## *Тема 1 Матриці. Дії з матрицями*

**Матрицею** розміру (розмірності) $m \times n$, де $m$ – число рядків, $n$ – число стовпців, називається прямокутна таблиця з $m \cdot n$ елементів деякої множини. Якщо елементами матриці є числа, то матриця називається числовою, якщо вектори, то – векторною, якщо функції, то – функціональною. Розглянемо числову матрицю. Місце кожного елемента $a_{ij}$ матриці однозначно визначається номером рядка $i$ й стовпця $j$, на перетині яких він знаходиться. Позначають:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\text{або } A_{m\times n} = (a_{ij}), \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Матриця, у якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається **квадратною** (квадратну матрицю розмірності $n \times n$ називають матрицею $n$-го порядку і позначають $A_{n\times n}$ або $A_n$).

Елементи $a_{ii}$, $i = \overline{1,n}$, у яких номери рядка й стовпця, на перетині яких вони знаходяться, співпадають, утворюють **головну діагональ**.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, окрім головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається **діагональною**.

Діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається **одиничною**. Позначають:

$$E_1 = (1),\ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \dots,\ E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається **верхньотрикутною (нижньотрикутною)**, якщо всі елементи, розташовані нижче (вище) головної діагоналі, дорівнюють нулю.

*Приклад.* Верхньотрикутна $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ та нижньотрикутна

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ матриці.

Квадратна матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається **нульовою** і позначається:

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриці $A_{m\times n}$ і $B_{m\times n}$ називаються **рівними**, якщо вони мають однакові розміри й рівні відповідні елементи, тобто

$$A = B\text{, якщо } a_{ij} = b_{ij}\text{, де } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Якщо для всіх елементів матриці виконується умова $a_{mn} = a_{nm}$ (симетрія відносно головної діагоналі), то матриця називається **симетричною**.

*Приклад.*

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матриця, що містить один рядок, називається **вектором** або **матрицею-рядком,** а матриця, що містить один стовпець, також називається **вектором** або **матрицею-стовпцем.** Їх вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \text{ – матриця-стовпець,} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \text{ – матриця-рядок.}$$

Матриця розміру $1\times 1$, що складається з одного числа, ототожнюється з цим числом, тобто $(5)_{1\times 1}$ є число 5.

***Транспонування матриць***

Матриця, отримана з даної заміною кожного її рядка стовпцем з тим же номером, називається матрицею, **транспонованою** до даної. Позначають: $A^T$ або $A^t$.

*Приклад.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспонування матриць має таку властивість: $\left(A^t\right)^t = A$.

***Додавання матриць***

Сумою двох матриць $A$ і $B$ однакового розміру називається матриця $C$ того ж розміру, кожний елемент якої є сумою відповідних елементів матриць-доданків, тобто якщо $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ й $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)$, то $C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n} = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$, де $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

*Приклад.*

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & -3+3 & 0+(-1) \\ 4+(-2) & 5+(-5) & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно визначається **різниця матриць**: $C_{m\times n} = A_{m\times n} - B_{m\times n} = (a_{ij} - b_{ij})$, де $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

### *Множення матриці на число*

**Добутком матриці** $A_{m\times n} = (a_{ij})$ **на дійсне число** $k \in R$ називається матриця $B_{m\times n} = kA$, кожний елемент якої є добутком відповідного елемента матриці $A$ та числа $k$, тобто $B = kA = (b_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$, де $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

*Приклад.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матриця $-A$ такого ж розміру, що і матриця $A$, називається **протилежною** до матриці $A$, якщо $A + (-A) = \Theta$. Наслідком з цього є рівність $(-1)A = -A$

Різницю матриць $A - B$ можна визначити й так: $A - B = A + (-B)$.

*Властивості операцій додавання матриць і*
*множення матриці на число*
*($A, B, C$ – матриці, $\alpha, \beta \in R$):*

1. $A + B = B + A$ – комутативність додавання;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ – асоціативність додавання;
3. $A + \theta = A$;
4. $A + (-A) = \theta$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$ – дистрибутивність;
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$ – дистрибутивність;
8. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$ – асоціативність.

### *Добуток матриць*

**Добутком** матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на матрицю $B_{n\times p} = (b_{jk})$ називається матриця $C_{m\times p} = (c_{ik})$, кожний елемент $i$-ого рядка й $k$-ого стовпця якої дорівнює сумі добутків відповідних елементів $i$-ого рядка матриці $A$ та $k$-ого стовпця матриці $B$, тобто

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}, \text{ де } i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,p}.$$

*Зауваження 1.* Добуток матриць можливий у випадку, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої.

*Зауваження 2.* Якщо квадратні матриці $A$ й $B$ одного порядку, то добутки $AB$ й $BA$ завжди існують.

*Приклад.* Знайти добутки $A \cdot B$ та $B \cdot A$ матриць: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

*Розв'язання*:

а) $A_{2\times2} \cdot B_{2\times2} = C_{2\times2}$,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot5+3\cdot6 & 1\cdot7+3\cdot8 \\ 2\cdot5+4\cdot6 & 2\cdot7+4\cdot8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 31 \\ 34 & 46 \end{pmatrix};$$

$B_{2\times2} \cdot A_{2\times2} = D_{2\times2}$,

$$D = BA = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot1+7\cdot2 & 5\cdot3+7\cdot4 \\ 6\cdot1+8\cdot2 & 6\cdot3+8\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 29 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}.$$

б) $A_{3\times1} \cdot B_{1\times3} = C_{3\times3}$,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2 & 1\cdot4 & 1\cdot1 \\ 4\cdot2 & 4\cdot4 & 4\cdot1 \\ 3\cdot2 & 3\cdot4 & 3\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix};$$

$B_{1\times3} \cdot A_{3\times1} = D_{1\times1}$,

$$D = BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+4\cdot4+1\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \end{pmatrix}.$$

*Зауваження 3.* У загальному випадку добутки $AB$ й $BA$ не дорівнюють один одному: $AB \neq BA$.

Матриці $A$ та $B$ називаються **переставними**, якщо $AB = BA$.

Добуток $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$ називається $n$ -им степенем матриці $A$.

*Властивості операцій транспонування, множення,*
*додавання матриць і множення матриці на число*
*($A, B, C$ – матриці, $\alpha, \beta \in R$), якщо записані операції мають сенс:*

1. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;
2. $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$;
3. $A\cdot E = E\cdot A = A$;
4. $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$;
5. $\alpha\cdot(A\cdot B) = (\alpha A)B$;
6. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$;
7. $(A+B)^t = A^t + B^t$;
8. $(AB)^t = B^t A^t$.