
МАТЕМАТИКА

А. М. Балонишников, В. А. Балонишникова,
А. В. Копыльцов

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ МЕТОДАМИ ФАРМЕРА–СИДОРОВИЧА И БОКСА–ДЖЕНКИНСА

Исследована возможность прогнозирования временных рядов на примере курсов основных валют с помощью моделей Фармера–Сидоровича и Бокса–Дженкинса. Результаты математического моделирования показали, что использование модели ближайших соседей позволяет делать удовлетворительный прогноз на три шага (трое суток) вперед при наличии детерминированного хаоса в курсах валют. Модель ARIMA не следует использовать в данных обстоятельствах.

Ключевые слова: временной ряд, модель ближайших соседей, модель ARIMA, курс валют.

A. M. Balonishnikov, V. A. Balonishnikova, A. V. Kopyltsov

PREDICTION OF TIME SERIES BY BOX–JENKINS AND FARMER–SIDOROWICH METHODS

The possibilities of time series forecast for main currency exchange rates were investigated. Modeling was performed by Farmer–Sidorowich and Box–Jenkins models. Forecast by means of “nearest neighbor” model demonstrate good results for 3 steps (3 days) ahead in situation of deterministic chaos in exchange rates. ARIMA model is not applicable in such conditions.

Keywords: time series, «nearest neighbor» model, ARIMA model, currency exchange rates.

Исследование временных рядов в поведении экономических систем восходит к работам Слуцкого [23], Юля [26], Фриша [15] и др. В работе [23] показано, что если простые нелинейные уравнения дополняются воздействиями типа белого шума, то можно воспроизвести некоторые макроскопические циклы. Однако некоторые специалисты, в частности Хикс [16], сомневаются в плодотворности такого подхода. После работы Лоренца [18] стало ясно, что хаотическое поведение как реальных, так и модельных систем может быть объяснено специальным видом нелинейностей, входящих в законы движения эволюционирующих систем, при этом шумы могут полностью отсутствовать в этих законах. В этом случае обычно говорят о детерминированном хаосе. В одной из книг по исследованию хаотических процессов Медиио [20] подчеркивается, что очень важно знать, в какой степени процесс является детерминированным хаосом или же стохастическим процессом со случайным воздействием типа белого шума (стохастический хаос). Это может иметь не только

экономическое, но и управленческое значение. Если флуктуации в бизнес-цикле являются следствием нелинейностей, то можно рекомендовать руководителям проводить антициклическую политику, которая изменяет управляющие параметры системы. Если же флуктуации являются следствием шумов, то вмешательство извне по изменению управляющих параметров может привести даже к ухудшению предсказуемости развития экономической системы. Можно отметить, что иногда процесс является регулярным и полностью предсказуемым, хотя внешне он может выглядеть как непериодический и непредсказуемый. Недостатки классических моделей эконометрики отражены в работах [19; 21].

Начало математическому исследованию хаоса в курсах валют было заложено в работах Брока [8–11], в которых исследованы курсы валют на американских и канадских биржах. Надежными показателями детерминированного хаоса (после фильтрации шумов), исключаяющими регулярное движение, является положительность старшего показателя Ляпунова или положительность энтропии Колмогорова. Являются ли ряды обменных курсов основных валют России — евро к рублю и доллара к рублю, согласно Центробанку, регулярным процессом, детерминированным хаосом или стохастическим хаосом? Расчеты старшего показателя Ляпунова с помощью компьютерной программы [25], спектров мощности и спектров сингулярных чисел методом [17], приведенных в работе [1], позволили сделать следующие выводы. Преобладание детерминированного хаоса в колебаниях курсов обеих валют — на исследованном временном интервале с 1 января 2007 года по 26 мая 2007 года (146 членов в каждом ряду валют). Отметим, что теория детерминированного хаоса сформулирована для бесконечных временных рядов. Реальные ряды экономических данных, в частности для курсов валют, имеют относительно небольшое число членов по сравнению с рядами в естественных науках, что делает полученные результаты уязвимыми для критики. Анализ работ в этом направлении приведен в работе [12]. Одна из последних работ — это работа [13], в которой выявлено как наличие детерминированного хаоса, так и нелинейностей для обменных курсов валют 12 стран Южной Азии. В России прогнозам динамики временных рядов методами теории хаоса посвящены работы [2–4].

Нами был проведен прогноз временных рядов курсов валют (доллара к рублю и евро к рублю) на основе данных, представленных на сайте Центробанка России. Для определенности, были выбраны данные с 1 января 2007 г. по 26 мая 2007 г. включительно (промежуток между соседними членами ряда составлял 1 сутки, всего — 146 членов). Прогноз осуществлялся двумя методами: методом ближайших соседей Фармера–Сидоровича [14] и методом ARIMA Бокса–Дженкинса [7] и для расчетов использовались программные пакеты STASTISTICA.6 и MatLab.6 [5].

Метод ближайших соседей. Иногда источником случайного поведения систем является детерминированный (динамический) хаос, который может порождаться, в частности, нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть имеется некоторый эволюционный процесс, происходящий в M -мерном пространстве. Этот процесс задается системой, состоящей из M дифференциальных уравнений. Неизвестным является M -мерный вектор $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_M)$. На практике, особенно для экономических процессов, структура таких уравнений не известна, если речь не идет о чисто математической модели. Известно, как правило, значение одной из компонент процесса вектора x , например, x , взятой через равные промежутки времени τ :

$$x(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots, x(t + (d - 1)\tau), \dots, x(t + (N - 1)\tau).$$

Из одномерного временного ряда конструируем ряд d -мерных векторов, компонентами каждого из этих векторов являются d последовательных компонент исходного ряда x . Так, первым из векторов будет:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= (x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (d - 1)\tau)), \\ \mathbf{y}_2 &= (x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots, x(t + d\tau)) \end{aligned}$$

и т. д.

Согласно Тэкенсу [24], отображение $f: y_2 = f(y_1), y_3 = f(y_2)$ имеет те же топологические свойства, что и отображение, порождаемое исходной системой дифференциальных уравнений. Поскольку величина M обычно не известна, то производят постепенное увеличение величины размерности d , например, до стабилизации корреляционной размерности. Определим эту величину корреляционной размерности стандартным образом [6]:

$$D_2 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln C(l)}{\ln l},$$

где $C(l)$ — корреляционный интеграл:

$$C(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \theta(l - |\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j|),$$

где

$$\begin{aligned} \theta(z) &= 0, \text{ при } z < 0, \\ \theta(z) &= 1 \text{ при } z \geq 0. \end{aligned}$$

Выбор минимальной размерности пространства погружения d является актуальной, но пока не завершённой исследователями задачей. В согласии с работой [14], выбираем в качестве значения d минимальное целое число, превышающее корреляционную размерность D_2 . При этом для оценки D_2 выбиралась достаточно большая размерность погружения, значительно превышающая предположительно D_2 . В наших расчетах была выбрана размерность 20, и корреляционная размерность D_2 оказалась равной $D_2 \approx 2,1$ [1]. Следуя Фармеру и Сидоровичу [14], считаем, что минимальная размерность погружения $d = 3$.

Для многомерного (векторного) временного ряда y_1, y_2, \dots, y_J , где $J = N - d + 1$, делаем прогноз для значения \mathbf{y}_{J+1} . Обозначим прогнозируемое значение \mathbf{y}'_{J+1} . Предполагается (хотя это необязательно), что отображение f — локально линейное. Поскольку все компоненты вектора \mathbf{y}_{J+1} , кроме одной $y_{J+1,d} = x_{N+1}$, известны, то прогноз будет также осуществлен для значения x_{N+1} . Задача сводится к определению коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_d , входящих в соотношение

$$x'_{N+1} = a_0 + a_1 x_{N-d+1} + a_2 x_{N-d} + \dots + a_d x_N.$$

Определим для последнего известного вектора \mathbf{y}_J l ближайших соседей. Для устойчивости процесса должно быть $l \geq d + 1$. В нашем исследовании для определенности выбираем $l = d + 1$, определяя их номера $j(J)$ путем минимизирования квадратичной нормы $|\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_J| \rightarrow \min$. Коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_d определяются из условия минимизации среднеквадратической ошибки

$$\sum_{j(J)} |\mathbf{f}(\mathbf{y}_j) - \mathbf{y}_{j+1}|^2 \rightarrow \min.$$

Находится прогнозируемое значение y'_{J+1} через определение прогнозируемого значения x'_{N+1} . После этого y'_{J+1} считают последним членом векторного ряда и процесс повторяют для нахождения y'_{J+2} и т. д.

Как правило, точность прогноза повышается при наличии более длинного числового ряда. Поэтому были исследованы данные за период с 1 января по 31 декабря 2007 г. для отношений доллара к рублю, а также для бивалютной корзины (0,45 евро/рубль + 0,55 доллар/рубль). На основе полученных прогнозируемых значений на 27, 28, 29, 30, 31 мая для курсов доллара к рублю и евро к рублю были вычислены прогнозируемые значения для бивалютной корзины на эти же даты (рис. 1–3).

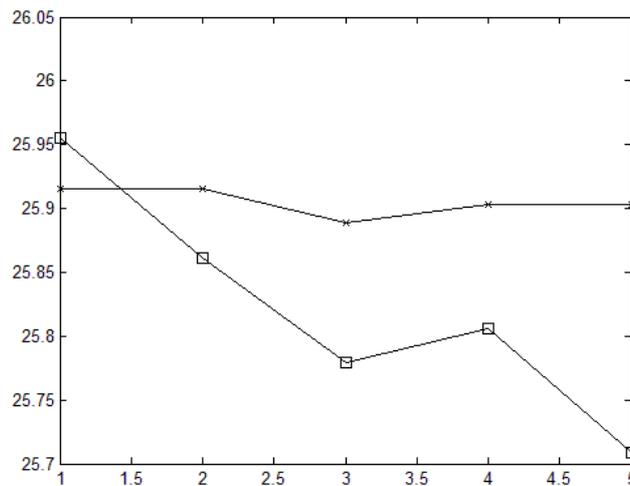


Рис. 1. Прогнозируемые данные — □ и истинные — × на 5 дней вперед для курса доллара к рублю (по Центробанку России) на 27, 28, 29, 30 и 31 мая 2007 г.
По оси абсцисс — дни, а по оси ординат — курс доллара к рублю

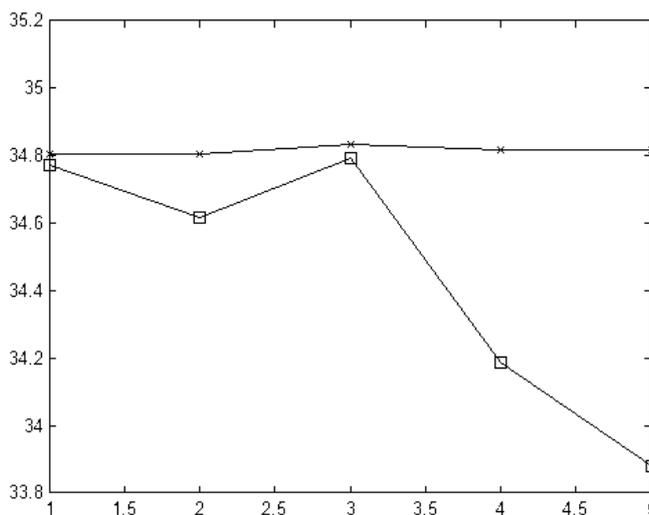


Рис. 2. Прогнозируемые данные — □ и истинные — × на 5 дней вперед для курса евро к рублю (по Центробанку России) на 27, 28, 29, 30 и 31 мая 2007 г.
По оси абсцисс — дни, а по оси ординат — курс евро к рублю

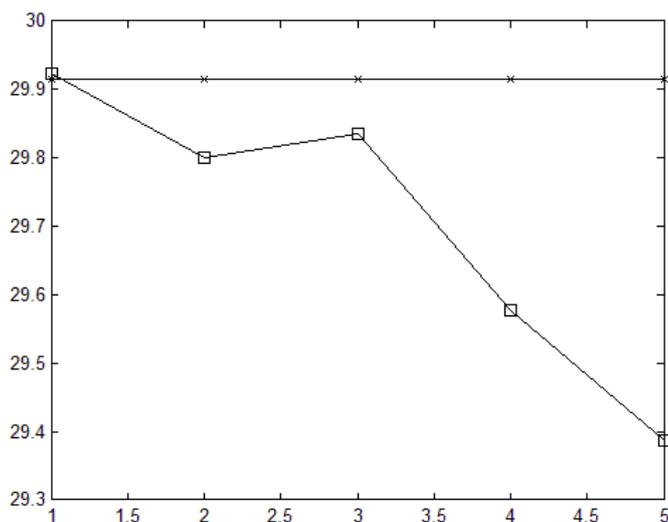


Рис. 3. Прогноз бивалютной корзины на 5 дней вперед (на 27–31 мая 2007 г.):
 □ — прогнозируемые значения, полученные методом ближайших соседей; * — истинные значения.
 По оси абсцисс — дни, а по оси ординат — курс бивалютной корзины к рублю

Прогноз обменного курса валют на основе модели ARIMA. В случае дискретных случайных процессов, например, в случае одномерных временных рядов, среднее временного ряда оценивается по формуле

$$\langle z \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i,$$

где z_i — член временного ряда, N — число членов временного ряда. Аналогично, вариация оценивается как:

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i - \langle z \rangle)^2.$$

В модели ARIMA исключительно большое значение имеют такие понятия, как автокорреляционная функция и частная автокорреляционная функция, поскольку их оценки используются для обрыва уравнения прогноза. Автокорреляция, по определению,

$$\rho_k = \frac{\langle (z_i - \mu)(z_{i+k} - \mu) \rangle}{\sqrt{\langle (z_i - \mu)^2 \rangle \langle (z_{i+k} - \mu)^2 \rangle}}.$$

Зависимость ρ_k от k называют автокорреляционной функцией. По определению, коэффициент Φ_{kj} входит в разложение

$$\rho_j = \Phi_{k1} \rho_{j-1} + \dots + \Phi_{k(k-1)} \rho_{j-k+1} + \Phi_{kk} \rho_{j-k},$$

где $j = 1, 2, \dots, k$.

Зависимость коэффициента Φ_{kk} от k называют частной автокорреляционной функцией. Частную автокорреляционную функцию можно найти по известной корреляционной функции из системы линейных уравнений Юля–Уолкера

$$\begin{pmatrix} 1, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{k-1} \\ \rho_1, 1, \rho_1, \dots, \rho_{k-2} \\ \dots \\ \dots \\ \rho_{k-1}, \rho_{k-2}, \rho_{k-3} \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{k1} \\ \Phi_{k2} \\ \dots \\ \dots \\ \Phi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dots \\ \dots \\ \rho_k \end{pmatrix},$$

откуда

$$\Phi_{11} = \rho_1, \quad \Phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

и т. д.

Согласно Боксу и Дженкинсу, для процесса скользящего среднего (moving average) порядка q автокорреляционная функция $MA(q)$ зануляется, т.е. $\rho_k = 0$ при $k > q$. Так же точно частная автокорреляционная функция (автокорреляционного процесса порядка p) $AR(p)$ зануляется, т.е. $\Phi_{kk}(p) = 0$ при $k > p$. Эти факты служат для определения обрыва ряда для построения прогноза в модели $ARIMA$.

Модель $ARIMA$ (Autoregressive Regressive Integrated Moving Average — Интегрированный процесс авторегрессии — скользящего среднего, авторы Бокс и Дженкинс [7]) — является одной из самых популярных математических моделей предсказания одномерных временных рядов. Эта модель входит в известные коммерческие математические пакеты — такие, как Statistica, Stadia, SPSS, Statgraphics, в расширение пакета Matlab.7, а также в некоторые пакеты, имеющиеся в свободном доступе в Интернете, например, пакет DEMETRA, Genti. Модель $ARIMA$ является обобщением модели $ARMA$ на нестационарные временные ряды. Нестационарный временной ряд дифференцируют d раз. После этого считается, что если d достаточно велико, то ряд становится стационарным и для него можно использовать модель $ARMA$ (объединенная модель авторегрессии и скользящего среднего), затем исходный ряд восстанавливают интегрированием d раз. Например, взятие первой производной от временного ряда x_1, x_2, \dots, x_N означает переход к временному ряду

$$x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_N - x_{N-1}.$$

Модель $ARIMA$ обычно обозначается как $ARIMA(p, d, q)$, где p, d, q — целые числа, большие нуля или равные нулю, и обозначают параметр авторегрессии, порядок интегрирования и скользящего среднего соответственно. Модель $ARMA(p, q)$ описывается соотношением

$$(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i) X_t = (1 + \sum_{i=1}^q \theta_i L^i) \varepsilon_t,$$

где X_t — член временного ряда; t — целый индекс; L — оператор сдвига на один шаг по времени (запаздывание) или “lag”; α_i — параметр авторегрессивной части модели; θ_i — па-

параметры скользящего среднего; ε_t – ошибки, которые предполагаются равномерно распределенными по нормальному закону распределения с нулевым средним.

Пусть полином $(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i)$ имеет единичный корень кратности d . Тогда этот полином может быть переписан как

$$(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i) = (1 + \sum_{i=1}^{p-d} \alpha_i L^i)(1 - L)^d.$$

Теперь ARIMA (p, d, q) процесс можно описать соотношением

$$(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i)(1 - L)^d X_t = (1 + \sum_{i=1}^q \theta_i L^i) \varepsilon_t$$

и этот процесс можно рассматривать как частный случай ARMA(p, d, q) процесса, с полиномом авторегрессии, имеющим некоторые корни, равные единице.

Модели ARIMA часто используются для прогнозирования нестационарных процессов, имеющих легко узнаваемые тренды: постоянный тренд (ненулевое среднее) приводит к $d = 1$, линейный тренд приводит к $d = 2$. В этих случаях ARIMA-модель может рассматриваться как последовательность двух моделей:

- нестационарная модель

$$Y_t = (1 - L)^d X_t;$$

- стационарная модель

$$(1 - \sum_{i=1}^p \theta_i L^i) Y_t = (1 + \sum_{i=1}^q \phi_i L^i) \varepsilon_t.$$

Стандартные методы могут быть использованы для прогноза процесса Y_t и затем, при наличии начальных условий, процесс X_t может быть предсказан с помощью интегрирования. Отметим, что ARIMA(0,1,0) дается соотношением $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ и является обычной моделью случайного блуждания. Если имеем дело с временными рядами нескольких переменных, то используется модель VARIMA. Если моделируемый процесс содержит сезонные составляющие, то обычно используется модель SARIMA. Если моделируемый процесс содержит долговременную зависимость в переменных модели, то часто используют дробный параметр d в рамках модели FARIMA (или ARFIMA).

Мы попытались осуществить прогноз на основе модели ARIMA с использованием пакета СТАТИСТИКА.6 для двух рассматриваемых временных рядов курса двух основных валют (доллар и евро). Согласно теории Бокса–Дженкинса для ARIMA-модели постоянный тренд графиков временных рядов доллар/рубль и евро/рубль, как и у нас в расчетах, соответствует параметр дифференцирования временного ряда $d = 1$, число авторегрессивных членов ряда (AR) соответствует значениям лага, за которым частная автокорреляционная функция зануляется. У нас получилось $p = 1$ для обоих временных рядов. Корреляционные функции проявляют долговременное характерное поведение, что в теории не позволяет применение модели ARIMA. Тем не менее, мы попытались выбрать параметр q достаточно большим ($q=20$), учитывая особенности пакета СТАТИСТИКА, который не предусматривает применения больших параметров q . Применение модели ARIMA(1,1,20) к двум вре-

менным рядам с использованием метода Мелларда [22] привело к плохообусловленным матрицам, что не позволило определить коэффициенты модели и тем самым сделать прогноз.

Выводы

Результаты математического моделирования показали, что использование модели ближайших соседей позволяет делать удовлетворительный прогноз на три шага (трое суток) вперед при наличии детерминированного хаоса в курсах валют. Модель ARIMA не следует использовать в данных обстоятельствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балонишников А. М., Балонишникова В. А. Моделирование обменных курсов основных валют // Журнал прикладной информатики. 2010. № 1(25). С.15–20.
2. Безручко В. П., Смирнов Д. А. Математическое моделирование хаотических временных рядов Саратов: Гос УНЦ «Колледж», 2005. 532 с.
3. Григорьев В. П., Козловских А. В., Марьясов Д. А. Исследование математической модели фьючерсных рынков // Рынок ценных бумаг. 2005. № 9(288). С.38–42.
4. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика. Подходы, результаты, надежды. М.: КомКнига, 2006.
5. Халафян А. А. STATISTICA 6. Статистический анализ данных. М.: Бином, 2010.
6. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
7. Box G. E. P., Jenkins C. M. Time series analysis: Forecasting and control. San Francisco: Holden-Day, 1970.
8. Brock W. A. Distinguishing random and deterministic systems // Journal of Economic Theory. 1986, Vol. 40. P.168–195.
9. Brock W. A. Nonlinearity and complex dynamics in economics and finance // Evolving Complex Systems. Anderson P.W., Arrow K. And Pines A. eds. pp.77–97.
10. Brock W. A., Dechert W.D. and Scheinkmann J. A test for independence, based on correlation dimension. SSR Working Paper N 8702. University of Wisconsin, 1987.
11. Brock W. A. and Sayers C. L. Is the business cycle characterised by deterministic chaos // Journal of Monetary Economics. 1988. Vol. 22. P. 71–90.
12. Cao L., Soofi A. Nonlinear deterministic forecasting of daily dollar exchange rates // International journal of forecasting. 1999. Vol. 15. P. 421–430.
13. Das A., Das P. Chaotic analysis of the foreign exchange rates // Applied Mathematics and Computations, 2007. № 1. P. 388–396.
14. Farmer J. D., Sidorowich J. J. Predicting chaotic time series // Physical Review Letters. 1987, Vol. 59. P. 845–848.
15. Frisch R. Propagation problems and impulse problems in dynamical economics // Economic Essays in Honour of Gustav Cassel. London: Allen and Unwin, 1933. P. 171–205.
16. Hicks J. R. A contribution to the Theory of the Trade Cycle. Oxford: Oxford University Press, 1956.
17. Lih J.-S. et al. Determinism test and noise estimate for a complex time series // Europhysics letters, 1987. Vol.40. № 1. P. 7–12.
18. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of Atmospheric Science. 1963. Vol. 20, P. 90–104.
19. Lorenz H.-W. Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. N.-Y., Springer-Verlag, 1989.
20. Medio A. Chaotic Dynamics theory and Application to Economics. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 344 p.
21. Meese R., Rogoff K. Empirical exchange rate models of the seventies: do they fit out-of-sample? // Journal of international economics. 1983. Vol.14. P. 3–24.

22. *Mellard G. A.* A fast algorithm for the exact likelihood of autoregressive — moving average models. // *Applied statistics*. 1984. Vol. 33. P. 104–119.
23. *Slutsky E.* The summation of random causes as the source of cyclical processes // *Econometrica*, 1925. Vol. 56. P.105–146.
24. *Takens F.* Detecting Strange Attractors in Turbulence // *Lecture Notes in Mathematics*. 1981. Vol. 898, P.366.
25. *Wolf et al.* Determining Lyapunov exponents from time series // *Physica D*. 1985. Vol. 16, P. 285–9317.
26. *Yule G. U.* On the method of investigating periodicities in disturbed series // *Philosophical Transaction*. 1927. Vol. 226A. P. 267–298.

REFERENCES

1. *Balonishnikov A. M., Balonishnikova V. A.* Modelirovanie obmennyh kursov osnovnyh valjut // *Zhurnal prikladnoj informatiki*. 2010. № 1(25). S. 15–20.
2. *Bezruchko V. P., Smirnov D. A.* Matematicheskoe modelirovanie haoticheskikh vremennyh rjadov. Saratov: Gos UNC «Kolledzh», 2005. 532 s.
3. *Grigor'ev V. P., Kozlovskih A. V., Mar'jasov D. A.* Issledovanie matematicheskoy modeli f'juchersnyh rynkov // *Rynok cennyh bumag*. 2005. № 9(288). S. 38–42.
4. *Malineckij G. G., Potapov A. B., Podlazov A. V.* Nelinejnaja dinamika. Podhody, rezul'taty, nadezhdy. M.: KomKniga, 2006.
5. *Halafjan A. A.* STATISTICA 6. Statisticheskij analiz dannyh. M.: Binom, 2010.
6. *Shuster G.* Determinirovannyj haos. Vvedenie. M.: Mir, 1988.
7. *Box G. E. P., Jenkins C. M.* Time series analysis: Forecasting and control. San Francisco: Holden-Day, 1970.
8. *Brock W. A.* Distinguishing random and deterministic systems // *Journal of Economic Theory*. 1986. Vol. 40. P.168–195.
9. *Brock W. A.* Nonlinearity and complex dynamics in economics and finance. // *Evolving Complex Systems*. Anderson P. W., Arrow K. and Pines A. eds. P. 77–97.
10. *Brock W. A., Dechert W. D. and Scheinkmann J.* A test for independence, based on correlation dimension. SSRI Working Paper № 8702. University of Wisconsin, 1987.
11. *Brock W. A. and Sayers C. L.* Is the business cycle characterised by deterministic chaos // *Journal of Monetary Economics*. 1988. Vol. 22. P. 71–90.
12. *Cao L., Soofi A.* Nonlinear deterministic forecasting of daily dollar exchange rates // *International journal of forecasting*. 1999. Vol. 15. P. 421–430.
13. *Das A., Das P.* Chaotic analysis of the foreign exchange rates // *Applied Mathematics and Computations*. 2007. № 1. P. 388–396.
14. *Farmer J. D., Sidorowich J. J.* Predicting chaotic time series // *Physical Review Letters*. 1987. Vol. 59. P. 845–848.
15. *Frisch R.* Propagation problems and impulse problems in dynamical economics // *Economic Essays in Honour of Gustav Cassel*. London: Allen and Unwin, 1933. P. 171–205.
16. *Hicks J. R.* A contribution to the Theory of the Trade Cycle. Oxford: Oxford University Press, 1956.
17. *Lih J.-S. et al.* Determinism test and noise estimate for a complex time series // *Europhysics letters*. 1987. Vol. 40. № 1. P.7–12.
18. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow // *Journal of Atmospheric Science*. 1963. Vol. 20. P. 90–104.
19. *Lorenz H.-W.* Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. N.-Y., Springer-Verlag, 1989.
20. *Medio A.* Chaotic Dynamics theory and Application to Economics. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 344 p.
21. *Meese R., Rogoff K.* Empirical exchange rate models of the seventies: do they fit out-of-sample? // *Journal of international economics*. 1983. Vol. 14. P. 3–24.

22. *Mellard G. A.* A fast algorithm for the exact likelihood of autoregressive — moving average models // Applied statistics. 1984. Vol. 33. P. 104–119.

23. *Slutsky E.* The summation of random causes as the source of cyclical processes // *Econometrica*. 1925. Vol. 56. P. 105–146.

24. *Takens F.* Detecting Strange Attractors in Turbulence // *Lecture Notes in Mathematics*. 1981. Vol. 898. P. 366.

25. *Wolf et al.* Determining Lyapunov exponents from time series // *Physica D*. 1985. Vol. 16. P. 285–9317.

26. *Yule G. U.* On the method of investigating periodicities in disturbed series // *Philosophical Transaction*. 1927. Vol. 226A. P. 267–298.