; *

2) нижча.

73. Що таке рівень значущості α?

Відповідь:

1) α – це ймовірність того, що ми визнали відмінності випадковими, а вони насправді є істотними;

2) α – це ймовірність того, що ми визнали відмінності істотними, а вони насправді є випадковими. *

74. Помилка відхилення нульової гіпотези, тоді як вона правильна, називається *помилкою:*

Відповідь:

1) 1-го роду; *

2) 2-го роду.

75. Помилка прийняття нульової гіпотези, тоді як вона неправильна, називається *помилкою:*

Відповідь:

1) 1-го роду;

2) 2-го роду. *

76. *Потужністю* критерію називається здатність не припуститися помилки:

Відповідь:

1) 1-го роду;

2) 2-го роду. *

77. Для перевірки *спрямованих* гіпотез використовують:

Відповідь:

1) однобічний критерій; *

2) двобічний критерій.

78. Який *критерій* використовують моделі статистичних висновків відносно різниці середніх сукупностей ($\mu_1 - \mu_2$) для інтервальних даних, які мають нормальний закон розподілу і невідомі дисперсії?

Відповідь:

1) t-критерій Стьюдента; *

2) F-критерій Фішера;

3) χ^2-критерій.

79. Який *критерій* використовують для оцінки рівня дисперсії сукупності σ_x^2?

Відповідь:

1) t-критерій Стьюдента;

2) F-критерій Фішера;

3) χ^2-критерій. *

80. Який з трьох критеріїв нормальності розподілу є найпотужнішим?

Відповідь:

1) критерій асиметрії та ексцесу;

2) критерій Шапіро-Вілка W; *

3) критерій хі-квадрат.

81. Який з критеріїв однорідності вибірок є більш загальним?

Відповідь:

1) критерій Стьюдента t;

2) критерій Крамера-Велча T. *

82. При застосуванні яких критеріїв не потрібно контролювати вимоги рівності дисперсій?

Відповідь:

1) критерій Стьюдента t;

2) критерій Крамера-Велча T. *

83. При зіставленні двох емпіричних розподілів за критерієм Колмогорова-Смірнова необхідно, щоб обсяги вибірок були:

Відповідь:

1) $n_1, n_2 \geq 50$; *

2) $n_1, n_2 \leq 50$.

84. Який з критеріїв однорідності вибірок є більш потужним?

Відповідь:

1) критерій Вілкоксона-Манна-Вітні *U*;

2) критерій Крамера-Велча *T*.

3) критерій Лемана-Розенблатта ω^2. *

85. Критерій згоди χ^2 застосовується для зіставлення:

Відповідь:

1) тільки *емпіричного* розподілу з *теоретичним*; *

2) тільки декількох *емпіричних* розподілів між собою;

3) і *емпіричного* розподілу з *теоретичним,* і декількох *емпіричних* розподілів між собою.

86. λ - *критерій Колмогорова-Смірнова* застосовується для зіставлення:

Відповідь:

1) тільки *емпіричного* розподілу з *теоретичним*;

2) декількох *емпіричних* розподілів між собою;

3) *емпіричного* розподілу з *теоретичним,* або двох *емпіричних* розподілів між собою. *

87 Коефіцієнта взаємної зв'язаності φ Пірсона застосовується, коли кожна з якісних ознак (x і y) оцінюється:

Відповідь:

1) за номінальною шкалою;

2) за номінальною шкалою у двох значеннях; *

3) якщо значення дихотомічні і засновані на нормальних розподілах.

88. Який з критеріїв дозволяє встановити напрям змін ознаки при переході від групи до групи?

Відповідь:

1) критерій Крускала-Волліса *H*;

2) критерій тенденцій Пейджа *L*. *

89. Який з критеріїв застосовується для зіставлення показників, виміряних у трьох або більше умовах на одній і тій же вибірці, і будується на рангових послідовностях?

Відповідь:

1) критерій Крускала-Волліса *H*;

2) критерій Фрідмана χ^2_r. *

90 Який із *коефіцієнтів взаємної зв'язаності* використовується, коли кількість рядків і кількість стовпчиків таблиці спряженості не збігаються?

Відповідь:

1) коефіцієнт Чупрова (*К*); *

2) коефіцієнт Пірсона (*С*).

91. Яке *значення* можуть приймати коефіцієнти взаємної зв'язаності *Чупрова* (*К*) і *Пірсона* (*С*)?

Відповідь:

1) у межах від –1 до +1;

2) у межах від 0 до +1. *

92. Якщо коефіцієнт кореляції має *від'ємне* значення, то це свідчить про:

Відповідь:

1) прямий зв'язок;

2) зворотний зв'язок. *

93. Якщо коефіцієнт кореляції має *нульове* значення, то

Відповідь:

1) це свідчить про відсутність зв'язку;

2) необхідно перевірити лінійність, а потім приймати рішення. *

94. Значущість коефіцієнта кореляції зростає при

Відповідь:

1) зменшені обсягу вибірки;

2) збільшені обсягу вибірки; *

95. Яке значення може приймати коефіцієнт *кореляції* Пірсона?

Відповідь:

1) у межах від –1 до +1; *

2) у межах від 0 до +1.

96. Якщо коефіцієнт кореляції має значення приблизно 0,67, то який висно-

вок слід зродити?

Відповідь:

1) прийняти факт існування прямого кореляційного зв'язку;

2) перевірити значущість коефіцієнта кореляції і після цього формулювати статистичні висновки. *

97. Якщо *X* вимірюється за *дихотомічною* шкалою найменувань, а змінна *Y* – за шкалою *інтервалів* або відносин, то використовується:

Відповідь:

1) точковий бісеріальний коефіцієнт кореляції – r_{pb}; *

2) ранговий бісеріальний коефіцієнт кореляції – r_{rb}.

98. За яким критерієм приймається статистичне рішення в дисперсійному аналізі?

Відповідь:

1) за критерієм Стьюдента t;

2) за критерієм хі-квадрат;

3) за критерієм Фішера F. *

99. Скільки градацій фактора і випробовувань у кожній градації вимагає однофакторний аналіз?

Відповідь:

1) не менше 3-х градацій фактора і не менше 2-х випробовувань у кожній градації; *

2) не менше 3-х градацій фактора і не менше 3-х випробовувань у кожній градації.

100. Які можливості дисперсійного двофакторного аналізу?

Відповідь:

1) дозволяє оцінити лише вплив кожного з факторів;

2) дозволяє оцінити лише взаємодію факторів;

3) дозволяє оцінити вплив кожного з факторів і їхню взаємодію. *

7.3. ПРАКТИЧНІ КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

<u>Завдання № 1</u>: Побудувати диференціальні та інтегральні *незгруповані* розподіли частот за емпіричними даними з використанням функції ЧАСТОТА(), а також пакета «Аналіз даних» MS Excel. Графічне представлення виконати у вигляді гістограми, полігону і лінійного графіка.

2	3	2	2	2	4	2	2	2	2	3	4	2	3	3	2	4	2	2	4
3	3	5	3	3	1	4	3	4	2	2	3	2	2	2	2	3	3	3	2

<u>Завдання № 2</u>: Побудувати диференціальні та інтегральні *згруповані* розподіли частот за даними таблиці. Представити розподіли у *табличній*, *графічній* та *аналітичній* формах.

40	60	64	40	42	48	41	17	42	22	44	53	61	59	37	51	51	23	51	45
63	50	52	53	60	50	61	39	61	51	18	33	18	38	43	57	52	54	64	61

<u>Завдання № 3</u>: За емпіричними даними розрахувати МЦТ і ММ з використанням стандартних функцій MS Excel, а також пакета «Аналіз даних».

5	4	2	2	4	2	2	3	2	2	4	2	3	3	2	3	2	2	4
3	5	2	3	5	4	2	3	4	3	5	2	2	2	2	3	4	3	5

<u>Завдання № 4:</u> У чотирьох групах студентів (чисельністю 22, 21, 20 і 25 осіб) відмінники становлять 6, 5, 3 і 4 студентів відповідно. Яка ймовірність того, що навмання вибраний студент є відмінником?

<u>Завдання № 5:</u> В академічній групі, що прийшли на екзамен, 5 студентів підготовлено відмінно, 7 – добре, 2 – задовільно і 1 – погано. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 25 питань, добре підготовлений – на 20, задовільно – на 15 питань, погано – на 10 питань. Яка ймовірність того, що навмання викликаний групи студент відповість на два заданих питання?

<u>Завдання № 6:</u> В академічній групі 4 студенти підготовлено відмінно, 6 – добре, 3 – задовільно і 2 – погано. Відмінно підготовлений студент може від-

повісти на всі 20 питань, добре підготовлений – на 16, задовільно – на 10 питань, погано – на 5 питань. Викликаний навмання студент відповів на 2 заданих питання. Яка ймовірність того, що цей студент є: а) відмінно підготовлений; б) підготовлений погано?

Завдання № 7: Яка ймовірність скласти навмання слово «СТАТИСТИКА» з десяти окремих карток-літер?

Завдання № 8: Оцінити на рівні значущості 0,01 і 0,05 довірчий інтервал середнього значення емпіричного масиву табличних даних.

2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	3	4	2
3	1	5	3	3	1	4	3	1	2	3	4	3

Завдання № 9: За допомогою критеріїв асиметрії та ексцесу перевірити відповідність розподілу емпіричних вибіркових нормальному законові розподілу ознаки.

2	3	4	3	2	4	2	5	2	4	3	4	2	3	3	5	4	2	2	4
3	3	5	3	3	1	4	3	4	2	2	3	4	2	5	1	3	3	3	2

Завдання № 10: Чи відрізняється на рівні значущості 0,05 середнє вибірки за табличними даними від значення 4,50?

5	3	5	3	3	5	4	2	4	4	5	4	3	4	5
4	2	2	5	5	2	3	5	3	5	3	4	5	2	5

Завдання № 11: Чи відрізняються на рівні значущості 0,05 середні показники двох незв'язаних вибірок X_1 і X_2?

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X_1	3	4	4	5	5	5	5	5	6	6	7	4	4	6	3
X_2	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	4	3	4

Завдання № 12: Виконати статистичне оцінювання дисперсій двох зв'язаних вибірок X_1 і X_2 на рівні значущості 0,05.

X_1					X_2				
3	3	5	3	3	3	3	5	3	3
4	2	2	2	2	4	3	3	3	3
1	4	3	4	2	3	2	3	5	4
2	3	2	2	2	3	3	3	3	3
2	4	2	2	4	3	3	3	3	4

Завдання № 13: Зробити статистичні висновки за критерієм Крамера-Велча на рівні значущості 0,05 щодо однорідності двох вибірок.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
X	1	7	14	3	1	6	7	10	4	9	11	5	3	10	9	12
Y	5	6	10	7	3	4	9	8	1	11	13	2	8	1	2	4

Завдання № 14: На підставі *U*-критерію Вілкоксона-Манна-Вітні оцінити відмінності у показниках на рівні значущості 0,05 за даними таблиці.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
X_1	3	4	3	5	3	4	5	6	4	4	5	3	4
X_2	3	5	6	4	5	6	5	4	5	6			

Завдання № 15: На підставі *H*-критерію Крускала-Волліса оцінити відмінності у показниках на рівні значущості 0,01 за табличними даними.

Вибірки	Показники досліджуваних об'єктів							
X_1	22	32	14	34	23	43	12	
X_2	34	35	23	42	42	39	21	17
X_3	12	31	24	38	35	19		
X_4	23	45	54	34	48			

Завдання № 16: На підставі χ^2-критерію Пірсона та λ-критерію Колмогорова-Смірнова виконати зіставлення двох емпіричних розподілів $f(x_1)$ і $f(x_2)$. Виявити найпотужніший критерій.

Абсолютні розподіли	Значення X (бали)					
	0	1	2	3	4	5
Розподіл $f(x_1)$ (частоти)		6	33	8	3	
Розподіл $f(x_2)$ (частоти)		1	16	24	7	2

Завдання № 17: Розрахувати параметри лінійної регресії $Y = (X)$ за табличними даними. Оцінити адекватність моделі. Зробити висновки.

X	2	8	12	3	1	6	7	10	4	9	11	5	2
Y	6	5	10	7	3	4	9	8	1	11	12	2	6

Завдання № 18: За табличними даними оцінити значення дихотомічного коефіцієнта кореляції Пірсона φ між змінними X і Y.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
X	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
Y	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1

Завдання № 19: За табличними даними оцінити значення коефіцієнтів взаємної зв'язаності Чупрова K і Пірсона C (параметри: X – види спеціалізації студентів інституту фізичного виховання і спорту, Y – методи саморегуляції, що використовують студенти-спортсмени). Зробити висновки.

Спеціалізація (параметр *Y*)	Методи саморегуляції психічних станів (параметр *X*)		
	Аутурелаксація	Аутогенне тренування	Аутогіпноз
Футбол	8	4	6
Гімнастика	12	6	4
Важка атлетика	11	3	1
Плавання	15	6	1

Завдання № 20: За даними таблиці оцінити кореляційний зв'язок змінних X і Y з використанням коефіцієнтів Спірмена r_s.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
X	2	1	7	12	3	4	11	9	10	5	6	15	8	17	13	14	16
Y	17	12	5	2	13	16	1	11	4	15	8	3	6	7	9	10	14

Завдання № 21: Розрахувати коефіцієнт лінійної кореляції Пірсона r_{xy} за наведеними даними. Оцінити його значущість.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
X	2	8	12	3	1	6	7	10	4	9	11	5	3	10	9	12
Y	6	5	10	7	3	4	9	8	1	11	12	2	8	1	2	4

Завдання № 22: Перевірити за критерієм згоди χ^2 гіпотезу про нормальний розподіл емпіричних даних

8	2	8	12	3	1	6	7	10	4	9	11	5	2
9	6	5	10	7	3	4	9	8	1	11	12	2	6

Завдання № 23: За даними таблиці визначити точково-бісеріальний коефіцієнт кореляції між статтю працівників освіти X (1 – для чоловіків, 0 – для жінок) та їхнім заробітком Y (у тис. грн.)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
Y	0,5	1,2	0,8	1,0	2,0	1,1	1,0	2,1	0,8	0,6	1,2	1,2	1,8	2,0	1,1

Завдання № 24: Визначити зв'язок між статтю X (1 – для чоловіків, 0 – для жінок) та активним заняттям спортом студентів 1-го курсу Y (1– регулярно відвідує спортивну секцію, 0 – ні).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
Y	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0

Завдання № 25: За допомогою дисперсійного однофакторного аналізу зробити статистичні висновки на 1% рівні значущості щодо впливу рівня відповідальності на показники успішності виконання завдань 18 учнів.

Відповідальність	Показники успішності виконання завдань (бали)					
Низька	3	1	2	3	3	2
Середня	4	5	3	5	4	3
Висока	6	4	5	6	5	6

Завдання № 26: Зробити статистичні висновки на 5% рівні значущості щодо впливу факторів A і B на значення 16 об'єктів дослідження, які згруповані у 4 вибірки. Застосувати дисперсійний двофакторний аналіз.

Фактор В (рівень)	Фактор А (рівень)	
	А1 (високий)	А2 (низький)
В1 (низький)	8, 5, 4, 6	4, 4, 5, 3
В2 (високий)	5, 4, 5, 3	5, 7, 7, 6

ДОДАТКИ

Таблиця 1

Коефіцієнти $a_{n-i+1} (\times 10^4)$

n	i									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	7071									
4	6872	1677								
5	6646	2413								
6	6431	2806	0875							
7	6233	3031	1401							
8	6052	3164	1743	0561						
9	5888	3244	1976	0947						
10	5739	3291	2141	1224	0399					
11	5601	3315	2260	1429	0695					
12	5475	3325	2347	1586	0922	0303				
13	5359	3325	2412	1707	1099	0539				
14	5251	3318	2460	1802	1240	0727	0240			
15	5150	3306	2495	1878	1353	0880	0433			
16	5056	3290	2521	1939	1447	1005	0593	0196		
17	4968	3237	2540	1988	1524	1109	0725	0359		
18	4886	3253	2553	2027	1587	1197	0837	0496	0173	
19	4808	3232	2561	2059	1641	1271	0932	0612	0303	
20	4734	3211	2565	2085	1686	1334	1013	0711	0422	0140
21	4634	3185	2578	2119	1736	1399	1092	0804	0530	0263

Таблиця 2

Відсоткові точки критерію W(α) Шапіро-Вілка

(α - рівень значущості)

n	α					*n*	α				
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,50		0,01	0,02	0,05	0,10	0,50
3	0,737	0,756	0,767	0,789	0,959	27	0,894	0,906	0,923	0,935	0,965
4	0,687	0,707	0,748	0,792	0,935	28	0,896	0,908	0,924	0,936	0,966
5	0,686	0,715	0,762	0,806	0,927	29	0,898	0,910	0,926	0,937	0,966
6	0,713	0,743	0,788	0,826	0,927	30	0,900	0,912	0,927	0,939	0,967
7	0,730	0,760	0,803	0,838	0,928	31	0,902	0,914	0,929	0,940	0,967
8	0,749	0,778	0,818	0,851	0,932	32	0,904	0,915	0,930	0,941	0,968
9	0,764	0,791	0,829	0,859	0,935	33	0,906	0,917	0,931	0,942	0,968
10	0,781	0,806	0,842	0,869	0,938	34	0,908	0,919	0,933	0,943	0,969
11	0,792	0,817	0,850	0,876	0,940	35	0,910	0,920	0,934	0,944	0,969
12	0,805	0,828	0,859	0,883	0,913	36	0,912	0,922	0,935	0,945	0,970
13	0,814	0,837	0,866	0,889	0,945	37	0,914	0,924	0,936	0,946	0,970
14	0,825	0,846	0,974	0,895	0,947	38	0,916	0,925	0,938	0,947	0,970
15	0,835	0,855	0,881	0,901	0,950	39	0,917	0,927	0,939	0,948	0,971
10	0,844	0,863	0,887	0,906	0,952	40	0,919	0,928	0,940	0,949	0,971
17	0,851	0,869	0,892	0,910	0,954	41	0,920	0,929	0,941	0,950	0,972
18	0,858	0,874	0,897	0,914	0,956	42	0,922	0,930	0,942	0,951	0,972
19	0,863	0,879	0,901	0,917	0,957	43	0,923	0,932	0,943	0,951	0,972
20	0,868	0,884	0,905	0,920	0,959	44	0,924	0,933	0,944	0,952	0,973
21	0,873	0,888	0,908	0,923	0,960	45	0,926	0,934	0,945	0,953	0,973
22	0,878	0,892	0,911	0,926	0,961	46	0,927	0,935	0,945	0,953	0,973
23	0,881	0,895	0,914	0,928	0,962	47	0,928	0,936	0,946	0,954	0,974
24	0,884	0,889	0,916	0,930	0,963	48	0,929	0,937	0,947	0,954	0,974
25	0,888	0,901	0,918	0,931	0,964	49	0,929	0,937	0,947	0,955	0,974
26	0,891	0,904	0,920	0,933	0,965	50	0,930	0,938	0,947	0,955	0,974

Таблиця 3

Критерій λ *Колмогорова-Смірнова* для зіставлення емпіричного розподілу з теоретичним або двох емпіричних розподілів між собою на рівні статистичної значущості α

Обсяг	Рівень значущості α				
n	.20	.15	.10	.05	.01
1	.900	.925	.950	.975	.995
2	.684	.726	.776	.842	.929
3	.565	.597	.642	.708	.828
4	.494	.525	.564	.624	.733
5	.446	.474	.510	.565	.669
6	.410	.436	.470	.521	.618
7	.381	.405	.438	.486	.577
8	.358	.381	.411	.457	.543
9	.339	.360	.388	.432	.514
10	.322	.342	.368	.410	.490
11	.307	.326	.352	.391	.468
12	.295	.313	.338	.375	.450
13	.284	.302	.325	.361	.433
14	.274	.292	.314	.349	.418
15	.266	.283	.304	.338	.404
16	.258	.274	.295	.328	.392
17	.250	.266	.286	.318	.381
18	.244	.259	.278	.309	.371
19	.237	.252	.272	.301	.363
20	.231	.246	.264	.294	.356
25	.210	.220	.240	.270	.320
30	.190	.200	.220	.240	.290
35	.180	.190	.210	.230	.270
> 35	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

Таблиця 4

Критичні значення *U*-критерію *Манна-Вітні*

для рівнів статистичної значущості $p \leq 0{,}05$ і $p \leq 0{,}01$

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_2	*p=0,05*																		
3	-	0																	
4	-	0	1																
5	0	1	2	4															
6	0	2	3	5	7														
7	0	2	4	6	8	11													
8	1	3	5	8	10	13	15												
9	1	4	6	9	12	15	18	21											
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27										
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34									
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42								
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51							
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61						
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72					
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83				
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96			
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109		
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138
	p=0,01																		
5	-		0	1															
6	-	-	1	2	3														
7	-	0	1	3	4	6													
8	-	0	2	4	6	7	9												
9	-	1	3	5	7	9	11	14											
10	-	1	3	6	8	11	13	16	19										
11	-	1	4	7	9	12	15	18	22	25									
12	-	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31								
13	0	2	5	9	17	16	20	23	27	31	35	39							
14	0	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47						
15	0	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56					
16	0	3	7	17	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66				
17	0	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77			
18	0	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88		
19	1	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	
20	1	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114

n_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
n_2	p=0,05																	
21	19	26	34	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113	121	130	138	146	154
22	20	28	36	44	52	60	69	77	85	94	102	111	119	128	136	145	154	162
23	21	29	37	46	55	63	72	81	90	99	107	116	125	134	143	152	161	170
24	22	31	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	131	141	150	160	169	179
25	23	32	41	50	60	69	79	89	98	108	118	128	137	147	157	167	177	187
26	24	33	43	53	62	72	82	93	103	113	123	133	143	154	164	174	185	195
27	25	35	45	55	65	75	86	96	107	118	128	139	150	160	171	182	193	203
28	26	36	47	57	68	79	89	100	111	122	133	144	156	167	178	189	200	212
29	27	38	48	59	70	82	93	104	116	127	139	150	162	173	185	196	208	220
30	28	39	50	62	73	85	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228
31	29	41	52	64	76	88	100	112	124	137	149	161	174	186	199	211	224	236
32	30	42	54	66	78	91	103	116	129	141	154	167	180	193	206	219	232	245
33	31	43	56	68	81	94	107	120	133	146	159	173	186	199	213	226	239	253
34	32	45	58	71	84	97	110	124	137	151	164	178	192	206	219	233	247	261
35	33	46	59	73	86	100	114	128	142	156	170	184	198	212	226	241	255	269
p=0,01																		
21	10	16	22	29	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	113	120	127
22	10	17	23	30	37	45	52	59	66	74	81	89	96	104	111	119	127	134
23	11	18	25	32	39	47	55	62	70	78	86	94	102	109	117	125	133	141
24	12	19	26	34	42	49	57	66	74	82	90	98	107	115	123	132	140	149
25	12	20	27	35	44	52	60	69	77	86	95	103	112	121	130	138	147	156
26	13	21	29	37	46	54	63	72	81	90	99	108	117	126	136	145	154	163
27	14	22	30	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	132	142	151	161	171
28	14	23	32	41	50	59	69	78	88	98	108	118	128	138	148	158	168	178
29	15	24	33	42	52	62	72	82	92	102	112	123	133	143	154	164	175	185
30	15	25	34	44	54	64	75	85	95	106	117	127	138	149	160	171	182	192
31	16	26	36	46	56	67	77	88	99	110	121	132	143	155	166	177	188	200
32	17	27	37	47	58	69	80	91	103	114	126	137	149	160	172	184	195	207
33	17	28	38	49	60	72	83	95	106	118	130	142	154	166	178	190	202	214
34	18	29	40	51	62	74	86	98	110	122	134	147	159	172	184	197	209	222
35	19	30	41	53	64	77	89	101	114	126	139	152	164	177	190	203	216	229

Таблиця 4. Продовження

n_1	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n_2	*p=0,05*																		
21																			
22	171																		
23	180	189																	
24	188	198	207																
25	197	207	217	227															
26	206	216	226	237	247														
27	214	225	236	247	258	268													
28	223	234	245	257	268	279	291												
29	232	243	255	267	278	290	302	314											
30	240	252	265	277	289	301	313	326	338										
31	249	261	274	287	299	312	325	337	350	363									
32	258	271	284	297	310	323	336	349	362	375	389								
33	266	280	293	307	320	334	347	361	374	388	402	415							
34	275	289	303	317	331	345	359	373	387	401	415	429	443						
35	284	298	312	327	341	356	370	385	399	413	428	442	457	471					
p=0,01																			
21																			
22	142																		
23	150	158																	
24	154	166	174																
25	165	174	183	192															
26	173	182	191	201	210														
27	180	190	200	209	219	229													
28	188	198	208	218	229	239	249												
29	196	206	217	227	238	249	259	270											
30	203	214	225	236	247	258	270	281	292										
31	211	223	234	245	257	268	280	291	303	314									
32	219	231	242	254	266	278	290	302	314	326	338								
33	227	239	251	263	276	288	300	313	325	337	350	362							
34	234	247	260	272	285	298	311	323	336	349	362	375	387						
35	242	255	268	281	294	308	321	334	347	360	374	387	400	413					

Таблиця 5

Критичні значення q-статистики *Кохрана* для α=0,05

$v1=n-1$ – кількість ступенів вільності, $v2$ – кількість вибірок.

v2	*v1*						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Таблиця 5. Продовження

v2	*v1*						
	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2013	0,2000
6	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Таблиця 6

Критичні значення *H*-критерію *Крускала-Волліса*

для різних комбінацій обсягів вибірок n_1, n_2, n_3

Обсяги вибірок				
n_1	n_2	n_3	H	p
2	1	1	2,7000	0,500
2	2	1	3,6000	0,200
2	2	2	4,5714	0,067
3	1	1	3,2000	0,300
3	2	1	4,2857	0,100
			3,8571	0,133
3	2	2	5,3572	0,029
			4,7143	0,048
			4,5000	0,067
			4,4643	0,105
3	3	1	5,1429	0,043
			4,5714	0,100
			4,0000	0,129
3	3	2	6,2500	0,011
			5,3611	0,032
			5,1389	0,061
			4,5556	0,100
			4,2500	0,121
3	3	3	7,2000	0,004
			6,4889	0,011
			5,6889	0,029
			5,6000	0,050
			5,0667	0,086
			4,6222	0,100

Обсяги вибірок				
n_1	n_2	n_3	H	p
4	4	1	6,6667	0,010
			6,1667	0,022
			4,9667	0,048
			4,8667	0,054
			4,1667	0,082
			4,0667	0,102
4	4	2	7,0364	0,006
			6,8727	0,011
			5,4545	0,046
			5,2364	0,052
			4,5545	0,098
			4,4455	0,103
4	4	3	7,1439	0,010
			7,1364	0,011
			5,5985	0,049
			5,5758	0,051
			4,5455	0,099
			4,4773	0,102
4	4	4	7,6538	0,008
			7,5385	0,011
			5,6923	0,049
			5,6538	0,054
			4,6539	0,097
			4,5001	0,104

Обсяги вибірок				
n_1	n_2	n_3	H	p
5	4	1	6,9545	0,008
			6,8400	0,011
			4,9855	0,044
			4,8600	0,056
			3,9873	0,098
			3,9600	0,102
5	4	2	7,2045	0,009
			7,1182	0,010
			5,2727	0,049
			5,2682	0,050
			4,5409	0,098
			4,5182	0,101
5	4	3	7,4449	0,010
			7,3949	0,011
			5,6564	0,049
			5,6308	0,050
			4,5487	0,099
			4,5231	0,103
5	4	4	7,7604	0,009'
			7,7440	0,011
			5,6571	0,049
			5,6176	0,050
			4,6187	0,100
			4,5527	0,102

Таблиця 6. Продовження

Обсяги вибірок				
n_1	n_2	n_3	H	p
4	1	1	3,5714	0,200
4	2	1	4,8214	0,057
			4,5000	0,076
			4,0179	0,114
4	2	2	6,0000	0,014
			5,3333	0,033
			5,1250	0,052
			4,4583	0,100
			4,1667	0,105
4	3	1	5,8333	0,021
			5,2083	0,050
			5,0000	0,057
			4,0556	0,093
			3,8889	0,129
4	3	2	6,4444	0,008
			6,3000	0,011
			5,4444	0,046
			5,4000	0,051
			4,5111	0,098
			4,4444	0,102
4	3	3	6,7455	0,010
			6,7091	0,013
			5,7909	0,046
			5,7273	0,050
			4,7091	0,092
			4,7000	0,101

Обсяги вибірок				
n_1	n_2	n_3	H	p
5	1	1	3,8571	0,143
5	2	1	5,2500	0,036
			5,0000	0,048
			4,4500	0,071
			4,2000	0,095
			4,0500	0,119
5	2	2	65333	0,008
			6,1333	0,013
			5,1600	0,034
			5,0400	0,056
			4,3733	0,090
			4,2933	0,122
5	3	1	6,4000	0,012
			4,9600	0,048
			4,8711	0,052
			4,0178	0,095
			3,8400	0,123
5	3	2	6,9091	0,009
			6,8218	0,010
			5,2509	0,049
			5,1055	0,052
			4,6509	0,091
			4,4945	0,101
5	3	3	7,0788	0,009
			6,9818	0,011
			5,6485	0,049
			5,5152	0,051
			4,5333	0,097
			4,4121	0,109

Обсяги вибірок				
n_1	n_2	n_3	H	p
5	5	1	7,3091	0,009
			6,8364	0,011
			5,1273	0,046
			4,9091	0,053
			4,1091	0,086
			4,0364	0,105
5	5	2	7,3385	0,010
			7,2692	0,010
			5,3385	0,047
			5,2462	0,051
			4,6231	0,097
			4,5077	0,100
5	5	3	7,5780	0,010
			7,5429	0,010
			5,7055	0,046
			5,6264	0,051
			4,5451	0,100
			4,5363	0,102
5	5	4	7,8229	0,010
			7,7914	0,010
			5,6657	0,049
			5,6429	0,050
			4,5229	0,099
			4,5200	0,101
5	5	5	8,0000	0,009
			7,9800	0,010
			5,7800	0,049
			5,6600	0,051
			4,5600	0,100
			4,5000	0,102

Таблиця 7

Критичні значення χ^2_r-критерію *Фрідмана*

для кількості умов c=3 і кількості випробовуваних ($2 \leq n \leq 9$)

n=2		n=3		n=4		n=5	
χ^2_r	p	χ^2_r	p	χ^2_r	p	χ^2_r	p
0	1,000	0,000	1,000	0,0	1,000	0,0	1,000
1	0,833	0,667	0,944	0,5	0,931	0,4	0,954
3	0,500	2,000	0,528	1,5	0,653	1.2	0,691
4	0,167	2,667	0,361	2.0	0,431	1.6	0,522
		4,667	0,194	3.5	0,273	2,8	0,367
		6,000	0,028	4,5	0,125	3,6	0,182
				6,0	0,069	4,8	0,124
				6,5	0,042	5,2	0,093
				8,0	0,0046	6.4	0,039
						7,6	0,024
						8,4	0,0085
						10,0	0,00077

Таблиця 7. Продовження

n=6		n=7		n=8		n=9	
χ^2_r	p	χ^2_r	p	χ^2_r	p	χ^2_r	p
0,00	1,000	0,000	1,000	0,00	1,000	0,000	1,000
0,33	0,956	0,286	0,964	0,25	0,967	0,222	0,971
1,00	0,740	0,857	0,768	0,75	0,794	0,667	0,814
1.33	0,570	1,143	0,620	1,00	0,654	0,889	0,865
2,33	0,430	2,000	0,486	1.75	0,531	1,556	0,569
3,00	0,252	2,571	0,305	2,25	0,355	2,000	0,398
4,00	0,184	3.429	0,237	3,00	0,285	2,667	0,328
4,33	0,142	3,714	0,192	3,25	0,236	2,889	0,278
5,33	0,072	4,571	0,112	4,00	0,149	3,556	0,187
6,33	0,052	5,429	0,085	4,75	0,120	4,222	0,154
7,00	0,029	6.000	0,052	5,25	0,079	4,667	0,107
8,33	0,012	7,143	0,027	6,25	0,047	5,556	0,069
9,00	0,0081	7,714	0,021	6,75	0,038	6,000	0,057
9,33	0,0055	8,000	0,016	7,00	0,030	6,222	0,048
10,33	0,0017	8,857	0,0084	7,75	0,018	6,889	0,031
12,00	0,00013	10,286	0,0036	9,00	0,0099	8,000	0,019
		10,571	0,0027	9,25	0,0080	8,222	0,016
		11,143	0,0012	9,75	0,0048	8,667	0,010
		12,286	0,00032	10,75	0,0024	9,556	0,0060
		14.000	0,000021	12,00	0,0011	10,667	0,0035
				12,25	0,00086	10,889	0,0029
				13,00	0,00026	11,556	0,0013
				14,25	0,000061	12,667	0,00066
				16,00	0,0000036	13,556	0,00035
						14,000	0,00020

Таблиця 8

Критичні значення χ^2_r-критерію *Фрідмана*

для кількості умов c=4 і кількості випробовуваних ($2 \leq n \leq 4$)

n=2		n=3		n=4			
χ^2_r	p	χ^2_r	p	χ^2_r	p	χ^2_r	p
0,0	1,000	0,0	1,000	0,0	1,000	5,7	0,141
0,6	0,958	0,6	0,958	0,3	0,992	6,0	0,105
1,2	0,834	1,0	0,910	0,6	0,928	6,3	0,094
1,8	0,792	1,8	0,727	0,9	0,900	6.6	0,077
2,4	0,625	2,2	0,608	1,2	0,800	6,9	0,068
3,0	0,542	2,6	0,524	1,5	0,754	7,2	0,054
3,6	0,458	3,4	0,446	1,8	0,677	7,5	0,052
4,2	0,375	3,8	0,342	2,1	0,649	7,8	0,036
4,8	0,208	4,2	0,300	2,4	0,524	8,1	0,033
5,4	0,167	5,0	0,207	2,7	0,508	8,4	0,019
6,0	0,042	5,4	0,175	3,0	0,432	8,7	0,014
		5,8	0,148	3,3	0,389	9.3	0,012
		6,6	0,075	3,6	0,355	9,6	0,0069
		7.0	0,054	3.9	0,324	9.9	0,0062
		7,4	0,033	4,5	0,242	10,2	0,0027
		8,2	0,017	4,8	0,200	10,8	0,0016
		9,0	0,0017	5,1	0,190	11,1	0,00094
				5,4	0,158	12,0	0,000072

Таблиця 9

Критичні значення *L*-критерію *Пейджа*

для кількості умов $3 \le c \le 6$ і кількості випробовуваних $(2 \le n \le 12)$

n	*c* (кількість умов)				*P*
	3	4	5	6	
2	–	–	109	178	0,001
	–	60	106	173	0,01
	28	58	103	166	0,05
3	–	89	160	260	0,001
	42	87	155	252	0,01
	41	84	150	244	0,05
4	56	117	210	341	0,001
	55	114	204	331	0,01
	54	111	197	321	0,05
5	70	145	259	420	0,001
	68	141	251	409	0,01
	66	137	244	397	0,05
6	83	172	307	499	0,001
	81	167	299	486	0,01
	79	163	291	474	0,05
7	96	198	355	577	0,001
	93	193	346	563	0,01
	91	189	338	550	0,05
8	109	225	403	655	0,001
	106	220	393	640	0,01
	104	214	384	625	0,05
9	121	252	451	733	0,001
	119	246	441	717	0,01
	116	240	431	701	0,05
10	134	278	499	811	0,001
	131	272	487	793	0,01
	128	266	477	777	0,05
11	147	305	546	888	0,001
	144	298	534	869	0,01
	141	292	523	852	0,05
12	160	331	593	965	0,001
	156	324	581	946	0,01
	153	317	570	928	0,05

ЛІТЕРАТУРА

1. *Айвазян С.А. и др.* Прикладная статистика: Основ моделирования и первичная обработка данных. Справочное изд. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.

2. *Анамарин И.П., Васильев Н.Н., Амбросов В.А.* Быстрые методы статистической обработки и планирования экспериментов. – Л.: ЛГУ, 1974.

3. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ / Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1963. – 473 с.

4. *Артемьева Е.Ю., Мартынов Е.В.* Вероятностные методы в психологии. – М.: МГУ, 1975. – 206 с.

5. *Архангельский С.И.* О моделировании и методах обработки данных педагогического эксперимента. – М.: Знание, 1974.

6. *Берк К., Кейри П.* Анализ данных с помощью Microsoft Excel / Пер. с англ. – М.: Вильямс, 2005.

7. *Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г.* Математико-статистические методы экспертных оценок. – М.: Статистика, 1974. – 159 с.

8. *Биркгофф Г.* Математика и психология. – М.: Советское радио, 1977.

9. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1,2. – М.: Мир, 1974.

10. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983.

11. *Боровиков В.П.* STATISTICA: искусство анализа данных на компьютере. Для профессионалов. – СПб.: Питер, 2001.

12. *Брандт* 3. Статистические методы анализа наблюдений / Пер. с англ.– М.: Мир, 1975.

13. *Браунли К.А*. Статистическая теория и методология в науке и технике / Пер. с англ. – М.: Наука, 1977.

14. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1973.

15. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред.

Ю.В.Прохоров. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – 910с.

16. *Гаек Я., Шидак З.* Теория ранговых критериев / Пер. с англ. – М.: Наука, 1971.

17. *Гласс Дж., Стенли Дж.* Статистические методы в педагогике и психологии. – М.: Прогресс, 1976. – 495 с.

18. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей: Учебник. 7-е изд., исправл. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.

19. *Головина Г.М., Крылов В.Ю., Савченко Т.Н.* Математические методы в современной психологии: статус, разработка, применение. – М.: ИП РАН, 1995.

20. *Грабарь М.И. Краснянская К.А.* Применение математической статистики в педагогических исследованиях. – М.: Педагогика, 1972.

21. *Links Е.В.* Вычислительные методы анализа и распознавания патологических последствий. – Л.: Медицина, 1978.

22. *Докторов Б.З.* Факторный анализ в психологическом исследовании человека: Автореферат на соиск. ученой степени канд. психол. наук. – Л., 1970.

23. *Дружинин В.Н.* Экспериментальная психология – СПб: Издательство «Питер», 2000. – 320 с.

24. *Дубров А.М.* Обработка статистических данных методом главных компонент. – М.: Статистика, 1978.

25. *Дуброва Т.А., Архипова М.Ю., Стрелкова П.М.* Кластерный анализ с использованием ППП «SPSS». – М.: МЭСИ, 2001.

26. *Дуброва Т.А., Павлов Д.Э., Осипова Н.П.* Факторный анализ с использованием ППП «STATISTICA». – М.: МЭСИ, 2000.

27. *Жалдак М.І. та ін.* Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології: Навч. посібник / М.І. Жалдак, М.Н. Кузьміна, С.Ю. Берлінська. – К.: Вища школа, 1995. – 351 с.

28. *Закс Л.* Статистическое оценивание. – М.: Статистика, 1976.

29. *Иберла К.* Факторный анализ. – М.: Статистика, 1980. – 398 с.

30. *Ительсон Л.Б.* Математические и кибернетические методы в педагогике. – М.: Просвещение, 1964.

31. *Кендал М.Д.* Ранговые корреляции / Пер. с англ. – М.: Статистика, 1975.

32. *Кендал М.Д., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи / Пер. с англ. – М.: Наука, 1973. – 900 с.

33. *Кендал М.Д., Стьюарт А.* Теория распределений / Пер. с англ. – М.: Наука, 1966.

34. *Кендалл М.Д., Стюарт А.* Многомерный статистический аналий и временные ряды / Пер. с англ. – М.: Наука, 1976. – 736 с.

35. *Ким Дж.О., Мюллер Ч.У.* Факторный, дискриминантный и кластерный анализ. – М.: Финансы и статистика, 1989.

36. *Кимбл Г.А.* Как правильно пользоваться статистикой.– М.: Финансы и статистика, 1982.

37. *Кобзарь А.И*. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

38. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 80 с.

39. *Колмогоров А.Н.* Теория информации и теория алгоритмов. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

40. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.

41. *Кремер Н.Ш*. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.

42. *Кэмпбелл Д.* Модели экспериментов в социальной психологии и прикладных исследованиях. – М.: Прогресс, 1980. – 391 с.

43. *Лакин Г.Ф.* Биометрия.– М.: Высшая школа, 1990.

44. *Леман Э.А.* Проверка статистических гипотез / Пер. с англ. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979.

45. *Логвиненко А. Д.* Измерения в психологии: математические основы. –

М.: МГУ, 1993.

46. *Наследов А.Д.* Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных. – СПб.: Речь, 2006. – 392 с.

47. *Окунь Я.* Факторный анализ. – М.: Статистика, 1974. –200 с.

48. *Опря А.Т.* Статистика (з програмованою формою контролю знань). Математична статистика. Теорія статистики. Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 472 с.

49. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. Учебник. / А.И.Орлов.- М.: Издательство «Экзамен», 2004. – 656 с.

50. *Павлов Ю.В.* Статистическая обработка результатов педагогического эксперимента. – М.: Знание, 1972.

51. *Плохинский Н.А.* Биометрия. – 2-е изд. – М.: МГУ, 1970.

52. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы.) – М.: Наука, 1973. – 496 с.

53. *Пятницын Б.Н.* Философские проблемы вероятностных и статистических методов. – М.: Наука, 1976. – 335 с.

54. *Райфа Г., Шлейфер Р.* Прикладная теория статистических решений. – М.: Статистика, 1977. – 359 с.

55. *Рунион Р.* Справочник по непараметрической статистике. – М.: Финансы и статистика, 1982.

56. *Руденко В.М., Руденко Н.М.* Математичні методи в психології: підручник. – К.: Академвидав, 2009. – 384 с.

57. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. – М.: Мир, 1980. – 456с.

58. *Сидоренко Е.В.* Методы математической обработки в психологии. – СПб.: Речь, 2000. – 350 с.

59. *Стивенс С.* Экспериментальная психология // Математические измерения. – М., 1960.

60. *Суппес Я., Занес Дж.* Основы теории измерений // Психологические измерения. – М.: Мир, 1967. – С. 9-110.

61. *Суходольский Г.В.* Основы математической статистики для психоло-

гов. – Л.: ЛГУ, 1972.

62. *Терехина А.Ю.* Анализ данных методом многомерного шкалирования. – М.: Наука, 1986.

63. *Тутубалин В.Н.* Границы применимости (вероятностно-статистические методы и их возможности). – М.: Знание, 1977. – 63 с.

64. *Тьюки Дж.* Анализ результатов наблюдений. – М.: Мир, 1981.

65. *Тьюки Дж*. Обработка результатов наблюдений. – М.: Мир, 1981.

66. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.* Анализ данных на компьютере. – М.: Финансы и статистика, 1995.

67. Факторный и дискриминантный анализ. – М.: Финансы и статистика, 1989.

68. *Харман Г.* Современный факторный анализ. – М.: Статистика, 1972. – 486 с.

69. *Хейс Д.* Причинный анализ в статистических исследованиях. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 255 с.

70. *Хеннан Э.* Многомерные временные ряды. – М.: Мир, 1974.

71. *Холлендер М., Вулф Д.А.* Непараметрические методы статистики / Пер. с англ.; под ред. Ю.П.Адлера и Ю.Н.Тюрина – М.: Финансы и статистика, 1983.

72. *Холлендер М., Вульф Д.* Непараметрические методы статистики. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 518 с.

73. *Шеффе Г.* Дисперсионный анализ / Пер. с англ. – 2-е изд. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

74. *Яглом И.М.* Математические структуры и математическое моделирование. – М.: Сов. радио, 1980. – 144 с.

75. *Abelson R.P.* Mathematical models in social psychology.– In: Advances in experimental social psychology / Ed. L. Berkowitz. N. Y.: Acad. press, 1967, vol. 3, p. 1-54.

76. *Coombs C.H., Dawes R.M., Tversky A.* Mathematical psychology: An elementary introduction, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1970, 419 p.

77. *Estes W.K.* Toward a statistical theory of learning.– Psychol. Rev., 1950, vol. 57, p. 94-107.

78. *Kerlinger F.N.* Foundations of Behavioral Research. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964, p. IX.

79. *Kruskal J.B., Shepard R.N.* Nonmetric variety of linear factor analysis.– Psychometrika, 1974, vol. 39, 2.

80. *Thorndike R.L., Hagen E.* Measurement and evaluation in psychology and education. N. Y.: L.: Wiley, 1961. 597 p.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Володимир Миколайович РУДЕНКО

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Оригінал-макет підготовлено
ТОВ «Центр учбової літератури»

Керівник видавничих проектів – Сладкевич Б. А.

Підписано до друку 12.07.2011. Формат 60х84 $^{1/16}$
Друк офсетний. Папір офсетний. Гарнітура PetersburgCTT.
Умовн. друк. арк. 17,1.

Видавництво «Центр учбової літератури»
вул. Електриків, 23 м. Київ 04176
тел./факс 044-425-01-34
тел.: 044-425-20-63; 425-04-47; 451-65-95
800-501-68-00 (безкоштовно в межах України)
e-mail: office@uabook.com
сайт: www.cul.com.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2458 від 30.03.2006