Запорізький національний університет
Міністерства освіти і науки України

МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
до виконання лабораторних робіт за курсом «Моделювання систем»

Укладач: Кондрат'єва Н.О.

Запоріжжя
2020

Загальні теоретичні відомості

Моделювання систем та аналіз даних являє собою наукову дисципліну, що вивчає різні явища, абстрагуючись від їхньої конкретної природи і базуючись на формальних взаємозв'язках між різними складовими їх факторами і характеру їх змін під впливом зовнішніх умов. При цьому результати пояснюються лише взаємодією їх компонентів без безпосереднього звертання до природи механізмів, що явище механізмів (будь вони фізичними, біологічними, соціальними або винятково концептуальними).

Об'єктом дослідження теорії систем є не "фізична реальність", не, скажемо, фізичне або соціальне явище, а "система", тобто формальний взаємозв'язок між виділеними, відповідно до мети дослідження, і властивостями об'єкта, що спостерігаються.

Займаючись вивченням фундаментальних понять і аспектів поведінки систем різної фізичної природи, у рамках теорії систем запропонована концептуальна схема вирішення системних задач, в основі якої покладена ієрархічна класифікація систем.

Актуальність використання методології загальних систем обумовлена особливістю сучасного етапу розвитку науки і техніки характеризується безупинним зростанням складності досліджуваних об'єктів і явищ, а також необхідністю прогнозування. Складність прогнозування поведінки складних систем пояснюється, насамперед багатомірністю, різнотипністю властивостей, труднощі формування моделі в зв'язку з істотною нестачею знань про внутрішні функціональні взаємозв'язки [1].

Крім того, для складних явищ, а до цієї категорії відносяться більшість явищ, досліджуваних у соціології, біології, економіці, екології і т.д. - спеціальна мова, що використовується класичними теоріями, якій базуються на таких конкретних математичних структурах, як диференціальні або різницеві рівняння, арифметичні або абстрактні алгебри і т.п., не завжди дозволяє адекватно описати реальну проблему [2]. І або через подібну невідповідність між характером подій і наявних можливостей опису, або через нестачу інформації (обмежений об'єм експериментальних даних) багато складних проблем, можливо сформулювати лише в самих загальних термінах, що мають при цьому не тільки кількісний, але і якісний характер.

Центральним поняттям теорії загальних систем є поняття системи. Одна з перших спроб охарактеризувати поняття **система** була почата в [3], де **система** розглядалася як "комплекс елементів, що знаходяться у взаємодії або у відношеннях один з одним". Формально, система S являє собою упорядковану пару $S=(A,R)$, де A - множини елементів, а R – множина відношень між елементами множини A. З тих пір (дотепер включно) було почато досить багато спроб дати визначені поняття **система,** заснованих як на самих загальних філософських висновках, так і аксіоматично, виходячи з деяких формальних передумов. Перші спроби використання аксіоматичного підходу при визначенні поняття **система** були почaті в [4,5,6]. Його сутність перебуває у виборі аксіом, що визначають **систему** у вигляді формального математичного об'єкта. Передбачалося, що відома **функція переходів**, що встановлює залежність (або в детермінованому, або у ймовірностному змісті) значення **виходу системи** від її входу і стану. Представлення системи в такому виді (принаймні, на концептуальному рівні) є зручною і корисною моделлю при дослідженні технічних систем. Однак його дуже складно використовувати при дослідженні природних систем організаційного типу.

У [2] викладений аксіоматичний підхід до побудови теорії загальних систем, заснований на теоретико-множинному підході, де система визначається у виді n-арного відношення

$$S \subseteq V_1 \times \ldots \times V_n \ ,$$

де V_i - об'єкт системи.

Таким чином, система представляється у виді визначеної форми орієнтації знань і інформації про досліджувані об'єкти.

Виділення системи, що базується на визначених типах відношень R, дозволяє абстрагуватися від типу елементів A, на яких ці відношення визначені і визначити ізоморфні класи систем, а введення ієрархічної організації по рівнях знання про системи дозволяє створити методологію вирішення системних задач, тобто задач, що стосуються відношень у системах.

Назвемо концептуальну схему, у якій типи системних задач визначені разом із методами вирішення задач цих типів, універсальним розв'язувачем системних задач (УРСЗ).

Дана концептуальна схема може бути реалізована в рамках експертної системи, а послідовна розробка бази знань цієї системи і її інтерфейсу із користувачем представляє предмет вивчення.

Прогрес комп'ютерної техніки разом із досягненнями в галузі штучного інтелекту дали нові методологічні можливості, допомогли уточнити і прояснити деякі фундаментальні проблеми, а також уможливити реалізацію ряду функцій людини на комп'ютері. Однак мета вирішення системних задач - не замінити мозок людини машиною, а сімбіотично доповнити його комп'ютером, постаченим пакетом відповідних методологічних засобів.

Вирішення задач у різних контекстах, зв'язаних із традиційними галузями науки можливо з використанням методології вирішення системних задач, що засновуються на допущенні, що з конкретних задач можуть бути виділені і контекстне незалежні задачі.

Ієрархія епістемологічних рівнів систем утворює основу опису і представлення систем. Ієрархічні рівні розрізняються знаннями дослідника про розглядаємий феномен.

Прийнято виділяти дометодологічний рівень дослідження і дослідження в рамках розглянутої методики.

Нульовий (нижній) рівень ієрархії включає три примітивні системи: систему на об'єкті O, конкретну $\dot{I}$ і загальну I примітивні системи. З них дві перші системи відносяться до дометодологічного рівня дослідження, а третя - розглядається як інтерфейс між об'єктом дослідження й універсальним розв'язувачем системних задач. Системи нульового рівня прийнято називати вихідними системами S. Після доповнення вихідної системи S дійсними становищами змінних і параметрів, ми розглядаємо нову систему, визначену на першому епістемологічному рівні і названу системою даних D.

Більш високі епістемологічні рівні містять знання про деякім інваріантні параметрам характеристики відношень розглянутих змінних, за допомогою яких можна генерувати дані при відповідних початкових і граничних умовах.

Системи, у яких стани основних змінних можуть породжуватися по множині параметрів, називаються породжуючими системами F, і утворять другий епістемологічний рівень.

Вирішення проблеми цілого і частини знаходять своє відображення на третьому епістемологічном рівні, коли системи, визначені як породжуючі, називаються підсистемами загальної системи і при цьому можуть мати деякі загальні змінні або взаємодіяти якось інакше. Системи цього рівня називаються структурованими системами.

На четвертому епістемологічному рівні системи складаються із набору систем, визначених на більш низькому рівні, і деякої інваріантної параметрам характеристики, що описує зміни в системах більш низького рівня. Визначені в такий спосіб системи називаються метасистемами.

На п'ятому рівні допускається, що метахаракетристика може змінювати множину параметрів, відповідно до інваріантної параметрам характеристиці більш високого рівня або мета-метахарактеристиці. Такими системи називаються мета-метасистемами або метасистемами другого порядку.

Центральним питанням методології систем є розробка таких парадигм, що для різних класів задач і сучасного стану обчислювальної техніки забезпечили б найкращий компроміс для двох суперечливих критеріїв - якості вирішення і складності процедури вирішення.

Даний методологічний посібник містить короткі теоретичні зведення і завдання для лабораторних робіт, що дозволять побудувати базу знань експертної системи для вирішення системних задач добре визначеного типу.

Настійно рекомендується перед виконанням лабораторних робіт вивчити теоретичний матеріал і самостійно повторити вирішення приведених прикладів.

1. Побудова вихідної системи

Вихідна система представляє нульовий рівень у епістемологичній класифікації систем.

Об'єкт дослідження – це частина миру, що виділяється як єдине ціле протягом відчутного відрізка часу. Об'єкти мають незліченне число властивостей, добір кінцевого числа властивостей об'єкта визначається метою дослідження й обмеженнями на дослідження.

Система об'єкта – це не реальна річ, а абстрагування або відображення деяких властивостей об'єкта.

Для побудови вихідної системи необхідно виділити об'єкт дослідження, мету дослідження, визначити спосіб взаємодії з досліджуваним об'єктом. Спосіб взаємодії з об'єктом визначається через множину змінних v_i, множину потенційних станів V_i, що виділяються для кожної змінної v_i і визначений операційний спосіб опису цих станів у термінах проявів відповідних атрибутів даного об'єкта.

Так вихідна система включає три примітивні системи:
систему об'єкта

$$O = \left(\left\{\left(a_i, A_i\right) \mid i \in N_n\right\}, \left\{\left(b_j, B_j\right) \mid j \in N_m\right\}\right), \quad (1.1)$$

конкретну представляючу систему

$$\dot{I} = \left(\left\{\left(\dot{v}_i, \dot{V}_i\right) \mid i \in N_n\right\}, \left\{\left(\dot{w}_j, \dot{W}_j\right) \mid j \in N_m\right\}\right), \quad (1.2)$$

загальну представляючу систему

$$I = \left(\left\{\left(v_i, V_i\right) \mid i \in N_n\right\}, \left\{\left(w_j, W_j\right) \mid j \in N_m\right\}\right), \quad (1.3)$$

де $N_n = \{1,2,...,n\}$, $N_m = \{1,2,...,m\}$ - множини значень цілих позитивних чисел від 1 до значення індексу n - числа властивостей, m - числа баз, a_i і A_i - властивість і множина її проявів; b_j і B_j - база і множина її елементів; $\dot{v}_i, \dot{V}_i$ і v_i, V_i - відповідно, конкретна і загальна змінна з її множиною станів; $\dot{w}_j, \dot{W}_j$ і w_j, W_j - конкретний параметр з множиною його станів і узагальнений параметр з множиною його станів відповідно.

Для багатьох властивостей a_i та баз b_j множини A_i та B_j із (1.1) визначаються досить добре. Наприклад, якщо базою b_j є група (соціальна група, група продукції визначеного типу та таке інше) то множиною станів B_j може бути індивіди або найменування даної групи.

Типовою базою виявляється час, а множиною станів B_j будуть значення часу в які проводяться спостереження. $\left(B_j = \{1,2,3...,1000\}\right)$

Що стосується властивостей a_i, то, як було вказане раніше, з кожною властивістю зв'язана множина її проявів. Так, наприклад, якщо властивістю a_i є відносна волога, то множина проявів - це значення відносної вологи в діапазоні 0-100%; якщо властивість - це світло світлофору на перехресті, то проявами будуть красний, жовтий та зелений кольори. При одному спостереженні властивість a_i має одну дійсну прояву. Для визначення змін у проявах властивості необхідно проводити множину спостережень.

Будь яку суттєву властивість, що застосовують для визначення різниці у спостереженнях називають базою. Типовими базами являється: час, група, простір, та їх комбінації.

Будь-яку операцію, що вводить конкретну змінну $\dot{v}_i$ як образ властивості a_i називають каналом спостереження. Канал спостереження, за допомогою якого властивість a_i представляється змінною $\dot{v}_i$, реалізується функцією

$$o_i : A_i \to \dot{V}_i . \tag{1.4}$$

Функція o_i гомоморфна відносно математичних властивостей множин A_i і $\dot{V}_i$.

Аналогічна функція

$$\omega_j : B_j \to \dot{W}_i \tag{1.5}$$

задає представлення бази b_j параметром $\dot{w}_j$.

Задана конкретна змінна $\dot{v}_i$ або конкретний параметр $\dot{w}_j$ абстрагується змінною v_i або параметром $\dot{w}_j$ відповідно, тоді і тільки тоді, коли функція

$$e_i^{-1} : \dot{V}_i \to V_i \tag{1.6}$$

для змінної або функція

$$\xi_j^{-1} : \dot{W}_j \to W_j \tag{1.7}$$

для параметра існує й ізоморфна відносно математичних властивостей визначених на $\dot{V}_i$ і $\dot{W}_j$, відповідно. Задана узагальнена змінна v_i, або узагальнений параметр w_j конкретизується змінною $\dot{v}_i$ або параметром $\dot{w}_j$ тоді і тільки тоді, коли функція

$$e_i : V_i \to \dot{V}_i \tag{1.8}$$

для змінної або функція

$$\xi_j : W_j \to \dot{W}_j \tag{1.9}$$

для параметра існує й ізоморфна відносно математичних властивостей визначених на V_i і W_j.

Приклад 1.1. Для ілюстрації введених понять покладемо, що властивістю a_i є вік людини з групи, що має безліч проявів B_j. Нехай елементами A_i будуть номера років у діапазоні від 0 до 100. Ця безліч звичайно і цілком лінійно упорядкована. Для визначення вікових категорій людей досить розглядати прийняті в практику вікові діапазони. Цими діапазонами будемо вважати наступні діапазони: $\{0,...,14\}$, $\{15,...,29\}$, $\{30,...,49\}$, $\{50,...,74\}$, $\{75,...,100\}$ і нехай безліччю станів $\dot{V}_i$ конкретної змінної $\dot{v}_i$, що представляє властивість a_i буде безліч прийнятих найменувань цих діапазонів, тобто $\dot{V}_i$ = {дуже молодий, молодий, середніх років, старий, дуже старий}. Функція o_i - це взаємно однозначна функція $o_i(A_i) \to \dot{V}_i$, яка задає розбивку безлічі A_i, скажемо розбивки A_i/o_i, тоді можна записати, що $A_i/o_i \to \dot{V}_i$ і визначається в такий спосіб:

$\{0,...,14\}$ → дуже молодий

$\{15,...,29\}$ → молодий

$\{30,...,49\}$ → середнього років

$\{50,...,74\}$ → старий

$\{75,...,100\}$ → дуже старий.

Таким чином, змістовне уявлення a_i за допомогою $\dot{v}_i$ вводиться за допомогою функції o_i, що для кожного діапазону будь-якому значенню з цього діапазону привласнює прийняте найменування з безлічі $\dot{V}_i$, наприклад $o_i(7)$ = дуже молодий або $o_i(72)$ = старий. Очевидно, що функція o_i гомоморфна щодо повного упорядкування A_i, тому що для будь-якої пари $\alpha, \beta \in A_i$, якщо $\alpha \leq \beta, o_i(\alpha) \leq o_i(\beta)$. З методологічних розумінь узагальнена перемінна v_i може бути для конкретної змінної $\dot{v}_i$ визначена за допомогою функції , що $e_i^{-1} : \dot{V}_i \to V_i$ абстрагує. Ця функція повинна бути ізоморфною щодо упорядкування на $\dot{V}_i$. Нехай необхідно, щоб безліч V_i представляла набір значень цілих чисел. Тоді e_i^{-1} можна задати наступним рівнянням:

$$e_i^{-1}(\dot{V}_k) = k(k = 0,1,...,4).$$

Отже, безліч V_i може бути подане як $V_i = \{0,1,2,3,4\}$.

Нехай базою в цьому прикладі є безліч людей, що населяють країну, що є об'єктом дослідження. Дана безліч не має ніякі математичні властивості. Таким чином, $\omega_j : B_j \to \dot{W}_j$ може бути будь-якою взаємооднозначною функцією, що кожній людині складе у відповідність унікальний ідентифікатор, наприклад, ідентифікація номерів. Методологічно зручно абстрагування $\xi_j^{-1} : \dot{W}_j \to W_j$ представити у вигляді взаємно однозначної функції, що ставить у відповідність значенням ідентифікаційних номерів громадян, цілі числа і j безлічі N_m, де m - число людей у групі , що спостерігається.

Крім чітких каналів спостереження o_i, v_i, часто застосовують нечіткі канали $\widetilde{o}_i$ та $\widetilde{\omega}_j$, які визначаються за допомогою рівнянь:

$$\widetilde{o}_i : A_i \times \frac{A_i}{o_i} \to [0,1] \text{ або } \widetilde{o}_i : A_i \times \dot{V}_i \to [0,1] \text{ та } \omega_j : B_j \times \dot{W}_j \to [0,1].$$

Системи, у яких змінні розділені на вхідні і вихідні, називаються спрямованими, в противному випадку нейтральними. Оголошення вхідних і вихідних змінних робиться за допомогою функції

$$u : N_n \to \{0,1\}, \tag{1.10}$$

такій, що якщо $u(i)=0$, або $u(i)=1$, то це означає, що змінна v_i є відповідно вхідною, або вихідною. Визначник входу-виходу

$$u = (u(1), u(2), \ldots, u(n)) \tag{1.11}$$

задає статус для всіх змінних системи.

Відношення між трьома примітивними системами $O, \dot{I}$ і I задаються за допомогою повного каналу спостереження Q:

$$Q = \left(\{(A_i, V_i, O_i) \mid i \in N_n\}, \{(B_j, \dot{W}_j, \omega_j) \mid j \in N_m\}\right) \tag{1.12}$$

і повного каналу конкретизації - абстрагування

$$\varepsilon = \left(\left\{ \left(\dot{V}_i, V_i, e_i \right) \mid i \in N_n \right\}, \left\{ \left(\dot{W}_j, W_j, \xi_j \right) \mid j \in N_m \right\} \right). \qquad (1.13)$$

Різноманітність загальних систем може бути адекватно охоплена кінцевим числом типів загальних систем, кожний із який характеризується визначеними епістемологічним рівнем і набором відповідних і існуючих методологічних відзнак.

На нульовому рівні методологічні відзнаки стосуються змінних і параметрів (як конкретних, так і загальних) і визначаються в термінах математичних властивостей множин станів $\dot{V}_i, V_i$ і параметричних множин $\dot{W}_j, W_j$, а також вихідних систем у цілому і визначаються як

$$S_{MO} = 6 \times \sum_{i=1}^{k} \binom{9}{i} \times \sum_{j=1}^{m} \binom{9}{j},$$

де $k = min(9,n)$, $m \le 9$ - число параметрів.

Таким чином, вихідна система може бути подана п'ятіркою

$$S = \left(O, \dot{I}, I, Q, \varepsilon \right).$$

Варіанти завдань до лабораторної роботи № 1
"Побудова вихідної системи"

1. Побудувати вихідну систему, якщо об'єктом дослідження є:

1.1. Транспортна система.
1.2. Екологічна система.
1.3. Економічна система.
1.4. Вищий навчальний заклад.
1.5. Середня школа.
1.6. Система виховання молоді.
1.7. Група службовців, що працюють в одній організації.
1.8. Здоров'я людини.
1.9. Легкова автомашина.
1.10. Аеропорт.
1.11. Система безпеки руху.
1.12. Заповідне господарство.
1.13. Природна водойма.
1.14. Рівень життя населення однієї країни.
1.15. Підприємство харчової промисловості.
1.16. Криміногенна обстановка в районі.
1.17. Промислове підприємство.
1.18. Флора.
1.19. Фауна.
1.20. Обчислювальний комплекс.
1.21. Система зв'язку.
1.22. Система торгівлі.
1.23. Система охорони здоров'я.
1.24. Студент університету.
1.25. Музичний твір.

2. Визначити загальне число методологічних відзнак для вихідних систем, що містять

2.1. 2 змінні й 1 параметр
2.2. 2 змінні і 2 параметри
2.3. 5 змінних і 1 параметр
2.4. 4 змінних і 2 параметри
2.5. 4 змінні і 3 параметри
2.6. 3 змінні і 2 параметри
2.7. 3 змінні і 4 параметри
2.8. 4 змінні і 5 параметрів
2.9. 2 змінні і 3 параметри
2.10. 2 змінні і 4 параметри
2.11. 2 змінні і 5 параметрів
2.12. 3 змінні і 5 параметрів
2.13. 3 змінні і 6 параметрів
2.14. 7 змінних і 1 параметр
2.15. 7 змінних і 2 параметри
2.16. 6 змінних і 1 параметр
2.17. 6 змінних і 2 параметри
2.18. 8 змінних і 1 параметр
2.19. 8 змінних і 2 параметри
2.20. 9 змінних і 2 параметри
2.21. 9 змінних і 3 параметри
2.22. 9 змінних і 4 параметри
2.23. 8 змінних і 4 параметри
2.24. 7 змінних і 3 параметри
2.25. 7 змінних і 5 параметрів

за умови, що а) розглядаються дискретні і неперервні змінні і параметри, б) розглядаються тільки дискретні змінні і параметри.

II. Формування першого епістемологічного рівня - системи даних

При формалізації поняття даних використовується узагальнена представляюча система I, що представляється рівнянням (1.3).

Нехай $\mathbb{W} = W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_m$,

$\mathbb{V} = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$.

Тоді чіткі дані (тобто дані, отримані в результаті використання чітких каналів спостереження o_i і w_j) представляються функцією

$$d : \mathbb{W} \to \mathbb{V} \ . \qquad (2.1)$$

Таким чином, функція d подає інформацію про дійсні значення змінних $\mathbb{V}$ при необмеженій параметричній множині $\mathbb{W}$.

Система

$$D = (\mathbf{I}, d) \qquad (2.2)$$

розглядається як система першого рівня епістемологічної класифікації систем і називається системою даних.

Система даних з семантикою представляється як

$$^{S}D = (S, d). \qquad (2.3)$$

У залежності від типу узагальненої системи I, системи даних D можуть бути нейтральними (2.2) або спрямованими

$$\hat{D} = (\hat{I}, d). \qquad (2.4)$$

Спрямована система даних з семантикою може бути представлена аналогічно

$$^{S}\hat{D} = (\hat{S}, d). \qquad (2.5)$$

Якщо змінні визначаються через нечіткі канали спостереження, тоді дані представляються функцією

$$\tilde{d} : \mathbb{W} \to \tilde{\mathbb{V}} \qquad (2.6)$$

і називаються нечіткими даними,

де $\widetilde{\mathbf{V}} = \{V_1 \to [0,1]\} \times \{V_2 \to [0,1]\} \times \ldots \times \{V_n \to [0,1]\}$.

Стандартною формою представлення чітких даних (2.1) є матриця

$$d = \lfloor v_{i,w} \rfloor \,, \tag{2.7}$$

а нечітких даних (2.6) – тривимірний масив

$$\widetilde{d} = \lfloor \widetilde{d}_{i,j_i,w} \rfloor \text{, при } i \in N_n,\, j_i \in V_i, w \in W, d_{ijw} \in D. \tag{2.8}$$

Приклад 2.1. Нехай необхідно описати потрібну послідовність сигналів світлофорів на перехресті. Конкретні змінні $\dot{V}_i$, що описують сигнали світлофорів для транспортних потоків, що йдуть у напрямках північ-південь, південь-північ, захід-схід, схід-захід, позначимо відповідно ПнПд, ПдПн, ЗС і СЗ.

Кожна з цих перемінних має три стани: червоний, жовтий, зелений, позначені як Ч, Ж, З відповідно. Крім сигналів світлофорів на перехрестях для регулювання руху використовуються стрілки, що загоряються, для вказівки можливих поворотів. Тоді стрілка лівого повороту для транспорту, що йде у напрямку північ-схід, позначимо ПнС, а стрілка правого повороту південь-схід ПдС. Ці конкретні перемінні $\dot{V}_i$ мають два стани: стрілка або горить, або ні (позначимо Г і Н). Таким чином, для опису системи виділені $\dot{v}_i\,(i = 1,2,\ldots,6)$ з можливими станами.

Базою в даному досліджені є час. Тимчасова безліч $\dot{T} = \dot{W}$ перебуває із шести інтервалів $t_1, t_2, \ldots, t_6$, що представляє наступна розбивка інтервалу часу від 0 до 90 із, що накладається каналом спостереження w

$$0 \le w^{-1}(t_1) < 15, \qquad 50 \le w^{-1}(t_4) < 60,$$

$$15 \le w^{-1}(t_2) < 25, \qquad 60 \le w^{-1}(t_5) < 80,$$

$$25 \le w^{-1}(t_3) < 50, \qquad 80 \le w^{-1}(t_6) < 90.$$

Реальні ситуації на перехресті для кожного із шести тимчасових інтервалів $t_1, t_2, ..., t_6$ схематично зображені на рис. 2.1. Оскільки система даних представляє реальні (спостерігаючи) дані про досліджуваний об'єкт, то матриця даних формується на основі зазначених схем. Система даних із семантикою $^S D$ (2.3) подана на рис. 2.2. Матриця даних для узагальнених змінних $\dot{v}_i (i = 1,2,...,6)$ тривіальна: оскільки безлічі станів ніякими математичними властивостями не володіють, відбиток на безліч цілих чисел може бути довільним. Система даних без семантики D (2.2) подана на рис. 2.3.

Рис.2.1

t	**1-й період**						**1-й період**						
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	**…**
ПнПд	з	з	з	ж	ч	ч	з	з	з	ж	ч	ч	…
ПдС	с	н	н	н	н	н	с	н	н	н	н	н	…
ПдПн	ч	ч	з	ж	ч	ч	ч	ч	з	ж	ч	ч	…
ПдС	с	с	с	н	н	н	с	с	с	н	н	н	…
ЗС-СЗ	ч	ч	ч	ч	з	ж	ч	ч	ч	ч	з	ж	…

Рис.2.2

Завдання до лабораторної роботи №2

"Побудова системи даних"

1. Створити систему даних для вихідних систем, визначених у першій лабораторній роботі, за умови, що дані чіткі.
2. Створити систему даних для вихідних систем, визначених у першій лабораторній роботі, за умови, що дані нечіткі.

3. Формування другого епістемологічного рівня - породжуючої системи

Будь-яке емпіричне дослідження включає наступні етапи:

- визначення вихідної системи S;
- збір даних (формування системи даних D);
- обробка даних (визначення параметрично інваріантних властивостей);
- інтепретація результатів.

На етапі обробки даних вирішуються задачі:

- виводу з заданих даних параметрично інваріантних властивостей усіх типів;
- порівняння виділених властивостей і виключення систем, властивості яких не задовольняють користувача;
- спрощення систем різних типів відповідно до критеріїв вказаних користувачем або по умовчанню.

Указані три задачі вирішуються на другому епістемологічному рівні. На цьому рівні параметрично інваріантні властивості являють собою безпосередній опис загального обмеження, зв'язаного з використовуваними змінними. Системи, що містять подібні описи, називаються породжуючими. Породжуючі системи визначаються і розглядаються на мові узагальнених представляючих систем I, тобто без семантики.

3.1. Системи з поведінкою

Другий рівень епістемологічної класифікації містить знання про деякі інваріантні параметрам w_j характеристики відношень розглянутих змінних v_i, за допомогою яких можливо генерування даних при відповідних початкових і граничних умовах. Дані, що генеруються, можуть бути детермінованими або стохастичними, чіткими або нечіткими.

На основі властивостей параметричної множини W визначається параметрично інваріантне обмеження стану змінних V. На неупорядкованій параметричній множині W стани змінних V можуть обмежувати тільки один одного, у той час як на упорядкованій параметричній множині W стани змінних V обмежуються ще і станами обраного сусідства.

Сусідство називається маскою M і визначається через змінні V, параметричну множину W і набір правил зрушення на R на параметричній множині.

Правило зрушення r_j - це однозначна функція

$$r_j : W \to W. \tag{3.1}$$

Будь-яке правило зрушення на упорядкованій параметричній множині може бути задано рівнянням

$$r_j(w) = w + \rho, \tag{3.2}$$

де ρ - ціла константа (позитивна, негативна або нульова). При $\rho = 0$ r_j - тотожне правило зрушення. Сусідство на параметричній множині W визначається маскою M

$$M \subseteq V \times R, \tag{3.3}$$

де R - множина правил зрушення, що розглядається на W.

Множина змінних $S = \{s_1, s_2, ..., s_k\}, k \in N_{|M|}$, визначених через маску M називається вибірковими змінними і задається рівняннями

$$s_{k,w} = v_{i,r_j(w)} \tag{3.4}$$

для $v_i \in V$ і $r_j \in R$.

Для цілком упорядкованої параметричної множини W вибіркові змінні можна задати за допомогою рівнянь

$$s_{k,w} = v_{i,w+\rho} \ . \tag{3.5}$$

Для введення ідентифікаторів k вибіркових змінних s_k застосовується однозначна функція

$$\lambda : M \to N_{|M|} \ . \tag{3.6}$$

Повна множина станів вибіркових змінних визначається як

$$C = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_{|M|} \ .$$

Відношення на C визначається функцією поведінки f_B для детермінованих систем

$$f_B : C \to \{0,1\}, \tag{3.7}$$

де $f_B(c) = 1$, якщо c входить у перелік і $f_B(c) = 0$, в протилежному випадку.

Таким чином, функція f_B - це типова функція вибору і є параметрично інваріантною, тому що визначає стани, що реально зустрічаються у системі даних D, але не визначає значення параметра, при якому вони мають місце.

Область визначення f_B однакова для всіх типів функцій поведінки і визначається через маску, що у свою чергу визначається через змінні і параметри представляючої системи I. Тоді систему на другому епістемологічному рівні з визначеною функцією f_B будемо називати системою з поведінкою, яка може бути подана трійкою

$$F_B = \left(I, M, f_B\right) \ . \tag{3.8}$$

Для недетермінованих систем $f_B : C \to [0,1]$. Введенні поняття проілюструємо на прикладі.

Приклад 3.1. Нехай побудована система даних D (2.1) із сформованою матрицею даних d (2.5). Повна параметрична множина W не має математичні властивості, тоді можна застосувати лише одну осмислену маску M (3.3) із правилом зрушення r_j (3.2) при $\rho = 0$. Дана маска M, накладена на матрицю даних d, подана на рис. 3.1 (а,б).

i	$\rho = 0$	
$i = 1$	1	k
2	2	
3	3	
4	4	
5	5	
6	6	

Маска M

а)

$W =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
V_1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	
V_2	1	2	2	2	1	1	0	0	1	2	
V_3	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	
V_4	1	0	0	1	1	1	0	1	2	0	
V_5	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	
V_6	1	0	0	1	1	2	1	0	1	1	

Матриця даних d

Маска M

б)

Рис. 3.1. Використання маски для неупорядкованих параметричних множин

$$
\begin{array}{ccccc|c|}
\cline{6-6}
S_{1,4} & = & V_{1,4} & = & & 1 \\
S_{2,4} & = & V_{2,4} & = & & 2 \\
S_{3,4} & = & V_{3,4} & = & & 1 \\
S_{4,4} & = & V_{4,4} & = & & 1 \\
S_{5,4} & = & V_{5,4} & = & & 0 \\
S_{6,4} & = & V_{6,4} & = & & 1 \\
\cline{6-6}
\end{array}
$$

повний стан для M при $W = 4$

Функція поведінки для фраґменту матриці даних d, що зображена на рис. 3.1 (б) має вигляд

$$f_B(011111)=1 \qquad f_B(011101)=1$$

$$f_B(021000)=1 \qquad f_B(111112)=1$$

$$f_B(120000)=1 \qquad f_B(100011)=1$$

$$f_B(121101)=1 \qquad f_B(100110)=1$$

$$f_B(011201)=1$$

$$f_B(021011)=1.$$

Оскільки можливі стани змінних $V_i=\{0,1,2\}$, $i=1,2,...,6$, то $f_B(000000)=0$; $f_B(111111)=0$; $f_B(222222)=0$; $f_B(200000)=0$, …

Приклад 3.2. Побудова системи з поведінкою F_B для даних, що представлені матрицею даних d, зображеною на рис. 3.1 (б), але параметрична множина W є цілком упорядкованою. Зазначимо цілком упорядковану параметричну множину T, а її елементи t $(t \in T)$. При цьому рівняння (3.5) зміниться:

$$s_{k,t}=v_{i,t+\rho}.$$

Маска M може

бути зображеною у вигляді вирізки із матриці $M=V\times R$, як показано на рис. 3.2.

$\rho=$	-2	-1	0	1
$i=1$		1	2	
2			3	4
3	5	6	7	
4			8	9

а)

$t =$	1	2	3	4	5	$\boxed{6}$	7	…
V_1	0	0	0	1	2	1	0	
V_2	1	1	0	1	2	3	2	
V_3	2	1	1	2	0	0	1	
V_4	1	2	1	0	0	1	0	

Матриця даних d

б)

Рис. 3.2. Зображення маски M (а) і повного стану вибіркових змінних відповідно з матрицею даних d (б)

Повний стан вибіркових змінних для $t = 6$ представляється таким чином:

$$
\begin{array}{lllll|c|}
\cline{6-6}
S_{1,6} & = & V_{1,5} & = & & 2 \\
S_{2,6} & = & V_{1,6} & = & & 1 \\
S_{3,6} & = & V_{2,6} & = & & 3 \\
S_{4,6} & = & V_{2,7} & = & & 2 \\
S_{5,6} & = & V_{3,4} & = & & 2 \\
S_{6,6} & = & V_{3,5} & = & & 0 \\
S_{7,6} & = & V_{3,6} & = & & 0 \\
S_{8,6} & = & V_{4,6} & = & & 1 \\
S_{9,6} & = & V_{4,7} & = & & 0 \\
\cline{6-6}
\end{array}
$$

повний стан для M при $t = 6$

Функція поведінки f_B для матриці даних d (рис. 3.2. (б)) визначається як

$f_B(000121110) = 1$

$f_B(011211200) = 1$

$f_B(122312001) = 1$

$f_B(213220010) = 1$

…………………

$f_B(101010101) = 0$

$f_B(011111000) = 0$

…………………

Таким чином, система з поведінкою F_B для детермінованих даних побудована.

3.2. Породжуюча система з поведінкою

Для породження даних необхідно розбивка множини вибіркових змінних S_k на дві підмножини: породжуємих і породжуючих змінних, що визначаються через маску М:

$$M_G = \left(M, M_g, M_{\bar{g}}\right), \tag{3.9}$$

де $M_g, M_{\bar{g}} \in M,\ M_g \cup M_{\bar{g}} = M,\ M_g \cap M_{\bar{g}} = \varnothing,\ M_G$ - називають маскою породження.

Для цілком упорядкованої параметричної множини маска може бути зображена у вигляді вирізки з матриці (рис. 3.2 (а)).

Множина ідентифікаторів k вибіркових змінних розбивається на дві підмножини K_g і $K_{\bar{g}}$. Таким чином функція λ (3.6) може бути замінена функціями $\lambda_g : M_g \to K_g$; $\lambda_{\bar{g}} : M_{\bar{g}} \to K_{\bar{g}}$.

Множини станів породжуваних G і породжуючих $\overline{G}$ змінних задаються як:

$$G = \underset{k \in K_g}{\times} S_k\ , \tag{3.10}$$

$$\overline{G} = \underset{k \in K_{\bar{g}}}{\times} S_k\ , \tag{3.11}$$

де K_g і $K_{\bar{g}}$ ідентифікатори породжуваних і породжуючих змінних відповідно.

Функція поведінки, що породжує, виражається функцією

$$f_{GB} : \overline{G} \times G \to \{0,1\}, \tag{3.12}$$

де $f_{GB}\left(\bar{g}, g\right) = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$

Для детермінованих систем

$$f_{GB} : \overline{G} \to G. \qquad (3.13)$$

Породжуюча система з поведінкою визначається трійкою

$$F_{GB} = \left(I, M_G, f_{GB}\right). \qquad (3.14)$$

Таким чином, використання породжуючої системи із поведінкою для породження даних включає два етапи:

1) для деякого значення часу $t \in T$ задано стан $\overline{g} \in \overline{G}$, розглянутий як початкова умова; для визначення стану $g \in G$ при цьому ж значенні використовується функція f_{GB};

2) значення часу t заміняється на нове і повторюється перший етап.

Для недетермінованих систем маємо

$$f_{GB} : \overline{G} \times G \to [0,1].$$

Приклад 3.3. Породжуюча система з поведінкою визначається рівнянням (3.14). Нехай дана система має упорядковану параметричну множину $T = N_{100}$, множини змінних V_i, $i = 1,2,...,4$, стани яких визначені у системі I. Дані можуть бути породжені як в порядку зростання параметру T, так і в порядку спадання. В першому випадку змінні, що породжуються, це змінні, що відповідають правому краю маски M_G, а в другому - відповідають лівому краю маски.

Нехай маска M має вид, що представляється на рис. 3.2. (а). Відповідно до розбивки множини ідентифікаторів k вибіркових змінних S_k за допомогою кодуючих функцій λ_g і $\lambda_{\overline{g}}$, поданих на рис. 3.3., визначаються множини породжуваних G і породжуючих змінних $\overline{G}$.

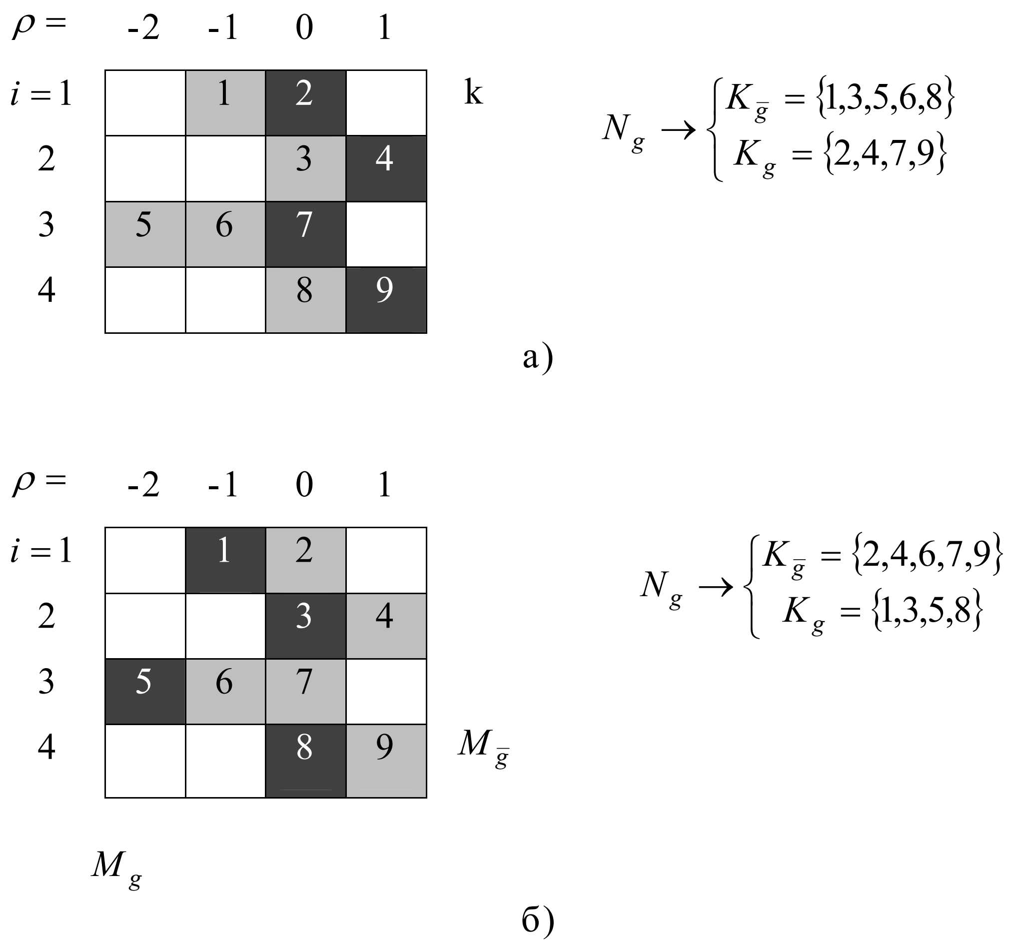

Рис. 3.3. Розбивка маски нейтральної представляючей системи для породження даних у порядку зростання й спадання значень параметричної множини

Накладуючи маску M_G на матрицю даних d, подану на рис. 3.2 (б), одержуємо породжуючу функцію поведінки f_{GB}:

$f_{GB}(000121110) = 1$

$f_{GB}(011211200) = 1$

……………………

$f_{GB}(010121110) = 0$

$f_{GB}(001121110) = 0$

Лабораторна робота № 3

Формування системи з поведінкою та породжуючої системи з поведінкою

Завдання 1. Для отриманої в лабораторній роботі № 2 системи даних D з матрицею даних d побудувати систему із поведінкою F_B за умови, що дані чіткі та параметрична множина

а) цілком неупорядкована;

б) упорядкована.

Використовувати маски M з правилом зрушення $r_j \in R$ при $\rho = 0$; $\rho = (0,1)$; $\rho = (-1,0,1)$.

Завдання 2. Визначити породжуючу систему із поведінкою F_{GB}, використовуючи маску M_G з параметрами:

а) $\rho = (0,1)$;

б) $\rho = (0,-1,1)$.

3.3. Формування спрямованої системи з поведінкою

Для систем, оголошених на нульовому рівні або вищому рівні епістемологічної ієрархії, як направлені, опис на другому рівні включає розбивка множини вибіркових змінних S_k, уведених через маску M, на дві підмножини:

- вхідні змінні $(\{v_i \mid i \in N_n, u(i) = 0\})$;
- інші вибіркові змінні S_k, визначені через маску M.

Дані підмножини вибіркових змінних визначаються розбивкою маски M на дві підмаски M_e, що визначає вхідні вибіркові змінні і $M_{\bar{e}}$ - інші. Маска спрямованої системи з поведінкою $\widehat{M}$ визначається трійкою

$$\widehat{M} = (M, M_e, M_{\bar{e}}) \ , \tag{3.14}$$

при M_e, $M_{\bar{e}} \subset M$, $M_e \cup M_{\bar{e}} = M$, $M_e \cap M_{\bar{e}} = \varnothing$.

Множина ідентифікаторів $N_{|M|}$ вибіркових змінних також на підмножини K_e і $K_{\bar{e}}$. Координуючі функції будуть мати вигляд:

$$\lambda_e : M_e \to K_e \ , \ \lambda_{\bar{e}} : M_{\bar{e}} \to K_{\bar{e}} \tag{3.15}$$

і визначити дві множині станів:

$$E = \underset{k \in K_e}{x} S_k \ , \ \overline{E} = \underset{k \in K_{\bar{e}}}{x} S_k \, , \tag{3.16}$$

через який визначається функція поведінки спрямованих систем

$$\widehat{f}_B : E \times \overline{E} \to [0,1] \ , \tag{3.17}$$

де $f_B(\bar{e}/e)$ - умовна ймовірність або умовна можливість.

Тепер можна визначити спрямовану систему з поведінкою

$$F_B = (\widehat{I}, \widehat{M}, \widehat{f}_B) \ . \tag{3.18}$$

Приклад 3.4. Розбивка маски M на підмаски M_e й $M_{\bar{e}}$ і відповідна розбивка ідентифікаторів вибіркових змінних S_k при оголошеному визначнику входу-виходу, який має вигляд $U=(0,0,1,1)$ подана на рис. 3.4.

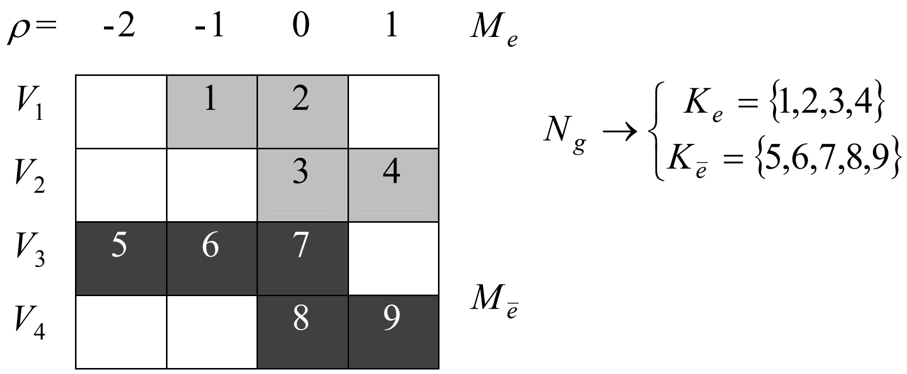

Рис. 3.4. Розбивка маски для спрямованої представляючої системи

3.4. Породжуюча система з поведінкою для спрямованих систем

Для здійснення породження даних спрямованої системи необхідне введення функції поведінки , що породжує. Дана функція може бути введена за допомогою розбивки $M_{\bar{e}}$ на дві підмножини M_g і $M_{\bar{g}}$. Процес розбивки множини $M_{\bar{e}}$ аналогічний описаній вище. У такий спосіб породжуюча маска $\widehat{M}_G$ для спрямованих систем задається четвіркою

$$\widehat{M}_G = \left(M, M_e; M_g, M_{\bar{g}}\right), \tag{3.19}$$

де $\{M_e, M_g, M_{\bar{g}}\}$ - це розбивка M, M_g - породжуюча змінна, $M_{\bar{g}}$ - породжувана змінна.

Множини G і $\overline{G}$ визначаються відповідним чином

$$G = \underset{k\in K_g}{x} S_k \ , \ \overline{G} = \underset{k\in K_{\bar{g}}}{x} S_k , \tag{3.20}$$

де K_g, $K_{\bar{g}}$ - ідентифікатори, уведені за допомогою кодуємих функцій

$$\lambda_g : M_g \to K_g;\ \lambda_{\bar{g}} : M_{\bar{g}} \to K_{\bar{g}}. \tag{3.21}$$

Породжуюча функція поведінки для спрямованих систем визначається як

$$\hat{f}_{GB} : E \times \overline{G} \times G \to [0,1]\ , \tag{3.22}$$

для детермінованих систем

$$\hat{f}_{GB} : E \times \overline{G} \to G, \tag{3.23}$$

де $\hat{f}_{GB}(g/e, \bar{g})$ - умовна ймовірність або можливість.

Породжуюча система із поведінкою для спрямованих систем визначається трійкою

$$\hat{F}_{GB} = \left(\hat{I}, \hat{M}_G, \hat{f}_{GB}\right). \tag{3.24}$$

Приклад 3.5. Формування породжуючої маски для спрямованих систем $\hat{M}_G$ шляхом розбивки маски M на три підмаски M_e, M_g и $M_{\bar{g}}$ і відповідна розбивка ідентифікаторів вибіркових змінних S_k для представляючої системи із визначником входу-виходу $U = (0,0,1,1)$ подано на рис. 3.5.

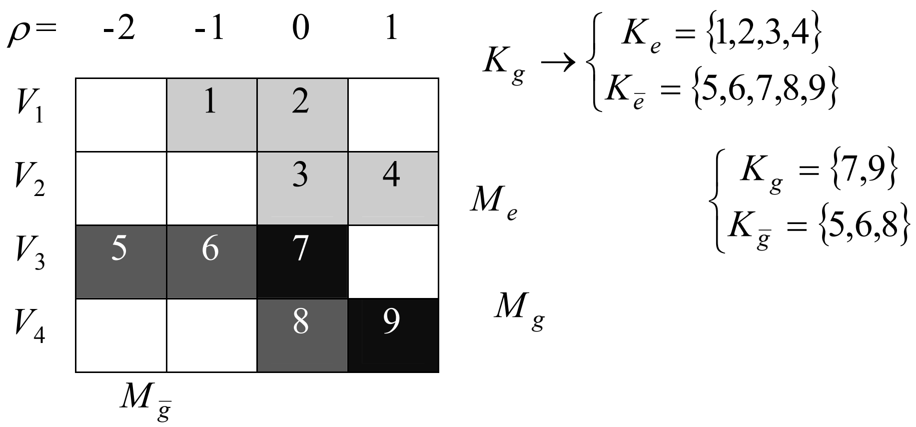

Рис. 3.5. Розбивка маски для спрямованої системи із визначником входу-виходу $U = (0,0,1,1)$ породження даних у порядку зростання повної параметричної множини

Лабораторна робота № 4

Формування спрямованої системи з поведінкою та породжуючої системи з поведінкою для спрямованих систем

Завдання 1. Для отриманої в лабораторній роботі № 2 системи даних D з матрицею даних d побудувати спрямовану систему із поведінкою $\widehat{F}_B$ при умові що дані чіткі та параметрична множина цілком упорядкована.

Використовувати маски M з правилом зрушення $r_j \in R$ при $\rho = (-2,-1,0,1)$, $\rho = (-1,0,1)$.

Завдання 2. Визначити породжуючу систему із поведінкою для спрямованих систем $\widehat{F}_{GB}$, використовуючи маску $\widehat{M}_G$ з параметрами: $\rho = (-2,-1,0,1)$, $\rho = (-1,0,1)$.

Додаток А

СПЕЦІАЛЬНІ ПОЗНАЧЕННЯ

a_i, A_i – властивість і множина його проявів

b_i, B_i – база і множина її значень

c – узагальнений стан системи $c \in C$

C – множина усіх станів системи

$C_{xy}, \hat{C}_{x,y}$ – нейтральне або спрямоване з'єднання елементів x і y структурованої системи

$d, \tilde{d}$ – чіткі і нечіткі дані

$\boldsymbol{d}, \tilde{\boldsymbol{d}}$ – чітка матриця даних і нечіткий масив даних

$\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}$ – нейтральна і спрямована система даних

$\mathbf{D}^{\mathrm{S}}$, $\hat{\mathbf{D}}^{\mathrm{S}}$ – нейтральна і спрямована система даних із семантикою

ℓ_i – конкретизація узагальненої перемінної v_i

E – множина усіх вихідних станів системи

$\overline{\mathbf{E}}$ – множина всіх узагальнених станів системи, що не містить вхідних

ε – узагальнений канал конкретизації

$f_B, \hat{f}_B$ – нейтральна або спрямована функція поведінки

$\boldsymbol{f}_{\mathrm{GS}}$, $\hat{f}_{\mathrm{GS}}$ – нейтральна або спрямована породжуюча ST-функція

$\mathbf{F}_B$, $\hat{\mathbf{F}}_B$ – нейтральна або спрямована система з поведінкою

$\mathbf{F}_{GB}$, $\hat{\mathbf{F}}_{GB}$ – нейтральна або спрямована породжуюча система з поведінкою

$_{SF}$ – родина реконструкцій структурованої системи **SF**

$\mathbf{g}$, $\overline{\mathbf{g}}$ – безліч породжених і порождаючих вибіркових змінних

$\mathbf{G}$, $\overline{\mathbf{G}}$ – множина усіх загальних станів породжених або порождаючих вибіркових змінних

H – ентропія Шеннона

$\mathbf{I}$, $\dot{\mathbf{I}}$ – загальне і конкретне нейтральне представлення представляючої системи

$\mathbf{I}$, $\hat{\mathbf{I}}$ – загальне і конкретне представлення спрямованої представляючої системи

M – маска

M_i – підмаска, зв'язана з перемінною v_i

M_G – породжуюча маска

ΔM – глибина маски M

M^+ – розширена маска

MX – метасистема, заснована на системах типу X

o_i , $\hat{o}_i$ – чіткий і нечіткий канали спостереження змінної v_i

$\mathbf{O}$, $\hat{\mathbf{O}}$ – нейтральна і спрямована система об'єкта

$\mathbf{o}$, $\hat{\mathbf{o}}$ – чіткий і нечіткий загальний канал спостереження

r_j – правило зрушення

R – множина правил зрушення

s_k , S_k – вибіркова змінна і множина її станів

$\mathbf{S}$, $\hat{\mathbf{S}}$ – нейтральна або спрямована вихідна система

$\mathbf{u}$ – вхідної-вихідної ідентифікатор

U – U-нечіткість (можливісна міра нечіткості інформації)

v_i , $\dot{v}_i$ – загальна і конкретна перемінна

V_i , $\dot{V}_i$ – загальна і конкретна множина станів змінної v_i і $\dot{v}_i$ відповідно

$\mathbf{V}_i$ – повна множина станів змінної v_i $(i \in N_n)$

w_j , $\dot{w}_j$ – загальний і конкретний параметр

W_j , $\dot{W}_j$ – загальна і конкретна параметрична множина w_j і $\dot{w}_j$ відповідно

W – повна параметрична множина

ε_j – конкретизація узагальненого параметра w_j

ω_j , $\tilde{\omega}_j$ – чіткий і нечіткий параметричні канали спостереження b_j

Додаток Б

Основні теоретико-множинні поняття теорії систем

При побудові теорії систем ми будемо виходити з наступних визначень.

Загальною системою називається відношення на порожніх (абстрактних) множинах

$$S \subset \times\{V_i : i \in I\},$$

де $\times$ - символ декартова добутку, а I - множина індексів. Множина V_i будемо називати перемінними системами, виділеними на об'єкті дослідження O відповідно до мети дослідження при обліку обмежень. Якщо множина I скінченна, то (П.1) можна переписати у виді

$$S \subset V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n .$$

Декартовий добуток $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ (або прямий добуток) визначається як множина всіх упорядкованих наборів $(V_1 V_2 \ldots V_n)$, таких, що перший елемент будь-якого набору належить V_1, другий - V_2 і т.д.

$$V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n = \{(v_1 v_2 \ldots v_n) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \ldots, v_n \in V_n\} .$$

Добуток $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ є вибірковим простором складового експерименту, у якому робиться n окремих експериментів із вибірковими просторами $V_1, \ldots, V_n$.

Вибірковим простором V називається множина усіх можливих виходів експерименту.

Ізоморфізм алгебраїчних структур (X,R) і (Y,S) - це взаємно однозначна відповідність $h: X <-> Y$, таке, що $(x_1, x_2) \in R$ тоді і тільки тоді, коли $(h(x_1), h(x_2)) \in S$.

Бінарне відношення R на множині X - це підмножина декартових добутків $X \times X$ або $R \in X \times X$.

Гомоморфізм з однієї алгебраїчної структури (X,R) в іншу алгебраїчну структуру (Y,S) - це функція $h: X <-> Y$, така, що з $(x_1, x_2) \in R$, випливає що $(h(x_1), h(x_2)) \in S$. Якщо функція h така, що $(x_1, x_2) \in R$ тоді і тільки тоді, коли $(h(x_1), h(x_2)) \in S$, гомоморфізм називається суворим.

Часткова упорядкованість Q множини V_i - це бінарне співвідношення

$$Q \subset V_i \times V_i$$

задовольняючим наступним вимогам:

1) $(x, x) \in Q$ для всіх $x \in X$ (рефлексивність);

2) якщо $(x, y) \in Q$ і $(y, x) \in Q$, то $x = y$ (антісиметричність);

3) якщо $(x, y) \in Q$ і $(y, z) \in Q$, то $(x, z) \in Q$ (транзитивність).

Лінійна упорядкованість - це зв'язане часткове упорядкування, тобто на додаток до вимог рефлексивності, антісиметричності і транзитивності задовольняє вимозі зв'язності: $\forall x, y \in V_i$, якщо $x \neq y$, то або $(x, y) \in Q$, або $(y, x) \in Q$.

Метрична відстань (метрика), визначена на множині X - це функція $d: X \times X \in R$, що задовольняє умовам:

1) $d(x, y) \geq 0$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$;

3) $d(x, y) = 0$, тоді і тільки тоді, коли $x = y$;

4) $d(x, z) \leq d(y, x) + d(y, z)$.

Нечітка множина X, визначена в межах чіткої універсальної множини U - це множина упорядкованих пар $X = \{(u, m_x(u)) \mid u \in U\}$, де $m_x(U)$ - це ступінь приналежності до множини X.

Операція - це функція $O : X^n \to X$. При $n = 1,2,...$ вона називається унарною операцією, бінарною і т.д. відповідно.

Розбивка $\pi(x)$ множини X - це така родина непорожніх підмножин множини X, для якої кожен елемент із X належить тільки одній підмножині, тобто:

$$\pi(x) = \left\{ X_i \mid X_i \in P(X), X_i \neq \quad , \bigcup_{i \in I} X_i = X \text{ і } X_i \bigcap X_j = \varnothing \text{ для усіх } i, j \in I \quad \right\}.$$