Тема 4 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Теорема Крамера. Матричний метод розв'язання СЛАР

Розглянемо систему m рівнянь із n невідомими виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Вона називається системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Ця система характеризується матрицею

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

яка називається **розширеною матрицею системи**. Її розмір – $m \times (n+1)$. Матриця, що стоїть ліворуч від вертикальної риски, називається **матрицею системи**. Елементами матриці системи є коефіцієнти при невідомих. Матриця, що стоїть праворуч від вертикальної риски, називається **стовпцем вільних членів**.

СЛАР називається **однорідною**, якщо стовпець вільних членів нульовий.

Розв'язком системи рівнянь називають будь-яку впорядковану сукупність дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, яка має таку властивість: кожне рівняння системи перетворюється в тотожність, якщо покласти в ньому $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n$.

СЛАР називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок. Якщо система не має розв'язків, вона називається **несумісною**. Однорідна система є завжди сумісною, тому що має нульовий (**тривіальний**) розв'язок: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$. Крім нульового розв'язку, в однорідної системи можуть бути й ненульові розв'язки.

Теорема. Якщо число рівнянь однорідної системи менше числа невідомих, то система має нетривіальні розв'язки.

Якщо СЛАР має більше одного розв'язку, вона називається **невизначеною**, а якщо має єдиний розв'язок, то **визначеною**.

Дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються **еквівалентними** (**рівносильними**), якщо кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої і навпаки.

Методи розв'язання СЛАР. Метод Крамера

Розглянемо систему *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими ($n \geq 2$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2\,, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n = b_n\,. \end{cases} \tag{*}$$

Одержимо явні вирази для розв'язку цієї системи через коефіцієнти a_{ij} й вільні члени b_i в припущенні, що визначник матриці системи не дорівнює нулю.

Теорема Крамера. Якщо визначник матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (*):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля, то система (*) має єдиний розв'язок, тобто є сумісною й визначеною. Цей розв'язок визначається за правилом Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ_i – визначник, який отримано з визначника Δ заміною i-го стовпця стовпцем вільних членів.

Наслідок. Якщо система n однорідних лінійних рівнянь із n невідомими має хоча б один нетривіальний розв'язок, то її визначник дорівнює нулю.

Зауваження. Система лінійних алгебраїчних рівнянь (*):

1) має єдиний розв'язок при $\Delta \neq 0$;
2) має нескінченну множину розв'язків при $\Delta = \Delta_i = 0$, $i = \overline{1,n}$;
3) не має жодного розв'язку, якщо $\Delta = 0$ й хоча б один з визначників Δ_i, $i = \overline{1,n}$, відмінний від нуля.

Приклад. Визначте, чи є система сумісною, несумісною, визначеною, невизначеною. У випадку визначеності знайдіть розв'язки системи:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 4x - 5y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5y = 3, \\ 4x + 10y = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x + 3y = 7, \\ 10x + 6y = 2. \end{cases}$

Відповідь: 1) $x = 3$, $y = 2$; 2) система не визначена, тому що $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$;

3) система не сумісна, тому що $\Delta = 0$, $\Delta_x = 36$, $\Delta_y = -60$.

Матричний спосіб розв'язання СЛАР

Систему n лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими (*) можна записати в матричному виді: $A \cdot X = B$, де A – матриця системи, X – матриця-стовпець невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$, а B – матриця-стовпець вільних членів. Якщо A – невироджена матриця, то після множення ліворуч на A^{-1} обидві частини матричного рівняння $A \cdot X = B$, одержимо $A \cdot \left(A^{-1} \cdot X\right) = A^{-1} \cdot B$. Так як $A \cdot \left(A^{-1} \cdot X\right) = \left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot X = EX = X$, то очевидно

$$X = A^{-1} \cdot B \,.$$