В. І. Месюра, Л. М. Ваховська, В. В. Колодний

СИСТЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ З НЕЧІТКОЮ ЛОГІКОЮ

Лабораторний практикум
Частина 1
Математичні основи нечіткої логіки

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. І. Месюра, Л. М. Ваховська, В. В. Колодний

СИСТЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ З НЕЧІТКОЮ ЛОГІКОЮ

Лабораторний практикум
Частина 1
Математичні основи нечіткої логіки

Вінниця
ВНТУ
2014

УДК 510.6: 004.89(075)
ББК 22.18: 32.97я73
М53

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 11 від 30 червня 2011 р.)

Рецензенти:
О. М. Роїк, доктор технічних наук, професор
В. М. Лисогор, доктор технічних наук, професор
А. Б. Ракитянська, кандидат технічних наук, доцент

Месюра, В. І.
М53 Системи прийняття рішень з нечіткою логікою : лабораторний практикум. Частина 1. Математичні основи нечіткої логіки. В. І. Месюра, Л. М. Ваховська, В. В. Колодний – Вінниця : ВНТУ, 2014. – 124 с.

Лабораторний практикум містить теоретичний матеріал і велику кількість прикладів формалізації та розв’язування задач за допомогою математичного апарату нечітких множин, необхідних для набуття студентами практичних навичок у створенні програмного забезпечення систем підтримки прийняття рішень з нечіткою логікою, переліки контрольних запитань та вимоги до знань студентів, необхідні для виконання лабораторних робіт навчальної дисципліни “Системи прийняття рішень з нечіткою логікою ”.

УДК 510.6: 004.89(075)
ББК 22.18: 32.97я73

ЗМІСТ

ВСТУП

Будь-яка розумова діяльність людини (як і будь-яка наука) полягає у створенні та дослідженні моделей реального світу. Навіть спілкуючись між собою природною мовою ми постійно формулюємо моделі різноманітних реальних об'єктів, описуючи їх словами.

Реальні об'єкти, явища і процеси навколишнього світу є надто складними і відповідають нашим моделям лише настільки, наскільки самі ці об'єкти, явища і процеси відповідають нашим знанням про них. При цьому модель ніколи не є повністю еквівалентною об'єкту, вона завжди є неповним (неточним, викривленим) поданням об'єкта, тобто – біднішою за сам об'єкт. Тому в моделі завжди присутня невизначеність, яку слід враховувати при перенесенні висновків, отриманих при її аналізі на сам об'єкт.

Невизначеність є складним філософським поняттям. Обмежуючись розглядом невизначеності лише на рівні структури, можна навести її загальну класифікацію у вигляді, поданому на рисунку 1 [1].

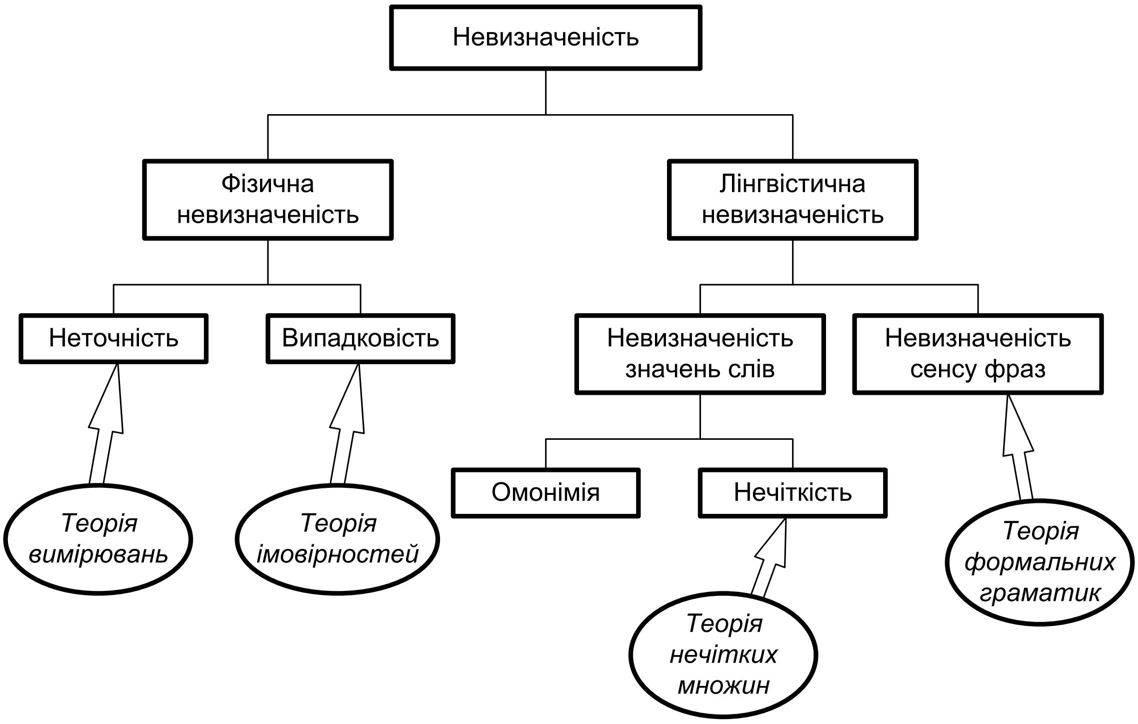


Рисунок 1 – Загальна класифікація невизначеності

Фізична невизначеність описує невизначеність об'єкта реального світу з точки зору спостерігача. Вона може бути зумовлена неточністю вимірювань цілком визначених величин, викликаною можливостями фізичних приборів. Наприклад, маючи шкалу з кроком 1 мм ми не можемо виміряти розмір з точністю до мікрона. Математичною моделлю для обробки такого типу невизначеності є інтервальна арифметика. З об'єктами виміряними у різних шкалах треба працювати по-різному.

Наприклад, для рангових або номінальних шкал не мають сенсу арифметичні операції. Вивчення цих питань є предметом дослідження теорії вимірювань.

Фізична невизначеність може бути пов'язана також з наявністю у зовнішньому середовищі кількох можливостей, кожна з яких випадково стає дійсністю (ситуація випадковості, невизначеності). Теорією, орієнтованою на обробку невизначеності у цьому сенсі, є теорія ймовірностей. Але й сама ця теорія базується на ряді припущень і гіпотез, без перевірки яких для даної конкретної проблеми неможливо гарантувати адекватність висновків, отриманих у межах аналізу її моделей, реальним об'єктам або процесам. До таких вимог відносяться, зокрема: повторюваність подій, гарантування можливості переносу ефектів, що спостерігаються, на всі об'єкти або події даного типу (генеральна сукупність), незалежність подій і т. ін.

Невизначеність вмісту фраз вивчає формальна граматика. Прикладами такої невизначеності можуть бути відомі фрази: "стратити не можна помилувати", "він зустрів її на поляні з квітами" і т. ін., - сенс яких змінюється в залежності від місця розташування коми.

Теорія нечітких множин дозволяє формалізувати невизначеність, що виникає при моделюванні (не тільки математичному, а у широкому сенсі цього слова) реальних об'єктів. Невизначеність виникає завжди при використанні для опису об'єкта слова природної мови. Це особливо характерно для застосування інформаційних технологій до «нетрадиційних» або «гуманітарних» областей, таких як соціологія, психологія, медицина, економіка, управління (з урахуванням особливостей досвіду, характеру, світогляду особи, що приймає рішення) і т. ін. У теорії нечітких множин розроблено апарат формалізації змістовних понять, прикладами яких є «людина середнього зросту», «високий рівень безпеки», «стійка ситуація» і т. ін.

Лабораторний практикум є першою з трьох частин лабораторного практикуму з дисципліни «Системи прийняття рішень з нечіткою логікою»:

- математичні основи теорії нечітких множин;
- моделі та методи нечіткого логічного висновку;
- проектування нечітких систем підтримки прийняття рішень з використанням засобів MATLAB та FUZZYTECH.

Він містить теоретичний матеріал і велику кількість прикладів формалізації та розв'язування задач за допомогою математичного апарату нечітких множин, необхідних для набуття студентами практичних навичок у створенні програмного забезпечення систем підтримки прийняття рішень з нечіткою логікою.

1 НЕЧІТКІ МНОЖИНИ

1.1 Загальне поняття нечіткої множини

Англійське слово fuzzy, від якого утворене прикметник Fuzzy (нечіткий), означає «ворс», оскільки малюнок на ворсистій тканині здається розмитим [2]. Отже, кажучи «нечіткий», мають на увазі «неясний», «розмитий». Нечіткою множиною, наприклад, можна назвати усіх красунь світу. Сенс цього Означення повністю зрозумілий, але сказати, чи належить до цієї множини одна або інша дівчина однозначно, лише за допомогою слів «так» або «ні» не просто, оскільки йдеться про невизначені, нестрогі властивості об’єктів дослідження.

На відміну від цього світ, властивості якого можна строго визначити двома словами, наприклад «чоловік або жінка?», назвемо чітким світом. Отже, логіку комп'ютерів, які мають справу з 0 і 1, називатимемо чіткою логікою, а звичайні множини - чіткими множинами. Зауважимо, що нечіткі множини і нечітку логіку можна розглядати як розширення відповідних чітких понять.

Для кращого розуміння нечітких множин згадаємо спочатку основи теорії чітких множин [3].

Нехай E є множиною, A – є підмножиною E, а x є елементом підмножини A, або, як ще кажуть, належить A:

$$A \subset E, \quad x \in A$$

Відобразити цю належність можна з використанням іншого поняття – характеристичної функції $\mu_A(x)$, значення якої вказують, чи є (так або ні) x елементом A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x \in A, \\ 0, & \text{якщо} \quad x \notin A \end{cases}.$$

Приклад 1.1 Розглянемо кінцеву множину з п’яти елементів

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

і нехай

$$A = \{x_2, x_3, x_5\}.$$

Випишемо для кожного елементу з E ступінь його належності множині A

$$\mu_A(x_1) = 0,\ \mu_A(x_2) = 1,\ \mu_A(x_3) = 1,\ \mu_A(x_4) = 0,\ \mu_A(x_5) = 1.$$

Це дозволить подати A через усі елементи множини E, супроводивши кожен з них значенням його функції належності

$$A = \{(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 1\}.$$

Тобто елементи, яким поставлено у відповідність значення $\mu_A(x_i) = 1$, можна інтерпретувати як елементи, що знаходяться у множині A, а елементи, якім поставлено у відповідність значення $\mu_A(x_i) = 0$, як елементи, що не знаходяться у множині A.

Графічну інтерпретацію характеристичної функції μ_A множини A наведено на рисунку 1.1. Така концепція використовується в багатьох застосуваннях.

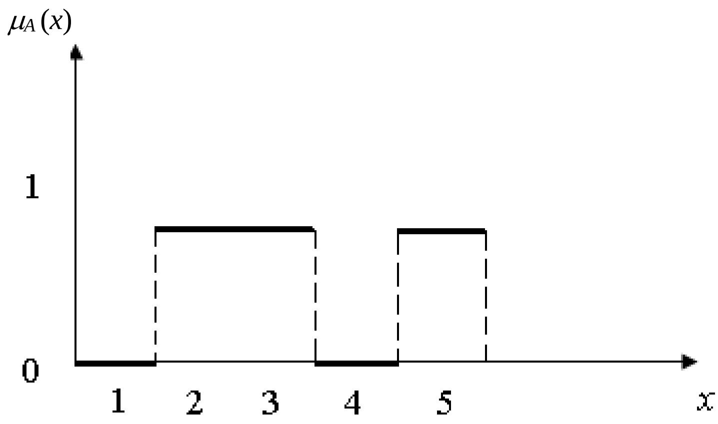


Рисунок 1.1 – Графічне відображення характеристичної функції μ_A

Але не важко навести ситуації, в яких дана концепція буде недостатньо гнучкою. Розглянемо, наприклад, множину B молодих людей:

$$B = \{\text{множина молодих людей}\}$$

Така множина може бути визначена через вік людини. При цьому нижня межа буде подана значенням 0. Верхню межу визначити трохи складніше. Припустимо, ми визначимо її рівною значенню 20. Отже, B буде визначено як чітко обмежений інтервал, буквально:

$$B = [0; 20].$$

Але тут виникає таке запитання. Чому людина у свій двадцятирічний ювілей ще є молодою, а наступного дня вже ні? Зрозуміло, що це є структурна проблема, і до якої б довільної точки ми не пересунули верхню межу наше запитання залишиться справедливим.

Більш природний шлях отримання множини B полягає в послабленні жорсткого розподілу людей на молодих і немолодих. Зробимо це з використанням не тільки чітких суджень: “Так, він (вона) належить множині молодих людей”, “Ні, він (вона) не належить множині молодих людей”, але і за допомогою більш гнучких формулювань: “Так, він (вона) належить множині достатньо молодих людей”, “Ні, він (вона) не дуже молоді люди.”

Для формалізації даної пропозиції, з метою її узагальнення, будемо кодувати всі елементи універсуму міркування не лише значеннями 0 або 1, а додатково скористаємось значеннями з інтервалу від 0 до 1, який має назву одиничного інтервалу $I = [0; 1]$.

Інтерпретація чисел при співвіднесенні всіх елементів універсуму міркувань стає при цьому більш складною. Тепер число 1 ставиться у відповідність (співвідноситься) тому елементу, який точно належить множині *B*, а 0 означає, що елемент точно не належить множині *B*. Всі інші значення визначають ступінь належності елемента множині *B*.

Тобто, характеристична функція може тепер приймати будь-яке значення в інтервалі [0; 1]. Відповідно до цього елемент x_i множини *E* може не належати *A* ($\mu_A = 0$), може бути елементом А у невеликому ступені ((μ_A близько до 0), може більш менш належати А (μ_A не надто близьке до 0, ні надто близьке до 1), може значною мірою бути елементом А (μ_A близько до 1) або, нарешті, може бути елементом А (μ_A =1). Отже, поняття належності отримує цікаве узагальнення, що приводить до дуже корисних результатів.

Приклад 1.2. Поставимо у відповідність різному віку людини різні «ступені» її молодості, які відобразимо відповідними значеннями характеристичної функції (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Значення характеристичної функції з інтервалу [0, 1]

Вік	Значення характеристичної функції, як «ступінь відповідності» людини поняттю «молода»	Поняття
[0 - 20]	1	молода
25	0,75	достатньо молода
30	0,5	не дуже молода
40	0	немолода

Значення характеристичної функції для проміжного віку людини можна отримати, поєднавши сусідні відомі значення відрізками прямих (рис. 1.2). Наприклад, для віку 35 років отримаємо у нашому прикладі значення характеристичної функції $\mu_A(35) = 0{,}125$. Математичний об’єкт, що визначається виразом вигляду

$$A = \{(1/x_1), (1/x_2), (0{,}75/x_3), (0{,}5/x_4), (0/x_5)\},$$

де x_i – елемент універсальної множини *E*, а число перед нахиленою рискою є значенням характеристичної функції на цьому елементі, будемо називати нечіткою підмножиною множини *E* і позначати $\widetilde{A}$.

Означення 1.1. Для довільної непустої множини *X* її нечіткою підмножиною $\widetilde{A}$ називають множину пар вигляду [7]:

$$\widetilde{A} = \{<\mu_A(x)/x>\}, \quad (1.1)$$

де $x \in X$, $\mu_A(x) \in [0;\ 1]$, $\mu_A : X \to [0;\ 1]$ – функція належності елементу $x \in X$ нечіткій множині $\widetilde{A}$, $\widetilde{A} \subset E$, X - базова множина або базова шкала.

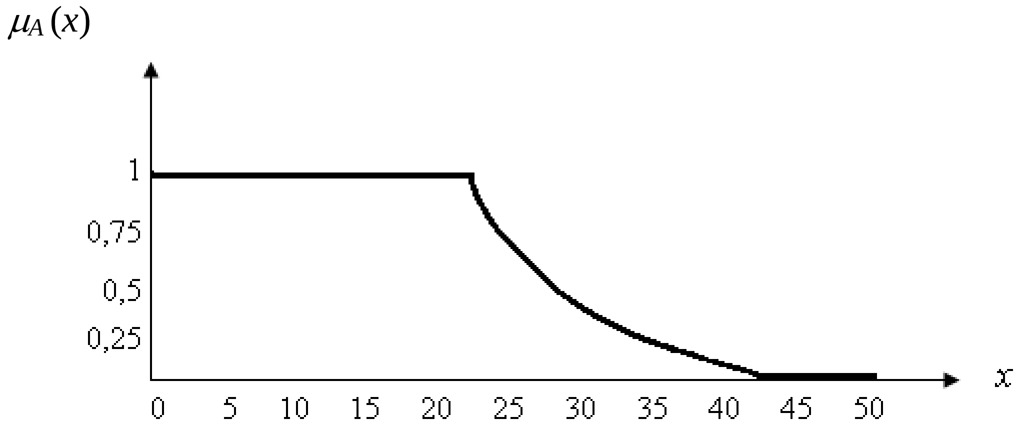


Рисунок 1.2 – Графічне відображення характеристичної функції μ_A з інтервалу [0; 1]

Для кожного конкретного значення $x \in X$ величина $\mu_A(x)$ набуває певного значення із замкненого інтервалу [0; 1], яке називається ступенем належності елемента x нечіткій множині $\widetilde{A}$. Будемо вважати, що до множини $\widetilde{A}$ не входять елементи $(\mu_A(x) / x)$ для яких $\mu_A(x) = 0$.

Означення 1.2. Функцією належності $\mu_A(x)$ називається функція, що дозволяє для довільного елементу $x \in X$ визначити ступінь його належності нечіткій множині.

Функція належності $\mu_A(x)$ є одним з базових понять теорії нечітких множин. Більшість дослідників вважають, що вона є деяким не імовірнісним суб'єктивним виміром нечіткості, який відрізняється від імовірнісної міри. Тобто, ступінь належності μ_A(x) елемента x до нечіткої множини $\widetilde{A}$ інтерпретується як суб'єктивна міра того, наскільки елемент x∈X відповідає поняттю, зміст якого формалізується нечіткою множиною $\widetilde{A}$.

Означення 1.3. Підмножина A множини E, яка містить тільки ті елементи з E, для яких значення функції належності $\mu_A(x)$ є більшими за 0, називається носієм $supp\,\widetilde{A}$ нечіткої множини $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} := \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}.$$

Приклад 1.3. Нехай E - множина натуральних чисел. Тоді її нечітку підмножину $\widetilde{A}$ «дуже малих» чисел можна подати так:

$$\widetilde{A} = \{<1/1>,<0,8/2>,<0,6/4>,<0,5/5>,<0,3/6>,<0,1/7>\}.$$

Носієм нечіткої множини $\widetilde{A}$ буде множина

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

оскільки для всіх інших натуральних чисел значення функції належності $\mu_A(x)$ поняттю "дуже мале число" буде дорівнювати нулю. Помітимо, що носієм нечіткої множини є зазвичай чітка підмножина множини *E*.

Приклад 1.4. Нехай *E* = {«Мерседес», «БМВ», «Вольво», «Жигулі», «Таврія», «Запорожець»} множина марок легкових автомобілів, а E^* = [0; ∞) – універсальна множина "вартість". Тоді на E^* можна визначити нечіткі множини типу: "для людини з невеликим достатком", "для середнього класу", "престижні" з функціями належності подібними до наведених на рисунку 1.3 [4].

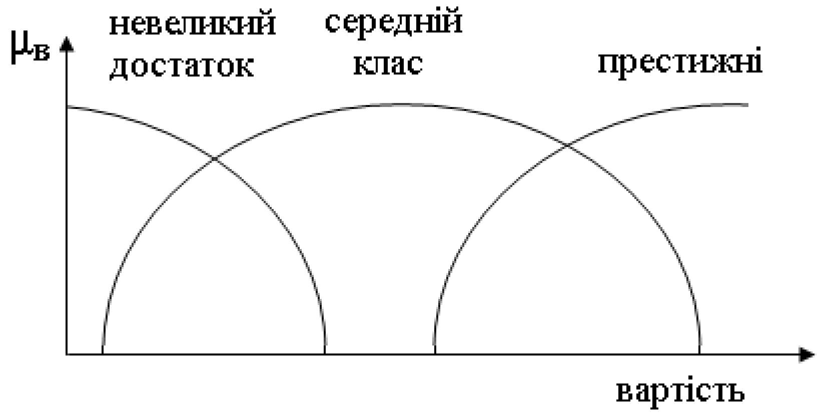


Рисунок 1.3 – Функції належності для означення вартості речей доступних для осіб різного рівня достатку

Маючи такі функції належності і знаючи вартості автомобілів з *E* у даний момент часу, можна визначити на E^* нечіткі множини з такими ж назвами для різних марок автомобілів.

Наприклад, нечітка множина "для людини з невеликим достатком", задана на універсальній множині X = {«Мерседес», «БМВ», «Вольво», «Жигулі», «Таврія», «Запорожець»} буде мати вигляд, наведений на рисунку 1.4.

Тобто, згідно з рисунком 1.4 можна стверджувати, що "Запорожець" є автомобілем виключно для людей з невеликим достатком; "Таврія" – на 90% для людей з невеликим достатком і на 60% для людей із середнім достатком; "Жигулі" – на 30% для людей з невеликим достатком і на 90% - для людей із середнім достатком і т. ін.

Функція належності для кожної нечіткої множини визначається, в загальному випадку, суб'єктивно. Так, в наведеному прикладі вигляд функції належності відображає точку зору авторів і може не збігатися з точкою зору читача. Тобто, функції належності однієї і тієї ж множини можуть бути різними при визначенні їх як різними особами, так і однією і тією ж особою в залежності від її настрою, мети побудови нечіткої підмножини, задачі, методики побудови і т. ін. Детально з методами побудови функцій належності ви познайомитесь у четвертій лабораторній роботі.

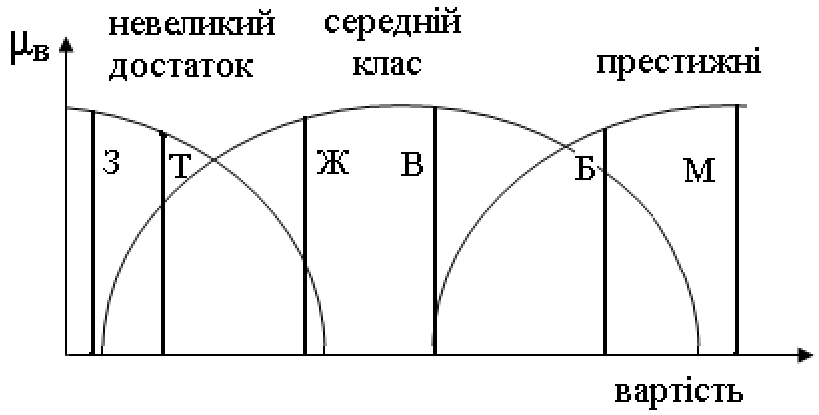


Рисунок 1.4 – Функції належності для означення престижності легкових автомобілів

1.2 Основні характеристики нечітких множин

Нехай M = [0; 1] і $\tilde{A}$ – нечітка множина з елементами з універсальної множини X і множиною функцій належностей M.

Означення 1.4. Величина верхньої границі функції належності нечіткої множини називається висотою нечіткої *height* ($\tilde{A}$) множини $\tilde{A}$.

$$height\,(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_A(x).$$

Означення 1.5. Нечітка множна $\tilde{A}$ називається нормальною, якщо її висота дорівнює 1, тобто верхня межа її функції належності дорівнює 1:

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1.$$

Якщо виконується

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) < 1,$$

то нечітка множина називається субнормальною (рис. 1.5)

Означення 1.6. Нечітка множина є пустою, якщо

$$\forall x \in X, \ \mu_A(x) = 0.$$

Непусту субнормальну множину можна нормалізувати за формулою

$$\mu_A(x) := \frac{\mu_A(x)}{\sup\limits_{x \in X} \mu_A(x)}.$$

Означення 1.7. Нечітка множина унімодальна, якщо $\mu_A(x) = 1$ виконується тільки для одного x з X.

Елементи $x \in X$, для яких виконується $\mu_A(x) = 0{,}5$ іноді називають точками переходу множини А.

Приклад 1.5. Нехай $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $M = [0, 1]$; $\widetilde{A}$ - нечітка множина, для якої:

$\mu_A(x_1) = 0{,}3$; $\mu_A(x_2) = 0$; $\mu_A(x_3) = 1$; $\mu_A(x_4) = 0{,}5$; $\mu_A(x_5) = 0{,}9$.

Тоді $\widetilde{A}$ можна подати у вигляді:

$\widetilde{A} = \{0{,}3/x_1; 0/x_2; 1/x_3; 0{,}5/x_4; 0{,}9/x_5\}$, або $A = 0{,}3/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 0{,}5/x_4 + 0{,}9/x_5$, або

A =	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0,3	0	1	0,5	0,9

Зауважимо, що знак “+” не є позначенням операції додавання, а має зміст об’єднання.

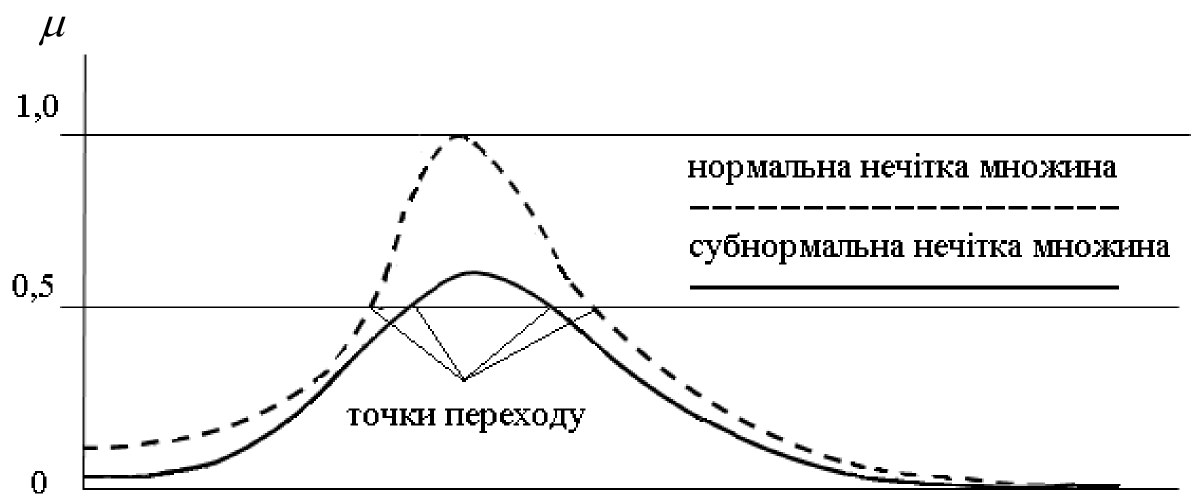


Рисунок 1.5 – Нормалізація унімодальної нечіткої множини

Приклад 1.6. Нехай $X = \{0,1,2,..,10\}$, $M = [0; 1]$. Визначимо нечітку множину :

“декілька” = 0,5/3 + 0,8/4 + 1/5 + 1/6 + 0,8/7 + 0,5/8.

Визначимо характеристики даної нечіткої множини:

висота = 1; носій = {3,4,5,6,7,8}; точки переходу - {3, 8}.

Приклад 1.7. Нехай $X = \{0,1,2,3, ..., n, ...\}$. Функцію належності нечіткій множині “малий” можна описати за допомогою аналітичних виразів, наприклад, таких:

$$\mu_{"малий"}(n) = \frac{1}{1+\left(\frac{n}{10}\right)^2} \quad \text{або} \quad \mu_{"малий"}(n) = \frac{1}{1+\left(\frac{n}{10}\right)^2} / n$$

При цьому графіки функції належності набудуть вигляду, наведеного на рисунку 1.6 суцільною та перивистою лініями.

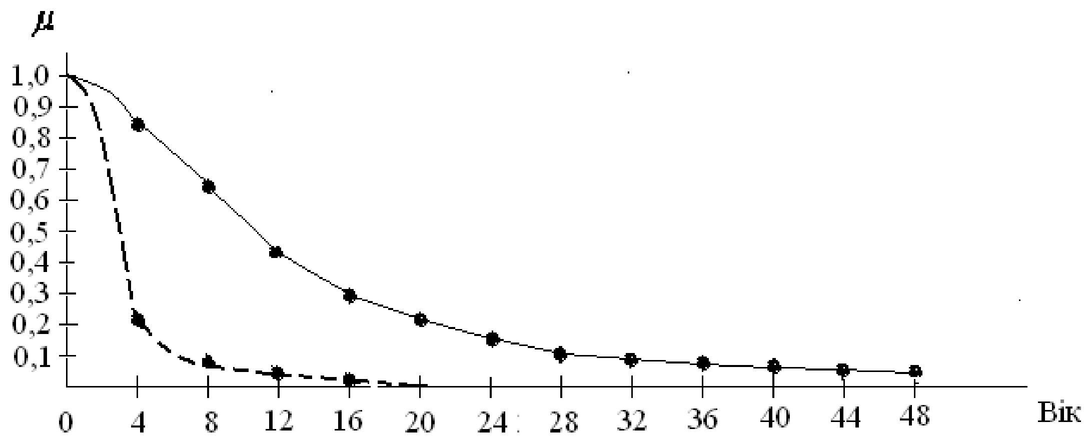


Рисунок 1.6 – Графік функцій належності нечіткій множині “малий”

Приклад 1.8. Нехай X = {0, 1, 2, 3, ..., 100} і відповідає поняттю “вік”. Відповідно функцію належності нечіткої множини “молодий” можна задати, наприклад таким виразом:

$$\mu_{"молодий"}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,25] \\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2}, & x \geq 25. \end{cases}$$

Нечітка множина “молодий ” на універсальній множині

X' = {Бойко, Луцюк, Сердюк, ...},

задається за допомогою функції $\mu_{"молодий"}(x)$ на X = {1,2,3,..100} (вік), яка називається відносно X функцією сумісності. При цьому виконується:

$$\mu_{"молодий"}(Бойко) = \mu_{"молодий"}(x),$$

де x – вік Бойка.

Означення 1.8. Нечітка множина називається пустою, якщо її носій є пустою множиною.

Означення 1.9. Ядром нечіткої множини $\widetilde{A}$ називається чітка підмножина базової множини X, елементи якої мають ступені належності, що дорівнюють одиниці:

$$\tilde{A} := \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}.$$

Означення 1.10. Нечіткою множиною α-рівня (α-перерізом або α-зрізом) нечіткої множини $\tilde{A}$ називають чітку підмножину множини X, елементи якої мають ступені належності, що перевищують або дорівнюють α:

$$A_\alpha := \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0, 1]$$

Носій та ядро можна розглядати як переріз нечіткої множини на нульовому та одиничному α-рівнях (рис. 1.7) Ядро субнормальної нечіткої множини є пустим.

Приклад 1.9 Знайдемо для нечіткої множини $\tilde{A}$ дві підмножини α-рівнів: $A_{0,3}$ і $A_{0,55}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\tilde{A}$ =	0,8	0,1	1	0,3	0,6	0,2	0,5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$A_{0,3}$ =	1	0	1	1	1	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$A_{0,55}$ =	1	0	1	0	1	0	0

Розглянемо дві важливі теореми, пов'язані з поняттям підмножини α-рівнів.

Теорема про декомпозицію. Будь-яку нечітку підмножину A можна розкласти на добуток звичайних підмножин за коефіцієнтами α_t:

$$\tilde{A} = \underset{\alpha_t}{MAX}[\alpha_1 A_{\alpha_1}, \alpha_2 A_{\alpha_2}, ..., \alpha_n A_{\alpha_n}],$$

$$0 < \alpha_t \leq 1,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Доведення є очевидним. Оскільки

$$\mu_{A\alpha_t}(x) = \begin{cases} 1, & якщо \quad \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha_t \\ \hline 0, & якщо \quad \mu_{\tilde{A}}(x) < \alpha_t \end{cases},$$

то функцію належності A можна записати у вигляді:

$$\underset{\substack{MAX[\alpha_t \times A\alpha_t] \\ \varepsilon_t}}{\mu(x)} = \underset{\alpha_t}{MAX}[\alpha_t \times A_{\alpha_t}] = \underset{\alpha_t \prec \mu_{\tilde{A}}(x)}{MAX}[\alpha_t] = \mu_{\tilde{A}}(x).$$

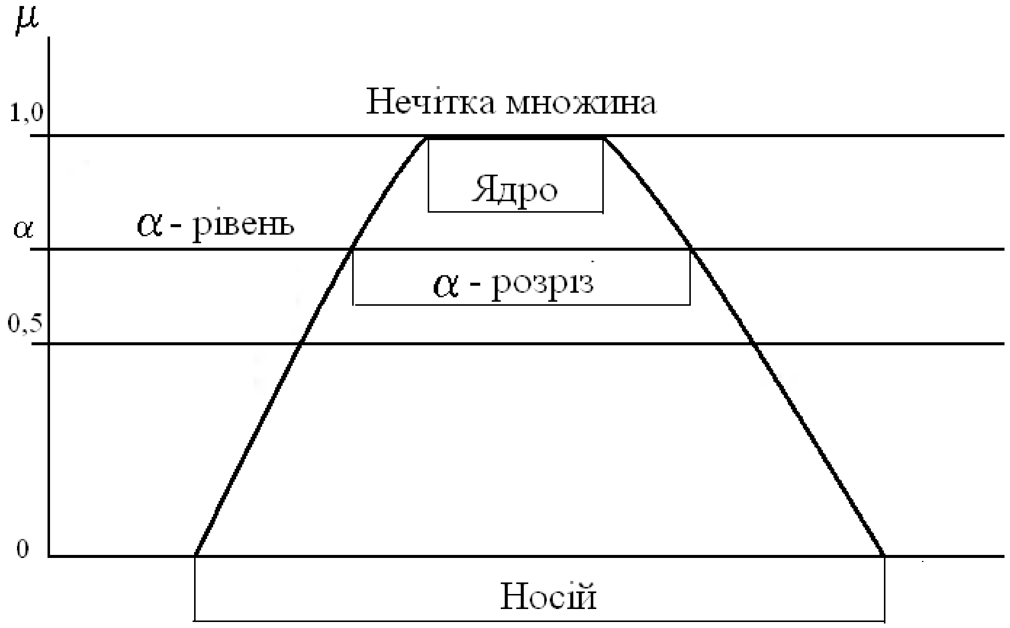


Рисунок 1.7– Характеристики нечіткої множини

Приклад 1.10. Здійснимо декомпозицію нечіткої множини $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0,2} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0,5} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0,7} \\ \hline \end{array} = MAX \left(0,2\times \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}, \right.$$

$$\left. 0,5\times \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}, \quad 0,7\times \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}, \quad 1\times \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array} \right)$$

Синтез нечіткої множини об’єднанням звичайних підмножин

Теорему про декомпозицію можна застосувати не тільки для аналізу, але й для синтезу. Якщо розглянути послідовність звичайних підмножин

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n$$

і присвоїти значення α_1 для A_1, α_2 для $A_2, \ldots$, α_n для A_n , причому такі, що

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n,.$$

отримаємо нечітку підмножину $\tilde{A}$.

Означення 1.11. Нечітка множин $\tilde{A}$ називається випуклою, якщо:

$$\mu_A(\lambda \times x_1 + (1-\lambda) \times x_2) \geq min\,(\mu_A(x_1),\ \mu_A(x_2)), \qquad x_1, x_2 \in X,\ \lambda \in [0; 1].$$

Альтернативне означення: нечітка множина буде випуклою, якщо всі її α - перерізи є випуклими множинами [4, 6]. Приклади випуклої та невипуклої нечітких множин наведені на рисунку 1.8.

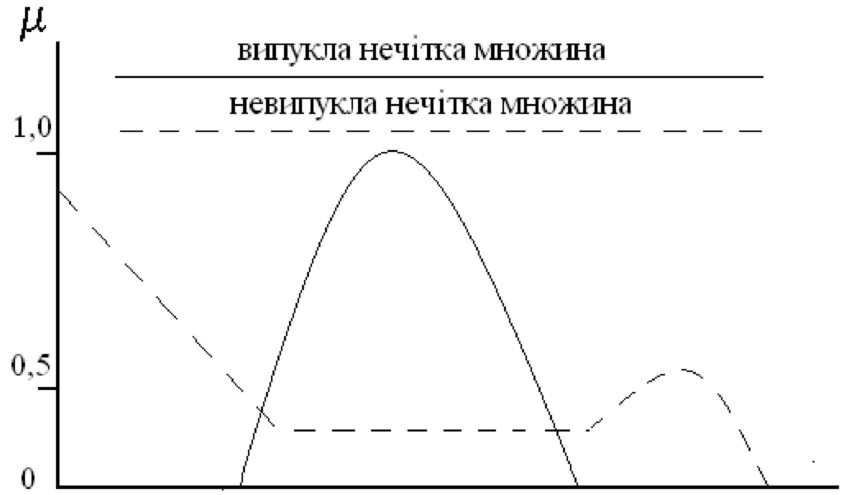


Рисунок 1.8 – Випукла та не випукла нечіткі множини

1.3 Теоретико-множинні операції над нечіткими множинами

Над нечіткими множинами можна виконувати різноманітні операції. При цьому необхідно визначити їх таким чином, щоб в окремому випадку, коли множина є чіткою, операції перетворювалися на звичайні операції теорії множин, тобто операції над нечіткими множинами повинні узагальнювати відповідні операції над звичайними множинами. Таке узагальнення можна реалізувати різними способами [3, 5, 6].

Оскільки у теорії нечітких множин ступінь належності може набувати значень з інтервалу [0; 1], а не обмежений бінарними значеннями 0 і 1, як у звичайній теорії множин, таке узагальнення можна реалізувати різними способами, які дозволяють враховувати різноманітні смислові відтінки відповідних логічних зв'язок "І", "АБО", "НЕ" у різних предметних областях.

Отож, будь-якій операції над звичайними множинами у теорії нечітких множин може відповідати кілька операцій.

Для означення перетину та об'єднання нечітких множин найбільшою популярністю користуються три групи операцій: мінімаксні, алгебраїчні та обмежені.

Мінімаксні операції визначаються за допомогою таких співвідношень:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\};\ \mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$$

Рисунок 1.9 ілюструє головну ідею, закладену в основу такого Означення. Об'єднання множин, що відображає логічну операцію «АБО», визначається тією областю, у якій хоча б одне зі значень (або A, або B) є істинним, тобто, максимальним значенням. Перетин, що відображає логічну операцію «І», визначається областю, де істинними є обидва значення (і A і B), тобто, мінімальним значенням.

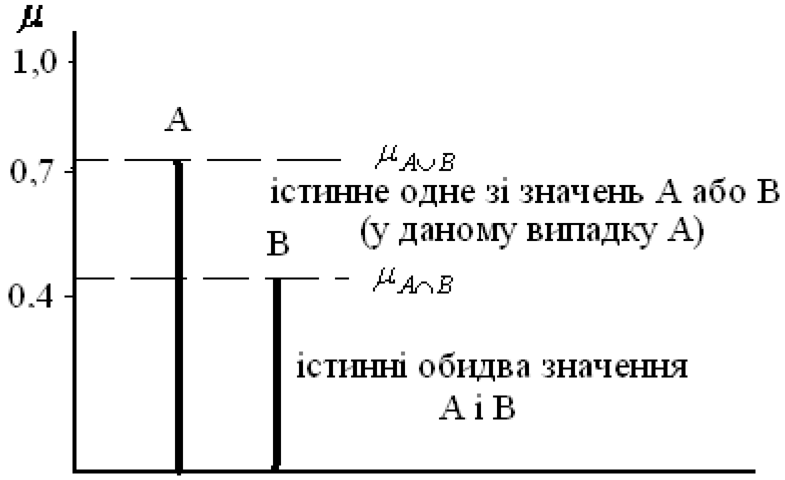


Рисунок 1.9 – Мінімаксні операції перетину та об’єднання нечітких множин

Зауважимо, що мінімаксні операції не враховують внесок менш значущих складових на загальний результат. Тобто, результат повністю визначається лише максимальною складовою при об’єднанні та лише мінімальною складовою при перетині нечітких множин.

Алгебраїчні операції відображають об’єднання та перетин через алгебраїчні операції додавання та множення, відповідно, що дозволяє враховувати усі складові, що беруть участь у формуванні результату:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x)\} - \mu_A(x)\,\mu_B(x); \quad \mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x)\,\mu_B(x).$$

При цьому, при визначенні результату об’єднання, з суми значень складових впливів віднімається їх добуток, що забезпечує знаходження результату в інтервалі [0; 1].

Результат обмежених операцій визначається з використанням таких формул:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}; \; \mu_{A\cap B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}.$$

Дані операції в явному вигляді задають обмеження на можливі значення результату, ще більше враховуючи внесок у результат окремих складових.

Доповнення нечіткої множини в усіх трьох випадках визначається однаково:

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Можна показати, що для будь-яких нечітких множин оператори F = min і G = max є єдино можливими операторами перетину і об’єднання при виконанні таких властивостей

1. Комутативність:

$$F(\mu_A, \mu_B) = F(\mu_B, \mu_A); \quad G(\mu_A, \mu_B) = G(\mu_B, \mu_A).$$

2. Асоціативність:

$$F(\mu_A, F(\mu_B, \mu_C)) = F(F(\mu_A, \mu_B), \mu_C);$$
$$G(\mu_A, G(\mu_B, \mu_C)) = G(G(\mu_A, \mu_B), \mu_C).$$

3. Дистрибутивність:

$$F(\mu_A, G(\mu_B, \mu_C)) = G(F(\mu_A, \mu_B), F(\mu_A, \mu_C));$$
$$G(\mu_A, F(\mu_B, \mu_C)) = F(G(\mu_A, \mu_B), G(\mu_A, \mu_C)).$$

4. Монотонність:

$\mu_A \le \mu_C,\ \mu_B \le \mu_D \Rightarrow F(\mu_A, \mu_B) \le F(\mu_C, \mu_D))$; $G(\mu_A, \mu_B) \le G(\mu_C, \mu_D))$;

$\mu_A < \mu_B \Rightarrow F(\mu_A, \mu_A) < F(\mu_B, \mu_B)$; $G(\mu_A, \mu_A) < G(\mu_B, \mu_B)$;

$F(1,1) = 1$; $F(0,0) = 0$;

$F(\mu_A, \mu_B) \le \min\{\mu_A, \mu_B\}$; $G(\mu_A, \mu_B) \ge \max\{\mu_A, \mu_B\}$.

Наведені оператори не вичерпують усю множину можливих визначень нечітких операторів об’єднання та перетину.

Найбільш загальний підхід до цілеспрямованого формування нечітких операторів об’єднання та перетину полягає в їх визначенні в класі трикутних норм і конорм.

Означення 1.12. Трикутною нормою (t-нормою) називається двомісна дійсна функція $\wedge$ на одиничному інтервалі:

$$T: [0; 1]\times[0; 1] \to [0; 1],$$

що задовольняє такі аксіоми для будь-яких $\mu_A, \mu_B, \mu_C \in [0; 1]$:

$T(0, 0) = 0$; $T(\mu_A, 1) = \mu_A$; $T(1, \mu_A) = \mu_A$ - обмеженість;

$T(\mu_A, \mu_B) \le T(\mu_C, \mu_D)$, якщо $\mu_A \le \mu_C$, $\mu_B \le \mu_D$ - монотонність;

$T(\mu_A, \mu_B) = T(\mu_B, \mu_A)$ - комутативність;

$T(\mu_A, T(\mu_B, \mu_C)) = T(T(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$ – асоціативність.

Означення 1.13. Трикутною конормою (t-конормою, або s-нормою) називається двомісна дійсна функція $\vee$ на одиничному інтервалі:

$$T: [0; 1]\times[0; 1] \to [0; 1],$$

з такими властивостями:

$T(1, 1) = 1$; $T(\mu_A, 0) = \mu_A$; $T(0, \mu_A) = \mu_A$ - обмеженість;

$T(\mu_A, \mu_B) \ge T(\mu_C, \mu_D)$, якщо $\mu_A \ge \mu_C$, $\mu_B \ge \mu_D$ – монотонність;

$T(\mu_A, \mu_B) = T(\mu_B, \mu_A)$ – комутативність;

$T(\mu_A, T(\mu_B, \mu_C)) = T(T(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$ – асоціативність.

Простими випадками трикутних норм є розглянуті раніше групи операторів.

Розглянемо більш детально Означення теоретико-множинних операцій, запропонованих Лотфі Заде [11].

Означення 1.14. Доповненням нечіткої множини $\tilde{A}$ називається нечітка множина $\neg\tilde{A}$ **,** яка визначається за формулою:

$$\neg\tilde{A} = \{ < \mu_{\neg A}(x)/x > \}, x \in X,$$

де - $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Позначення: $\neg\tilde{A}$

Зауважимо, що в теорії нечітких множин оператор доповнення не є єдиним. Крім загальновідомого $\forall x\ \mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$, існує багато інших операторів доповнення нечіткої множини.

Нехай задано деяке відображення λ: [0; 1] → [0; 1]. Це відображення отримає назву оператора заперечення в теорії нечітких множин, якщо виконуватимуться такі умови:

(1) $\lambda(0) = 1$; $\lambda(1) = 0$;

(2) $\mu_A \le \mu_B \Rightarrow \lambda(\mu_A) \ge \lambda(\mu_B)$.

Якщо до того ж λ:

(3) є строго спадною функцією;

(4) є неперервною функцією;

то вона називається строгим запереченням.

Функція λ називається сильним запереченням або інволюцією, якщо наряду з умовами (1) і (2) для неї виконується:

(5) $\lambda(\lambda(\mu_A)) = \mu_A$

Прикладами функції заперечення можуть бути, наприклад, такі:

- класичне заперечення: $\lambda(\mu_A) = \mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$;

- квадратичне заперечення: $\lambda(\mu) = \sqrt{1-\mu(x)^2}$;

- заперечення Сугено: $\lambda(\mu) = \dfrac{1-\mu}{1+k\mu}$, де $-1 < k < \infty$

Доповнення порогового типу: $\lambda(\mu) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \mu \le \alpha, \\ 0, \text{ якщо } \mu > \alpha, \end{cases}$

Будь-яке значення λ, для якого $\lambda(\mu) = \mu$ називають рівноважною точкою. Для будь-якого неперервного заперечення існує єдина рівноважна точка.

Означення 1.15. Об'єднанням $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ нечітких множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ називається найменша нечітка підмножина, що містить в собі як $\tilde{A}$, так і $\tilde{B}$**,** і визначається за формулою:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{ < \mu_{A\cup B}(x)/x > \}, x \in X,$$

де - $\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$, або $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Інакше кажучи, множина $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ є нечіткою множиною, для якої виконується: $\tilde{A} \subseteq \tilde{A} \cup \tilde{B}$; $\tilde{B} \subseteq \tilde{A} \cup \tilde{B}$.

Позначення: $\tilde{A} \cup \tilde{B}$.

Означення 1.16 Перетином $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ нечітких множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ називається найбільша нечітка підмножина, що міститься водночас як у $\tilde{A}$, так і у $\tilde{B}$, і визначається за формулою:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{ < \mu_{A \cap B}(x)/x > \},\ x \in X,$$

де – $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \,\&\, \mu_B(x)$, або $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Інакше кажучи, множина $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ нечітко включається до $\tilde{A}$ і до $\tilde{B}$, тобто: $\tilde{A} \cap \tilde{B} \subseteq \tilde{A}$ і $\tilde{A} \cap \tilde{B} \subseteq \tilde{B}$.

Позначення: $\tilde{A} \cap \tilde{B}$.

На рисунку 1.10 наведене візуальне подання простих операцій над нечіткими множинами, які мають ті ж властивості, що і операції над чіткими множинами:

інволюція - $\neg(\neg\tilde{A}) \approx \tilde{A}$;

ідемпотентність - $\tilde{A} \cup \tilde{A} \approx \tilde{A}$ і $\tilde{A} \cap \tilde{A} \approx \tilde{A}$;

комутативність - $\tilde{A} \cup \tilde{B} \approx \tilde{B} \cup \tilde{A}$ і $\tilde{A} \cap \tilde{B} \approx \tilde{B} \cap \tilde{A}$;

асоціативність - $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} \approx \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C}$ і $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) \approx$ $\approx (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} \approx \tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C}$;

дистрибутивності - $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$,
$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$;

закони де Моргана - $\neg(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \approx \neg\tilde{A} \cap \neg\tilde{B}$, $\neg(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \approx \neg\tilde{A} \cup \neg\tilde{B}$ і т ін.

Зауважимо, що при мінімаксному та алгебраїчному Означеннях операцій для нечітких множин, на відміну від чітких множин, в загальному випадку не виконуються закони суперечності і виключення третього: $\tilde{A} \cap \neg\tilde{A} \neq \varnothing$ і $\tilde{A} \cup \neg\tilde{A} \neq X$, а для обмежених операцій не виконуються властивості ідемпотентності $\tilde{A} \cup \tilde{A} \neq \tilde{A}$ та дистрибутивності

$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$, $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$.

Означення 1.17. Нехай $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ - нечіткі множини на універсальній множині *E*. Кажуть, що $\tilde{B}$ нечітко включається до $\tilde{A}$ ($\tilde{A}$ міститься в $\tilde{B}$), якщо виконується:

$$\forall x \in E,\ \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \quad (\mu_A(x) \supset \mu_B(x)).$$

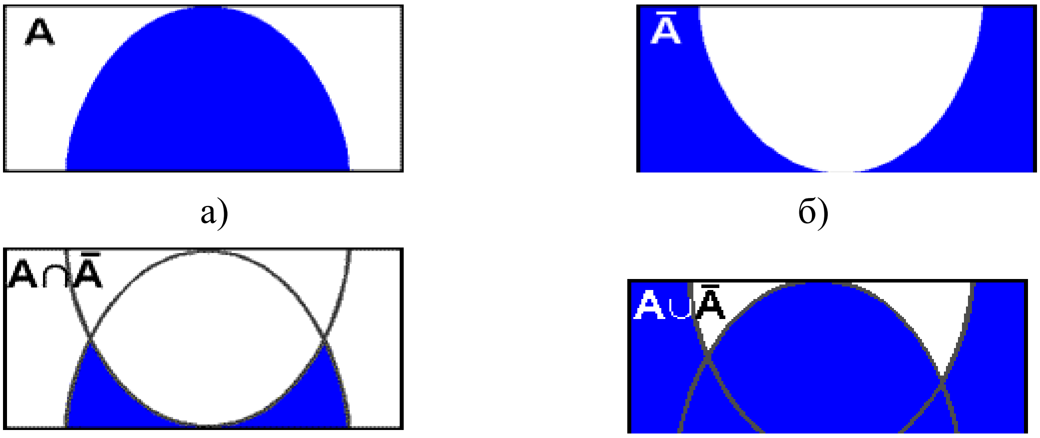
Позначення: $\tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ *(*$\tilde{A} \supset \tilde{B}$*).*

Іноді використовують термін “домінування”, тобто у випадку $\tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ ($\tilde{A} \supset \tilde{B}$), кажуть, що $\tilde{A}$ домінує над $\tilde{B}$.

Означення 1.18. Ступенем включення $\nu(\tilde{A},\tilde{B})$ нечіткої множини $\tilde{A}$ до нечіткої множини $\tilde{B}$ називається величина, яка знаходиться за формулою:

$$\nu(\tilde{A},\tilde{B}) = \underset{x\in X}{\&}\,(\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(x)),$$

де, $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$ – нечіткі висловлювальні змінні, $\rightarrow$ – операція імплікації нечітких висловлювань.



а) б) в) г)

Рисунок 1.10 − Графічне подання операцій над нечіткими множинами: а) нечітка множина $\tilde{A}$ (заштрихована частина рисунка) – область значень $\tilde{A}$ та всіх нечітких підмножин, що містяться в $\tilde{A}$; б) $\neg\tilde{A}$; в) $\tilde{A}\cap\neg\tilde{A}$; г) $\tilde{A}\cup\neg\tilde{A}$

Аналогічно можна визначити і ступінь включення $\nu(\tilde{B},\tilde{A})$ нечіткої множини $\tilde{B}$ до нечіткої множини $\tilde{A}$.

Якщо виконується $\nu(\tilde{A},\tilde{B}) \geq 0{,}5$, то кажуть, що множина $\tilde{A}$ нечітко включається до множини $\tilde{B}$ і позначають:

$$\tilde{A}\subset\tilde{B}.$$

Якщо виконується $\nu(\tilde{A},\tilde{B}) \leq 0{,}5$, то кажуть, що множина $\tilde{A}$ нечітко не включається до множини $\tilde{B}$ і позначають:

$$\tilde{A}\not\subset\tilde{B}$$

Неважко побачити, що поняття нечіткого включення нечітких множин є узагальненням поняття включення чітких множин. Дійсно, якщо A і B - чіткі множини і $A \subseteq B$, то $\nu(\tilde{A},\tilde{B}) = 1$, а якщо $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$, то $\nu(\tilde{A},\tilde{B}) = 0$.

Приклад 1.11. Нехай $X = \{x_1, x_2, ..., x_5\}$,

$$\tilde{A} = \{<0{,}3/x_2>, <0{,}6/x_3>, <0{,}4/x_5>\},$$

$$\tilde{B} = \{<0{,}8/x_1>, <0{,}5/x_2>, <0{,}7/x_3>, <0{,}6/x_5>\}.$$

Тоді:

$\nu(\tilde{A},\tilde{B})$ = (0→0,8) & (0,3→0,5) & (0,6→0,7) & (0→0) & (0,4 → 0,6) =

= 1 & 0,7 & 0,7 & 1 & 0,6 = 0,6;

$\nu(\tilde{B},\tilde{A})$ = (0,8→0) & (0,5→0,3) & (0,7→0,6) & (0→0) & (0,6 → 0,4) =

= 0,2 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 = 0,2.

Отже, отримуємо:

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} \text{ і } \tilde{B} \not\subset \tilde{A}.$$

Підкреслимо, що ступінь включення однієї нечіткої множини до іншої може бути обчислена для будь-яких двох нечітких множин і набуває будь-якого значення з інтервалу [0; 1].

Означення 1.19. Нехай $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ - нечіткі множини на універсальній множині *X*. Кажуть, що $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ є нечітко рівними, якщо виконується:

$$\forall x \in X,\ \mu_A(\mathrm{x}) = \mu_B(\mathrm{x}).$$

Позначення: $\tilde{A} \approx \tilde{B}$.

Означення 1.20. Ступінь рівності $\mu(\tilde{A},\tilde{B})$ нечітких множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ визначається згідно з виразом:

$$\mu(\tilde{A},\tilde{B}) = \underset{x\in X}{\&} (\mu_A(\mathrm{x}) \leftrightarrow \mu_B(\mathrm{x})).$$

Якщо виконується $\mu(\tilde{A},\tilde{B}) \geq 0{,}5$, то кажуть, що множини $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ нечітко рівні, що позначається як $\tilde{A} \approx \tilde{B}$.

Якщо виконується $\mu(\tilde{A},\tilde{B}) \leq 0{,}5$, то кажуть, що множини $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ нечітко нерівні, що позначається як $\tilde{A} \approx \tilde{B}$.

Якщо виконується $\mu(\tilde{A},\tilde{B}) = 0{,}5$, то кажуть, що множини $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ водночас нечітко рівні і нечітко нерівні, тобто індиферентні, що позначається як $\tilde{A} \underset{\cdot}{\sim} \tilde{B}$. Розглянуте поняття є узагальненням поняття рівності чітких множин *A* і *B*. Дійсно, якщо *A* = *B* – маємо $\mu(\tilde{A},\tilde{B}) = 1$, а якщо $A \neq B$, то $\mu(\tilde{A},\tilde{B}) = 0$.

Приклад 1.12. Нехай $X = \{x_1, x_2, ..., x_5\}$,

$\tilde{A} = \{<0{,}8/x_2>, <0{,}6/x_3>, <0{,}1/x_5>\}$,

$\tilde{B} = \{<0{,}3/x_1>, <0{,}6/x_2>, <0{,}7/x_3>, <0{,}2/x_4>, <0{,}3/x_5>\}$.

Тоді:

$\mu(\tilde{A},\tilde{B})$ = (0↔0,3) & (0,8↔0,6) & (0,6↔0,7) & (0↔0,2) & (0,1 ↔ 0,3) =

= 0,7& 0,6 & 0,6 & 0,8 & 0,7 = 0,6.

Отже,

$$\mu(\tilde{A},\tilde{B}) = 0{,}6 \text{ і } \tilde{A} \approx \tilde{B}.$$

Підкреслимо, що ступінь рівності може бути обчислений для будь-яких двох нечітких множин і приймає будь-яке значення з інтервалу [0; 1].

Подамо вираз для ступеня рівності нечітких множин через Означення операції еквівалентності нечітких висловлювань у вигляді:

$$\mu(\tilde{A},\tilde{B}) = \underset{x\in X}{\&} ((\mu_A(x) \to \mu_B(x)) \& (\mu_B(x) \to \mu_A(x))).$$

У зв'язку з комутативністю кон'юнкції отримаємо:

$$\mu(\tilde{A},\tilde{B}) = \underset{x\in X}{\&} (\mu_A(x) \to \mu_B(x)) \& (\underset{x\in X}{\&} (\mu_B(x) \to \mu_A(x))),$$

звідки безпосередньо отримуємо

$$\mu(\tilde{A},\tilde{B}) = \nu(\tilde{A},\tilde{B}) \ \& \ \nu(\tilde{B},\tilde{A}).$$

Якщо $\mu(\tilde{A},\tilde{B}) \geq 0{,}5$, тобто множини $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ нечітко рівні, то і $\nu(\tilde{A},\tilde{B}) \geq 0{,}5$ і $\nu(\tilde{B},\tilde{A}) \geq 0{,}5$. Отже, множина $\tilde{A}$ нечітко включається до множини $\tilde{B}$ і навпаки. Звідси випливає метод доведення нечіткої рівності двох і більше нечітких множин, оснований на доведенні їх взаємної нечіткої рівності.

Означення 1.21 Різницею нечітких множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ називається нечітка множина $\tilde{A} \setminus \tilde{B}$**,** яка визначається за формулою:

$$\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \{ < \mu_{A\setminus B}(x)/x > \}, \ x \in X,$$

де – $\mu_{A\setminus B}(x) = \mu_A(x) \ \& \ \neg\mu_B(x)$, або $\mu_{A\setminus B}(x) = \min\{\mu_A(x), 1-\mu_B(x)\}$.

Позначення: $\tilde{A} \setminus \tilde{B}$.

Означення 1.22. Симетричною різницею (диз'юнктивною сумою) нечітких множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ називається нечітка множина $\tilde{A} \ominus \tilde{B}$**,** яка визначається за формулою:

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \tilde{A} \setminus \tilde{B} \cup \tilde{B} \setminus \tilde{A} = \{ < \mu_{A\oplus B}(x)/x > \}, \ x \in X,$$

де – $\mu_{A\oplus B}(x) = \mu_{A\setminus B}(x) \vee \mu_{B\setminus A}(x)$, або $\mu_{A\oplus B}(x) = \max\{[\min\{\mu_A(x), 1-\mu_B(x)\}], [\min\{1-\mu_A(x), \mu_B(x)\}]\}$.

Позначення: $\tilde{A} \ominus \tilde{B}$**.**

Приклад 1.13**.** Нехай $X = \{x_1, x_2, ..., x_7\}$,

$$\tilde{A} = \{<0{,}3/x_1>, <0{,}8/x_3>, <0{,}4/x_6>\},$$

$$\tilde{B} = \{<0{,}9/x_1>, <0{,}2/x_2>, <0{,}4/x_3>, <0{,}5/x_4>\}.$$

Тоді:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{<0{,}9/x_1>, <0{,}2/x_2>, <0{,}8/x_3>, <0{,}5/x_4>, <0{,}4/x_6>\};$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{<0{,}3/x_1>, <0{,}4/x_3>\};$$

$$\neg\tilde{A} = \{<0{,}7/x_1>, <1{,}0/x_2>, <0{,}2/x_3>, <1{,}0/x_4>, <1{,}0/x_5>, <0{,}6/x_6>, <1{,}0/x_7>\};$$

$$\neg\tilde{B} = \{<0{,}1/x_1>, <0{,}8/x_2>, <0{,}6/x_3>, <0{,}5/x_4>, <1{,}0/x_5>, <1{,}0/x_6>, <1{,}0/x_7>\};$$

$$\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \{<0{,}1/x_1>, <0{,}6/x_3>, <0{,}4/x_6>\};$$

$$\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \{<0{,}7/x_1>, <0{,}2/x_2>, <0{,}2/x_3>, <0{,}5/x_4>\};$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \{<0{,}7/x_1>, <0{,}2/x_2>, <0{,}6/x_3>, <0{,}5/x_4>, <0{,}4/x_6>\}$$

Означення 1.23. Нечітким покриттям довільної непустої множини X називається сукупність $\mathfrak{R}$ нечітких множин, для яких виконуються такі умови:

$$(\forall \tilde{A} \in \mathfrak{R})(\tilde{A} \not\approx \varnothing); \ (\forall \tilde{A} \in \mathfrak{R})(\tilde{A} \subseteq X); \ \bigcup_{\tilde{A} \in \mathfrak{R}} \tilde{A} \approx X.$$

Інакше кажучи, нечітке покриття $\mathfrak{R}$ є сукупністю нечітких підмножин множини X, об'єднання яких нечітко дорівнює множині X. Елементи сукупності $\mathfrak{R}$ називаються класами нечіткого покриття.

Приклад 1.14. Нехай $X = \{1, 2, \dots, 10\}$.

Тоді нечіткі множини:

$\tilde{A}_1 = \{<0{,}3/\,1>, <0{,}7/\,6>, <0{,}9/\,7>, <0{,}2/\,10>\}$;

$\tilde{A}_2 = \{<0{,}5/\,1>, <0{,}8/\,2>, <0{,}4/\,7>, <0{,}9/\,8>, <0{,}6/\,10>\}$;

$\tilde{A}_3 = \{<0{,}8/\,2>, <0{,}9/\,3>, <0{,}7/\,5>, <0{,}3/\,8>, <0{,}9/\,9>, <1/\,10>\}$;

$\tilde{A}_4 = \{<0{,}7/\,3>, <0{,}6/\,4>, <0{,}8/\,5>, <0{,}3/\,7>, <0{,}6/\,8>, <0{,}7/\,9>\}$;

$\tilde{A}_5 = \{<1/\,1>, <0{,}7/\,6>, <0{,}5/\,7>, <0{,}6/\,8>, <0{,}7/\,9>\}$;

Класами покриття є $\mathfrak{R} = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4, \tilde{A}_5\}$.

Клас нечіткого покриття називається максимальним, якщо він нечітко не включається ні в один з інших класів даного покриття. В розглянутому прикладі максимальними є класи $\tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4, \tilde{A}_5$, а клас $\tilde{A}_1$ не є максимальним, оскільки має місце $\tilde{A}_1 \subseteq \tilde{A}_5$.

Нечітким розбиттям множини називається таке покриття, в якому попарний перетин всіх різних нечітких класів покриття є нечітко близьким до пустої множини. Тобто, нечітким розбиттям множини X називається сукупність $\mathfrak{R}$ нечітких множин, для яких виконуються такі умови:

$$(\forall \tilde{A} \in \mathfrak{R})(\tilde{A} \not\approx \varnothing); (\forall \tilde{A} \in \mathfrak{R})(\tilde{A} \subseteq X);$$

$$(\forall \tilde{A} \in \mathfrak{R})(\forall \tilde{B} \in \mathfrak{R})((\tilde{A} \approx \tilde{B})\ \&\ ((\tilde{A} \cap \tilde{B}) \not\approx \text{o})); \ \bigcup_{\tilde{A} \in \mathfrak{R}} \tilde{A} \not\approx X.$$

Елементи сукупності $\mathfrak{R}$ називаються класами нечіткого розбиття множини X.

Приклад 1.15. Нехай $X = \{1, 2, \dots, 5\}$.

Тоді нечіткі множини:

$\tilde{A}_1 = \{<0{,}3/\,1>, <0{,}1/\,2>, <0{,}8/\,3>, <0{,}2/\,4>, <1/\,3>\}$;

$\tilde{A}_2 = \{<0{,}9/\,1>, <0{,}3/\,2>, <0{,}3/\,3>, <0{,}7/\,4>, <0{,}2/\,5>\}$;

$\tilde{A}_3 = \{<0{,}8/\,2>, <0{,}3/\,5>\}$

є нечітким розбиттям множини X.

Означення 1.24. Нехай

$$\tilde{A} = \{<\mu_A(x)/x>\}(x \in X),$$
$$\tilde{B} = \{<\mu_B(y)/y>\}(y \in Y)$$

– нечіткі підмножини множин X і Y, відповідно. Прямим добутком $\tilde{A}\times\tilde{B}$ нечітких множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ називається нечітка підмножина множини $X\times Y$, яка визначається відповідно до виразу:

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \{<\mu_{A\times B}<x, y>/<x, y>>\},\ x\in X,\ y\in Y,$$

де $<\mu_{A\times B}<x, y> = \mu_A(x)\ \&\ \mu_B(y)$.

Приклад 1.16. Нехай $X = \{x_1, x_2\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$,

$$\tilde{A} = \{<0{,}3/x_1>, <0{,}8/x_2>\},$$
$$\tilde{B} = \{<0{,}7/y_1>,<0{,}3/y_2>, <0{,}9/y_3>\}.$$

Тоді:

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \{<0{,}3/<x_1, y_1>,<0{,}3/x_1, y_2>,<0{,}3/x_1, y_3>,$$
$$<0{,}7/x_2, y_1>,<0{,}3/x_2, y_2>\},<0{,}8/x_2, y_3>\}.$$

Розглянемо поняття інверсії і композиції нечітких множин.

Нехай $\tilde{F} = \{<\mu_F< x, y > / < x, y >>\}$, $< x, y > \in X \times Y$ - нечітка підмножина $X \times Y$. Інверсією $\tilde{F}^{-1}$нечіткої множини $\tilde{F}$ називається нечітка множина вигляду:

$\tilde{F}^{-1} = \{<\mu_{F^{-1}}< y, x> / < y, x>>\},< y, x> \in Y\times X$, де $\mu_{F^{-1}}< y, x> = \mu_F< x, y>$.

Нехай тепер: $\tilde{F} = \{<\mu_F< x, y >/<x, y>>\}$, $< x, y > \in X \times Y$ - нечітка підмножина $X \times Y$, а $\tilde{P} =\{<\mu_P< y, z >/< y, z >>\}$, $< y, z > \in Y\times Z$ - нечітка підмножина $Y \times Z$. Композицією $\tilde{F}\circ\tilde{P}$ нечітких множин $\tilde{F}$ і $\tilde{P}$ називається нечітка множина

$$\tilde{F}\circ\tilde{P} = \{<\mu_{F\circ P}< x, z > / < x, z >>\}\ < x, z > \in X \times Z,$$

де $\mu_{F\circ P}< x, z > = \bigvee\limits_{y\in Y}(<\mu_F< x, y >\ \&\ \mu_P< y, z >),\ x\in X, z\in Z$.

Звідси випливає, що ступінь належності пари $< x, z >\in X$ х Z нечіткій множині $\tilde{F}\circ\tilde{P}$ дорівнює найбільшому з мінімумів ступенів належності різних пар $< x, y >\in X\times Y$ і $< y, z >\in Y\times Z$, що композуються, нечітким множинам $\tilde{F}$ і $\tilde{P}$, де як y можуть виступати кілька композиційних елементів.

Приклад 1.17. Нехай:

$\tilde{F} = \{<0{,}3/<x_1, y_1>,<0{,}7/x_2, y_1>,<0{,}9/x_2, y_2>,<1/x_1, y_3>,<0{,}4/x_2, y_3>\}$,

$\tilde{P} = \{<1/<y_1, z_4>,<0{,}2/y_1, z_1>,<0{,}8/y_1, z_3>,<0{,}3/y_2, z_1>,<0{,}4/y_2, z_4>\}$

Визначимо інверсію:

$\tilde{F}^{-1}$ = {<0,3/< y_1, x_1>,<0,7/ y_1, x_2>,<0,9/ y_2, x_2>,<1/ y_3, x_1>,<0,4/ y_3, x_2>}.

Побудуємо композицію:

$\tilde{F} \circ \tilde{P}$ = {<0,3/< x_1, z_4>,<0,2/ x_1, z_1>,<0,3/ x_1, z_3>,<0,7/ x_2, z_4>, <0,7 / x_2, z_3>,<0,3 / x_2, z_1>}.

Наприклад, значення функції належності пари $< x_2, z_1 >$ нечіткій множині $\tilde{F} \circ \tilde{P}$ отримано за допомогою таких розрахунків:

$\mu_{F \circ P} < x_2, z_1 > = (\mu_F < x_2, y_1 > \& \ \mu_P < y_1, z_1 >) \vee ((\mu_F < x_2, y_2 > \& \ \mu_P < y_2, z_1 >)=$
$= (0{,}7 \ \& \ 0{,}2) \vee (0{,}9 \ \& \ 0{,}3) = 0{,}3$.

На завершення відмітимо, що операція композиції нечітких множин має такі основні властивості:

$\tilde{F} \circ (\tilde{P} \circ \tilde{Q}) \approx (\tilde{F} \circ \tilde{P}) \circ \tilde{Q}$ – асоціативність;

$\tilde{F} \circ (\tilde{P} \cup \tilde{Q}) \approx (\tilde{F} \circ \tilde{P}) \cup (\tilde{F} \circ \tilde{Q})$ – дистрибутивність;

$(F \circ P)^{-1} \approx \tilde{P}^{-1} \circ \tilde{F}^{-1}$,

де $\tilde{F}$ і $\tilde{P}$ – нечіткі підмножини $X \times Y$ і $Y \times Z$ відповідно; $\tilde{Q}$ – нечітка підмножина $Z \times W$.

1.4 Відстань між нечіткими множинами

Означення 1.25. Нехай *V* деяка множина, D_+ – множина невід’ємних дійсних чисел, і d: $V \times V \rightarrow D_+$. Кажуть, що $d(x, y)$ – відстань у *V*, якщо при $x, y, z \in V$ виконується:

1) $d(x,y) > 0$;
2) $d(x,y) = d(y,x)$:
3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$;
4) $d(x,x) = 0$.

Найбільш часто для нечітких множин використовуються такі метрики відстаней між нечіткими множинами (функціями належності):

– відстань Хемінга для скінченної базової множини *E*: $|E| = n$:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{i=1}^{n} | \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) |;$$

– відносна відстань Хемінга:

$$\delta(\tilde{A}, \tilde{B}) = (1/n)\, d(\tilde{A}, \tilde{B});$$

– евклідова (або квадратична) відстань для скінченної базової множини *E*: $|E| = n$:

$$\text{e}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}\,;$$

– відносна евклідова відстань:

$$\varepsilon(\tilde{A}, \tilde{B}) = \text{e}(\tilde{A}, \tilde{B})/\sqrt{n} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}\,.$$

Величина e^2 називається «евклідовою нормою»:

$$e^2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2 ,$$

а величина

$$\varepsilon^2(\tilde{A}, \tilde{B}) = e^2(\tilde{A}, \tilde{B})/n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2 .$$

Неважко помітити, що значення $\delta(\tilde{A}, \tilde{B})$ і $\varepsilon(\tilde{A}, \tilde{B})$ знаходяться у діапазоні [0; 1].

Для нескінченної універсальної множини отримуємо:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \int_E |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|\, dx;$$

$$\delta(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{|E|} \int_E |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|\, dx;$$

$$e(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\int_E (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2\, dx} ;$$

$$\varepsilon(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{\sqrt{|E|}} \sqrt{\int_E (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2\, dx} .$$

Очевидно, що можна вигадати та визначити й інші відстані. Вибір тієї або іншої відстані залежить від природи досліджуваної проблеми. Кожна з них має свої переваги та недоліки, які стають очевидними у застосуваннях. Поняття відстані використовується при визначенні ступеня нечіткості множини.

Приклад 1.18. Визначимо відстань між нечіткими множинами $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\tilde{A}$ =	0,7	0,2	0	0,6	0,6	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\tilde{B}$ =	0,2	0	0	0,6	0,8	0,4	1

.

Отримаємо:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = |0{,}7–0{,}2|+|0{,}2–0|+|0–0|+|0{,}6–0{,}6|+|0{,}5–0{,}8|+|1–0{,}4|+|0–1| =$$
$$= 0{,}5+0{,}2+0+0+0{,}3+0{,}6+0{,}1 = 2{,}6;$$

$$\delta(\tilde{A}, \tilde{B}) = (1/7)\, d(\tilde{A}, \tilde{B}) = 2{,}6/7 = 0{,}37;$$

$$e^2(\tilde{A}, \tilde{B}) = (0{,}7–0{,}2)^2+(0{,}2–0)^2+(0–0)^2+(0{,}6–0{,}6)^2+(0{,}5–0{,}8)^2+(1–0{,}4)^2+(0–1)^2 =$$
$$= (0{,}5)^2+(0{,}2)^2+(0)^2+(0)^2+(0{,}3)^2+(0{,}6)^2+(1)^2 = 1{,}74;$$

$$e(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{1{,}74} = 1{,}32;$$

$$\varepsilon(\tilde{A}, \tilde{B}) = e(\tilde{A}, \tilde{B})/\sqrt{7} = 1{,}32/\sqrt{7} = 0{,}49.$$

1.5 Індекси нечіткості

Розглянемо індекси нечіткості або показники розмитості нечітких множин. Якщо об'єкт x має властивість R, що породжує нечітку множину $\tilde{A}$, лише окремою мірою, тобто

$$0 < \mu_A(x) < 1,$$

то внутрішня невизначеність, неоднозначність об'єкта x відносно R проявляється в тому, що він, хоча й у різному ступені, належить одразу двом протилежним класам: класу об'єктів, що "мають властивість R", і класу об'єктів, що "не мають властивості R". Ця неоднозначність максимальна, коли ступені належності об'єкта обом класам рівні, тобто

$$\mu_A(\mathrm{x}) = \mu_{\neg A}(\mathrm{x}) = 0{,}5,$$

і мінімальна, коли об'єкт належить тільки одному класу, тобто

$$\mu_A(\mathrm{x}) = 1 \text{ і } \mu_{\neg A}(\mathrm{x}) = 0,$$

або

$$\mu_A(\mathrm{x}) = 0 \text{ і } \mu_{\neg A}(\mathrm{x}) = 1.$$

У загальному випадку показник розмитості нечіткої множини можна визначити у вигляді функціонала $d(\tilde{A})$ зі значеннями в R (додатна піввісь), що задовольняє такі умови:

– $d(\tilde{A}) = 0$ тоді й тільки тоді, коли A - звичайна множина;
– $d(\tilde{A})$ максимальне тоді й тільки тоді, коли $\mu_A(x) = 0.5$ для усіх $x \in X$;
– $d(\tilde{A}) < d(\tilde{B})$, якщо $\tilde{A}$ є загостренням $\tilde{B}$, тобто:

$$\mu_A(x) \le \mu_B(x) \text{ при } \mu_B(x) < 0{,}5;$$
$$\mu_A(x) \ge \mu_B(x) \text{ при } \mu_B(x) > 0{,}5;$$
$$\mu_A(x) \text{ – будь-яке при } \mu_B(x) = 0{,}5;$$

– $d(\tilde{A}) = d(\neg\tilde{A})$ - симетричність відносно 0,5;
– $d(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = d(\tilde{A}) + d(\tilde{B})$, якщо $d(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \varnothing$.

При введенні конкретних показників розмитості наведену систему аксіом часто використовують лише частково, обмежуючись, наприклад лише першими трьома властивостями, або підсилюючи чи послаблюючи певні властивості в залежності від задачі, що розв'язується.

Розглянемо деякі індекси нечіткості (показники розмитості), які можна визначити з використанням поняття відстані.

Звичайна множина, найближча до нечіткої. Нехай $\tilde{A}$ - нечітка множина. Звичайна множина $\underset{\sim}{A} \subset X$, що є найближчою до $\tilde{A}$, тобто знаходиться на найменшій евклідовій відстані від нечіткої множини $\tilde{A}$, позначається як $\underset{\sim}{A}$, і є підмножиною з характеристичною функцією:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & якщо \ \mu_A(x_i) < 0{,}5; \\ 1, & якщо \ \mu_A(x_i) > 0{,}5; \\ 0 \ або \ 1, & якщо \ \mu_A(x_i) = 0{,}5. \end{cases}$$

Звичайно приймають $\mu_A(x) = 0$, якщо $\mu_A(x_i) = 0{,}5$.

Визначимо ряд індексів нечіткості нечіткої множини $\tilde{A}$, базуючись на понятті звичайної множини, найближчої до нечіткої множини.

Лінійний індекс нечіткості:

$$d(\tilde{A}) = \frac{2}{n}\rho(\tilde{A}, \underline{\tilde{A}}),$$

де $\rho(\tilde{A}, \underline{\tilde{A}})$ - лінійна (хемінгова) відстань, множник - забезпечує виконання умови $0 \le d(\tilde{A}) \le 1$.

Квадратичний індекс нечіткості:

$$d(\tilde{A}) = \frac{2}{\sqrt{n}}\varepsilon(\tilde{A}, \underline{\tilde{A}}), \ 0 \le d(\tilde{A}) \le 1,$$

де $\varepsilon(\tilde{A}, \underline{\tilde{A}})$ – квадратична (евклідова) відстань.

Введені на основі понять відстані і звичайної множини, найближчої до нечіткої, лінійний і квадратичний індекси нечіткості можна визначити і з використанням операції доповнення:

лінійний індекс – $d(\tilde{A}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\min(\mu_A(x_i), \mu_{\neg A}(x_i))$;

квадратичний індекс – $d(\tilde{A}) = \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\min(\mu_A^2(x_i), \mu_{\neg A}^2(x_i))}$;

Відмітимо ряд властивостей, пов’язаних з найближчою звичайною множиною:

$$\tilde{\tilde{A}} \cap \tilde{\tilde{B}} = \tilde{\tilde{B}} \cap \tilde{\tilde{A}};$$
$$\tilde{\tilde{A}} \cup \tilde{\tilde{B}} = \tilde{\tilde{B}} \cup \tilde{\tilde{A}};$$
$$x \in X : |\mu_A(x_i) - \mu_{\neg A}(x_i)| = \mu_{A\cap\neg A}(x_i),$$

звідки для лінійного індексу нечіткості маємо:

$$d(\tilde{A}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_{A\cap\neg A}(x_i),$$

тобто, у цьому поданні стає очевидним, що $d(\tilde{A}) = d(\neg\tilde{A})$.

Нечітку множину з функцією належності

$$2\mu_{A\cap\neg A}(x_i),$$

іноді називають векторним індикатором нечіткості.

Можна оцінювати нечіткість і через поняття ентропії. Обмежимося при цьому випадком скінченної універсальної множини. Ентропія системи з n станами

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n,$$

з якими пов’язані ймовірності

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

визначається виразом:

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i, \; H_{\min} = 0, H_{\max} = 1.$$

Для випадку нечітких множин покладемо:

$$\pi_A(x_i) = \frac{\mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)}.$$

Тоді загальну формулу для підрахунку ентропії за нечіткістю, можна записати у такому вигляді:

$$H(\pi_A(x_1), \pi_A(x_2), \ldots, \pi_A(x_n)) = -\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n}\pi_A(x_i)\ln\pi_A(x_i).$$

Поки що спроби використання ентропії в теорії нечітких множин (у наведеному вигляді) не дали гарних результатів, але роботи з узагальнення поняття ентропії для нечітких множин тривають.

Контрольні запитання

1. Назвіть основні джерела невизначеності в задачах прийняття рішень.
2. Яка принципова відмінність існує між чіткою та нечіткою множиною?
3. Що таке функція належності?

4. Назвіть основні характеристики нечітких множин.
5. Сформулюйте теорему про декомпозицію та доведіть її.
6. Поясніть три основні групи нечітких операторів об'єднання та перетину нечітких множин.
7. Що таке трикутні норма та конорма і для чого вони використовуються?
8. Наведіть вимоги до нечіткого оператора доповнення та наведіть приклади його Означення.
9. Наведіть основні теоретико-множинні операції над нечіткими множинами.
10. Які закони чіткої логіки не виконуються при Означеннях логічних операцій на нечітких множинах.
11. Як визначається ступінь включення нечітких множин?
12. Поясніть поняття домінування однієї нечіткої множини над іншою.
13. Поясніть відмінність між поняттями нечіткого розбиття та нечіткого покриття множини.
14. Як обчислюється композиція нечітких множин? Поясніть «фізичний зміст» цієї операції.
15. Як вимірюється відстань між нечіткими множинами і навіщо потрібні такі вимірювання?
16. Що таке індекс нечіткості нечіткої множини і що він характеризує?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

Мета роботи

Закріплення теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок з формалізації за допомогою нечітких множин понять, що погано формалізуються, створення відповідного програмного забезпечення.

У результаті виконання лабораторної роботи студент повинен вміти:

- створювати нечіткі множини для формалізації опису об'єкта, явища, процесу;
- визначати основні характеристики нечітких множин;
- виконувати математичні операції над нечіткими множинами;
- створювати програмні функції для виконання операцій над нечіткими множинами.

Завдання на підготовку

Студент повинен знати:

- основні поняття нечітких множин;
- форми та методи подання нечітких множин;
- теоретико-множинні операції над нечіткими множинами;
- одну з мов програмування.

Студент повинен вміти:

- створювати програми однією з мов програмування.

Для допуску до виконання роботи необхідно:

- вміти відповісти на теоретичні запитання по ходу виконання роботи;
- дати викладачу заготівку звіту про лабораторну роботу, яка повинна містити титульний лист та опис вибраної предметної області.

Завдання на лабораторну роботу

1. Відповідно до теми курсового проекту сформулювати задачу для формалізації за допомогою нечітких множин.
2. Визначити три основні поняття предметної області курсового проекту.
3. Подати вибрані поняття нечіткими множинами.
4. Створити бібліотеку функцій для виконання операцій над нечіткими множинами.
5. Розробити методику дослідження реалізованих функцій.
6. Здійснити дослідження реалізованих операцій над нечіткими множинами.
7. Зробити висновки щодо адекватності та ефективності подання задачі нечіткими множинами.

Зміст звіту

Титульний лист.
Назва і мета лабораторної роботи.
Теоретична частина:

1. Опис умов задачі.
2. Обґрунтування створених нечітких множин.

Практична частина:

1. Формалізований опис функцій належності нечітких множин.
2. Опис створених функцій для виконання операцій над нечіткими множинами.
3. Методика дослідження реалізованих функцій.
4. Приклади роботи створених функцій, ілюстровані скріншотами.
5. Інструкція користувача по роботі з бібліотекою функцій.
6. Лістинги функцій з коментарями.

Висновки по роботі.

Завдання для виконання

1. Визначте ступінь включення нечіткої множини $\tilde{A}$ до нечіткої множини $\tilde{B}$, і множини $\tilde{B}$ до множини $\tilde{A}$, якщо:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_5\},$$
$$\tilde{A} = \{<0{,}3/x_2>, <0{,}6/x_3>, <0{,}4/x_5>\},$$
$$\tilde{B} = \{<0{,}8/x_1>, <0{,}5/x_2>, <0{,}7/x_3>, <0{,}6/x_5>\}.$$

2. Визначте ступінь включення нечіткої множини $\tilde{A}$ до нечіткої множини $\tilde{B}$, і множини $\tilde{B}$ до множину $\tilde{A}$, якщо:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_6\},$$
$$\tilde{A} = \{<0{,}4/x_1>, <0{,}7/x_2>, <0{,}2/x_3>, <0{,}9/x_5>, <0{,}6/x_6>\},$$
$$\tilde{B} = \{<0{,}8/x_1>, <0{,}4/x_2>, <0{,}5/x_3>, <0{,}7/x_4>, <0{,}9/x_6>\}.$$

3. Визначте ступінь нечіткої рівності нечітких множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$, якщо

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_5\},$$
$$\tilde{A} = \{<0{,}8/x_2>, <0{,}6/x_3>, <0{,}1/x_5>\},$$
$$\tilde{B} = \{<0{,}3/x_1>, <0{,}6/x_2>, <0{,}7/x_3>, <0{,}2/x_4>, <0{,}3/x_5>\}.$$

4. Визначте ступінь нечіткої рівності нечітких множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$, якщо

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_6\},$$
$$\tilde{A} = \{<0{,}3/x_1>, <0{,}9/x_2>, <0{,}2/x_3>, <0{,}5/x_4>, <0{,}8/x_5>, <0{,}6/x_6>\},$$
$$\tilde{B} = \{<0{,}8/x_1>, <0{,}5/x_2>, <0{,}1/x_3>, <0{,}7/x_4>, <0{,}6/x_5>, <0{,}9/x_6>\}.$$

5. Наведіть приклад трьох нечітких множин, які задані на базовій множині $X = \{x_1, x_2, ..., x_5\}$, таких, що ступінь включення першої множини в другу дорівнює 0,4, а першої множини в третю - 0,6. Для наведеного прикладу знайдіть значення ступеня включення другої множини в третю.

6. Наведіть приклад трьох нечітких множин, які задані на базовій множині $X = \{x_1, x_2, ..., x_5\}$, таких, що ступінь нечіткої рівності першої множини з другою дорівнює 0,7, а першої множини з третьою - 0,6. Для наведеного прикладу знайдіть значення ступеня нечіткої рівності другої множини з третьою.

7. Для базової множини $X = \{x_1, x_2, ..., x_6\}$ наведіть приклад чотирьох класів нечіткого покриття, з яких три є максимальними.

8. Для базової множини $X = \{x_1, x_2, ..., x_6\}$наведіть приклад чотирьох класів нечіткого розбиття.

9. Побудуйте композицію нечітких множин:

$$\tilde{F} = \{<0,3/<x_1, y_1>, <0,7/x_2, y_1>, <0,9/x_2, y_2>, <1/x_1, y_3>, <0,4/x_2, y_3>\},$$

$$\tilde{P} = \{<1/<y_1, z_4>, <0,2/y_1, z_1>, <0,8/y_1, z_3>, <0,3/y_2, z_1>, <0,4/y_2, z_4>\} .$$

10. Побудуйте варіант вихідних нечітких множин $\tilde{F}$ і $\tilde{P}$, композиція яких дорівнює:

$$\tilde{F} \circ \tilde{P} = \{<0,3/<x_1, z_4>, <0,2/x_1, z_1>, <0,3/x_1, z_3>, <0,7/x_2, z_4>,$$
$$<0,7 / x_2, z_3>, <0,3 / x_2, z_1>\}.$$