

**Тема 7 Систематизація та узагальнення знань з розділів лінійної алгебри:
«Матриці», «Визначники», «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь»**

Дайте відповіді на наступні питання.

1. Чи можна додати матриці розмірами 2×3 і 3×4 ?
2. Чи можна помножити матрицю розмірами 2×3 на матрицю з такими ж розмірами?
3. Які розміри має матриця A , якщо відомо, що $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$?
4. Наведіть приклади рядка A та стовпця B , для яких існує добуток: а) AB ; б) BA ; в) AB и BA ; г) AB , BA та $AB = BA$.
5. Яка матриця відіграє роль одиниці в операції множення матриць з розмірами $n \times n$?
6. Для яких матриць $A_{m \times n}$ існує $A + A'$?
7. Відомо, що $A_{2 \times 3} \cdot B_{m \times n} = C_{2 \times 6}$. Визначте значення m та n .
8. Знайдіть добутки матриць: а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$.
9. Знайдіть $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$.
10. Розв'яжіть матричне рівняння $3A + 2X = E$, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -8 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$
11. Дано матриці $A_{2 \times 3}$, $B_{3 \times 1}$, $C_{3 \times 3}$. Чи існують добутки ABC , ACB , CBA ?
12. Чи існує визначник матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?
13. Як зміниться визначник n -го порядку, якщо всі його стовпці записати в зворотному порядку?
14. Використовуючи властивість лінійності визначника (№ 7), обчисліть
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1+1 & 1 & 1 \\ 1+2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$
15. Як пов'язані між собою доповняльний мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначника матриці n -го порядку?
16. Як зміниться визначник порядку n , якщо перший стовпець переставити на останнє місце, а інші стовпці пересунути вліво, зберігаючи їх порядок?
17. Як зміниться визначник, якщо кожний його елемент замінити елементом, симетричним з даним відносно «центру» визначника?
18. Як зміниться визначник порядку n , якщо у всіх його елементів змінити знак на протилежний?

19. Чому дорівнює визначник, у якого сума рядків з парними номерами дорівнює сумі рядків з непарними номерами?

20. Дано матрицю $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Знайдіть:

а) мінор M , що стоїть на перетині першого, другого та четвертого рядків, першого, третього та четвертого стовпців;

б) мінор, доповняльний до мінору M ;

в) алгебраїчне доповнення до мінору M .

21. Обчисліть визначники:

а) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

22. Використовуючи тільки властивості визначника, доведіть справедливості рівностей:

а) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a)$; б) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$;

в) $\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0$.

23. Користуючись властивостями визначника, обчисліть:

а) $\begin{vmatrix} 2789 & 3453 \\ 2790 & 3454 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.

24. Розв'яжіть рівняння $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

25. Розв'яжіть нерівність $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} > 0$.

26. Знайдіть всі члени визначника

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

що містять x^3 и x^4 .

27. Розв'яжіть матричні рівняння з невідомою матрицею X в загальному вигляді: $AX = B$, $XA = B$, $AX + B = C$, $AXB^{-1}C = C$, $(3X + 4A^{-1})^{-1} \cdot 2 = BC$.
Укажіть умови існування цих розв'язків.

28. Знайдіть невідому матрицю X з рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $X \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $X \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$.

29. Як зміниться обернена матриця A^{-1} , якщо в матриці A :

а) переставити i -ий та k -ий рядки;

б) k -ий рядок помножити на число b , відмінне від нуля;

в) до k -ого рядка прибавити i -ий, помножений на число b , відмінне від нуля?

30. Запишіть систему двох рівнянь з двома невідомими, яка має нескінченно багато розв'язків (єдиний розв'язок).

31. Запишіть систему з найменшим числом невідомих, що має більше невідомих, ніж рівнянь, але не має розв'язків.

32. При яком значенні b сумісна система

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ 3x + 4y + z = b, \\ 2x + 3y - z = 5? \end{cases}$$