## *Тема 3 Методи знаходження оберненої матриці*

Нехай $A$ – квадратна матриця $n$-го порядку.

Квадратна матриця називається **невиродженою**, якщо її визначник відмінний від нуля. А якщо визначник дорівнює нулю, то матриця називається **виродженою**.

*Приклад.* Визначимо, при яких значеннях $\lambda$ матриця $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ \lambda & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ вироджена. Для цього знайдемо її визначник:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ \lambda & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=3+2\lambda-12+2\lambda=4\lambda-9.$$

Матриця буде виродженою, якщо її визначник дорівнюватиме нулю. Отже:

$$|A|=0 \Rightarrow 4\lambda-9=0,\ \lambda=\frac{9}{4}.$$

*Відповідь:* При $\lambda=\frac{9}{4}$ матриця $A$ вироджена.

**Оберненою** до матриці $A$ називається матриця $A^{-1}$, якщо виконується умова $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, де $E$ – одинична матриця того ж порядку, що й матриця $A$.

Матриця $A^{-1}$ має той самий порядок, що й матриця $A$.

**Теорема.** Кожна не вироджена матриця має обернену.

*Приклад.* Визначимо, при яких значеннях $\lambda$ матриця $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ \lambda & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ має обернену. З попереднього прикладу видно, що при $\lambda=\frac{9}{4}$ матриця вироджена, отже оберненої не має; при $\lambda\neq\frac{9}{4}$ матриця не вироджена, тому обернена до неї матриця існує.

*Властивості оберненої матриці:*

1. $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det A}$;
2. $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;
3. $\left(A^{-1}\right)^{t}=\left(A^{t}\right)^{-1}$.

Матрицю, обернену до даної, можна знайти, використовуючи один з двох методів:

1. *метод алгебраїчних доповнень*:
   - обчислити визначник даної матриці: $det\,A\neq 0$;

- обчислити алгебраїчні доповнення $A_{ij}$ всіх елементів даної матриці;
- записати обернену матрицю у вигляді:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. *метод приєднання одиничної матриці*:
   - приєднати (приписати справа) до даної матриці одиничну матрицю того ж порядку: $(A \mid E)$;
   - привести записану матрицю до виду $(E \mid B)$ за допомогою елементарних перетворень рядків матриці;
   - записати $A^{-1} = B$.