Тема 2 Перестановки. Підстановки. Визначник та його властивості

Перестановкою n натуральних чисел $1, 2, ..., n$ називається довільний впорядкований набір цих чисел.

Приклад. Перестановками чисел 1, 2, 3 є $(2, 1, 3)$, $(3, 1, 2)$, $(2, 3, 1)$.

Теорема. Існує $n!$ різних перестановок з n елементів.

Інверсією в перестановці називається пара елементів (i, j) таких, що $i > j$ та i перебуває лівіше j. Кількість інверсій у перестановці G позначається $inv(G)$.

Приклад. а) У перестановці $(2, 1, 4, 3, 5)$ число 2 утворює інверсію $(2, 1)$, 1 не утворює інверсій, 4 – $(4, 3)$, 3 та 5 – не утворюють. Отже, $inv(2, 1, 4, 3, 5) = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 = 2$.

б) Наведемо всі інверсії перестановки $(7, 1, 5, 6, 2, 4, 3)$: $(7,1)$, $(7,5)$, $(7,6)$, $(7,2)$, $(7,4)$, $(7,3)$; $(5,2)$, $(5,4)$, $(5,3)$; $(6,2)$, $(6,4)$, $(6,3)$; $(4,3)$. Підрахуємо їх кількість: $inv(7, 1, 5, 6, 2, 4, 3) = 6 + 0 + 3 + 3 + 1 + 0 = 13$.

Перестановка називається **парною**, якщо в ній число інверсій парне, непарною – у противному випадку (див. попередній приклад).

Транспозицією називається таке перетворення перестановки, при якому міняються місцями два елементи перестановки (не обов'язково ті, що стоять поруч), а всі інші залишаються на місці. Всі $n!$ перестановок з n чисел $1, 2, ..., n$ можна розташувати в такому порядку, що кожна наступна буде отримуватись з попередньої однією транспозицією, причому починати можна з будь-якої перестановки.

Теорема. Будь-яка транспозиція змінює парність перестановки.

Підстановкою n-го порядку (степеня) називають взаємно однозначне відображення множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ у себе. Зазвичай підстановки записують у вигляді матриці розміру $2 \times n$. У першому рядку розміщуються елементи від 1 до n (прообрази), а в другому рядку – елементи, в які вони відображаються (образи).

Приклад. Підстановка четвертого порядку $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Підстановка – це дві перестановки, записані одна під іншою у вигляді матриці. Підстановка називається **парною (непарною)** якщо сума інверсій в обох рядках є числом парним (непарним).

Приклад. $inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = inv(1 \quad 2 \quad 4 \quad 3) + inv(3 \quad 4 \quad 1 \quad 2) = 1 + 4 = 5$,

отже підстановка непарна.

Зауваження. Якщо в підстановці поміняти місцями стовпці, то одержимо іншу форму запису тієї ж підстановки.

Приклад. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Парність підстановки не залежить від форми її запису.

Приклад. $inv\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$, $inv\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$.

***Визначником (детермінантом) квадратної матриці** A **порядку** n* називається число $\det A$ (або $|A|$, або Δ), що дорівнює сумі $n!$ доданків, кожний з яких є добутком n елементів цієї матриці, взятих по одному з кожного рядка та кожного стовпця зі знаком «плюс», якщо підстановка, складена з індексів елементів цього добутку, парна та зі знаком «мінус», якщо непарна.

Позначення: при

$$n = 1, \qquad A = (a_1), \qquad \det A = a_1;$$

$$n = 2, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$n = 3, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\ldots$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення детермінанта матриці порядку n, з якого випливає правило його обчислення, є досить складним для сприйняття й застосування. Однак відомі методи, що дозволяють обчислити визначники високих порядків на основі визначників нижчих порядків.

Обчислення визначника 2-го порядку ілюструється схемою:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 27.$$

При обчисленні визначника 3-го порядку зручно користуватися:

– **правилом трикутників**, яке ілюструється схемою:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

– правилом **прямих (правилом Саррюса)**, яке ілюструється схемою:

$$\begin{array}{c} \text{«+»} \qquad \text{«–»} \\ \det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right. = \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Властивості визначників

1. Визначник не змінюється при транспонуванні, тобто $\det A = \det A^t$.

2. Якщо один з рядків визначника складається з нулів, то визначник дорівнює нулю.

3. При перестановці двох рядків визначник змінює знак.

4. Визначник, що має два однакові рядки, дорівнює нулю.

5. Якщо всі елементи рядка визначника помножити на деяке число k, то сам визначник помножиться на число k.

6. Визначник, що містить два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

7. Якщо елементи будь-якого стовпця визначника являють собою суми двох доданків, то визначник може бути розкладений на суму двох відповідних визначників. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33}+c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо один з рядків визначника є лінійною комбінацією інших його рядків, то визначник дорівнює нулю.

9. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного його рядка додати відповідні елементи іншого його рядка, помножені на одне і те саме число.

Мінором елемента a_{ij} визначника Δ n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, отриманий з Δ шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця (на перетині яких перебуває обраний елемент). Позначення: M_{ij}.

Приклад. Для визначника $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ запишемо мінори M_{12} елемента $a_{12} = -2$ та M_{31} елемента $a_{31} = 6$: $M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 24 = 15$, $M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника Δ називається його мінор, узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Приклад. Для визначника $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ запишемо такі алгебраїчні доповнення $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -15$, $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 7$.

10. ***Теорема*** (*Розкладання визначника за елементами деякого рядка або стовпця*). Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (або стовпця) на відповідні їм алгебраїчні доповнення, тобто $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ (або $\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}$).

Ця властивість є способом обчислення визначників вищих порядків.

Приклад. Розкладемо визначник за першим рядком:

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = 19.$$

11. Сума добутків елементів якого-небудь рядка визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка цього ж визначника дорівнює нулю, тобто $a_{m1}A_{l1} + a_{m2}A_{l2} + \ldots + a_{mn}A_{ln} = 0,\ m \neq l$.

12. Визначник трикутної (верхньотрикутної або нижньотрикутної) матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

13. Визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників $det(A \cdot B) = det\, A \cdot det\, B$.

Алгебраїчним доповненням мінору M визначника Δ називається мінор, отриманий з Δ викреслюванням стовпців та рядків, на перетині яких стоять елементи мінору M, взятий зі знаком «+», якщо сума номерів цих рядків та стовпців є числом парним та зі знаком «–», якщо непарним.

Теорема Лапласа. Зафіксуємо k рядків визначника n-го порядку. Тоді визначник дорівнює сумі добутків всіх визначників k-го порядку, що містять елементи цих k рядків, на їх алгебраїчні доповнення.