Тема 5 Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі. Метод Гауса розв'язання СЛАР

Елементарними перетвореннями рядів матриці називають: 1) переміна місцями двох рядків матриці; 2) додавання до елементів одного рядка відповідних їм елементів іншого, помножених на ненульове число.

Теорема. Якщо від матриці $\widetilde{A}$ до матриці $\widetilde{B}$ можна перейти скінченим числом елементарних перетворень рядків, то всякий розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що відповідає матриці $\widetilde{A}$, служить розв'язком системи з матрицею $\widetilde{B}$ і навпаки, тобто розглянуті системи рівнянь еквівалентні.

Матриця називається ступінчастою, якщо в ній під кожним першим ненульовим елементом рядка стоять тільки нулі.

Рангом матриці A називається число $rang\,A$ ненульових рядків в матриці ступінчастого виду.

Теорема (теорема Кронекера-Капеллі) Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи, тобто $rang\,\widetilde{A} = rang\,A$.

Зауваження. 1) Якщо ранг матриці сумісної СЛАР дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок, тобто є визначеною. 2) Якщо ранг матриці сумісної СЛАР менше числа невідомих, то система має нескінченну множину розв'язків, тобто є невизначеною.

Алгоритм розв'язку системи рівнянь (*) ***методом Гауса***:

1. Запишемо розширену матрицю $\widetilde{A}$ вихідної системи рівнянь.
2. Приведемо матрицю $\widetilde{A}$ до ступінчастого виду за допомогою елементарних перетворень рядків. Якщо в отриманій ступінчастій матриці $\widetilde{B}$ є рядок, у якому перший ненульовий елемент перебуває на останньому місці, то вихідна система розв'язків не має (несумісна).
3. Якщо система рівнянь сумісна, то в системі рівнянь із матрицею $\widetilde{B}$ необхідно відкинути рівняння, які відповідають нульовим рядкам матриці $\widetilde{B}$. У рівняннях, що залишилися, виділяємо головні невідомі (визначник, складений з коефіцієнтів при них, не дорівнює нулю), а члени з вільними невідомими переносимо в праві частини.
4. Послідовно виражаємо головні невідомі через вільні, рухаючись від останнього рівняння до першого, отримаємо загальний розв'язок системи.
5. Надаючи вільним невідомим різні числові значення й обчислюючи відповідні значення головних невідомих, одержимо різні розв'язки вихідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, тобто отримаємо частинні розв'язки системи.

Приклад. Розв'яжіть системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x+3y=12, \\ 4x-5y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5y=3, \\ 4x+10y=6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x+3y=7, \\ 10x+6y=2. \end{cases}$

Відповідь: 1) $x=3$, $y=2$; 2) $x=1{,}5-2{,}5y$; 3) $\varnothing$.