ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОГЛИБЛЕННЯ РОЗУМІННЯ ТЕМИ

1. Знайдіть значення визначника n-го порядку методом рекурентних співвідношень:

$$\text{а) } \Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}; \text{ б) } \Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ x_0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

Метод рекурентних співвідношень полягає в наступному: розкладанням за рядком або стовпцем даний визначник виражають через визначники такого ж виду, але меншого порядку. Отримана рівність називається рекурентним співвідношенням.

Для отримання значення визначника довільного порядку, обчисливши з рекурентного співвідношення декілька визначників менших порядків, намагаються «вгадати» загальний вираз шуканого виразу, а потім доводять його справедливість методом математичної індукції.

а) Розглянемо один з частинних випадків, коли рекурентне співвідношення дає алгоритм для розв'язання задачі, що виключає елемент здогадки.

Нехай рекурентне співвідношення має вид

$$\Delta_n = p\,\Delta_{n-1} + q\,\Delta_{n-2},$$

де $n > 2, p$ и q не залежать від n; Δ_{n-1}, Δ_{n-2} – визначники матриць $(n-1)$-ого, $(n-2)$-ого порядків такого ж виду. Розглянемо два випадки:

1) при $q = 0$ $\Delta_n = p\,\Delta_{n-1} = (p\,\Delta_{n-2}) = \dots = p^{n-1}\Delta_1$;

2) при $q \neq 0$ складаємо квадратне рівняння $x^2 - px - q = 0$, коренями якого є числа α та β:

а) якщо $\alpha \neq \beta$, то $\Delta_n = c_1\alpha^n + c_2\,\beta^n$, де

$$c_1 = \frac{\Delta_2 - \beta\,\Delta_1}{\alpha(\alpha - \beta)}, \qquad c_2 = \frac{\Delta_2 - \alpha\,\Delta_1}{\beta\,(\alpha - \beta)};$$

б) якщо $\alpha = \beta$, то $\Delta_n = \alpha^n\,((n-1)c_1 + c_2)$, де

$$c_1 = \frac{\Delta_2 - \alpha\,\Delta_1}{\alpha^2}, \quad c_2 = \frac{\Delta_1}{\alpha}.$$

Проілюструємо наведений алгоритм на прикладі, але спочатку знайдемо значення визначників цього типу першого – четвертого порядків:

$$\Delta_1 = |\,5\,| = 5 = 3^2 - 2^2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 6 = 19 = 3^3 - 2^3,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 125 - 30 - 30 = 65 = 3^4 - 2^4,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3^5 - 2^5.$$

Тепер розглянемо визначник n-ого порядку. Спочатку розкладемо його за першим рядком:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^2 \Delta_{n-1} + 3 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 5 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}.$$

Тут Δ_{n-1} – визначник такого же виду, що й вихідний, але $(n-1)$–ого порядку. Останній визначник в отриманому представленні Δ_n розкладемо за першим стовпцем:

$$5 \cdot \Delta_{n-1} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \end{vmatrix} = 5\Delta_{n-1} - 3 \cdot 2 \cdot (-1)^2 \Delta_{n-2} = 5\Delta_{n-1} - 6\Delta_{n-2}.$$

Таким чином, приходимо до співвідношення $\Delta_n = 5\Delta_{n-1} - 6\Delta_{n-2}$.

Складемо квадратне рівняння виду $x^2 - px - q = 0$, де $p = 5, q = -6$. Коренями його будуть числа $\alpha = 3, \quad \beta = 2$. Так як $\alpha \neq \beta$, то $\Delta_n = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n$, де

$$c_1 = \frac{\Delta_2 - \beta\,\Delta_1}{\alpha(\alpha - \beta)}, \quad c_2 = \frac{\Delta_2 - \alpha\,\Delta_1}{\beta(\alpha - \beta)}.$$

За знайденими значеннями Δ_1, Δ_2 визначаємо: $c_1 = 3$, $c_2 = -2$. Отже, $\Delta_n = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

б) Розглянемо визначники менших порядків для з'ясування приблизної форми визначника $n+1$-ого порядку:

$$\Delta_1 = |\, a_0 \,| = a_0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix} = a_0 x_1 - x_0 a_1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ x_0 & x_1 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = a_0 x_1 x_2 - x_0 a_1 x_2 + x_0 x_1 a_2,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ x_0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = a_0 x_1 x_2 x_3 - x_0 a_1 x_2 x_3 + x_0 x_1 a_2 x_3 - x_0 x_1 x_2 a_3 .$$

На основі цих записів можна припустити, що

$$\Delta_{n+1} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_m \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^{n} x_l .$$

Доведемо правдивість цієї формули методом математичної індукції. При $n = 1$ твердження істинне. Припустимо, що при $n = k$: $\Delta_k = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m a_m \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^{k-1} x_l$.

Доведемо, що при $n = k + 1$: $\Delta_{k+1} = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m a_m \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^{k} x_l$. Для цього розкладемо вихідний визначник за останнім стовпцем:

$$\Delta_{k+1} = (-1)^{k+2} a_k \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{k-1} \end{vmatrix} + (-1)^{2k+2} x_k \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ x_0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{k-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ (-1)^{k+2} = (-1)^k \right\} = (-1)^k a_k \prod_{l=0}^{k-1} x_l + x_k \cdot \Delta_k =$$

$$= (-1)^k a_k \prod_{l=0}^{k-1} x_l + x_k \cdot \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m a_m \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^{k-1} x_l =$$

$$= (-1)^k a_k \prod_{l=0}^{k-1} x_l + \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m a_m \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^{k} x_l = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m a_m \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^{k} x_l .$$

Що і треба було довести.

2. Обчисліть значення визначника, що зводиться до визначника Вандермонда:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1} b_1 & a_1^{n-2} b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1} b_2 & a_2^{n-2} b_2^2 & \cdots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1} b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2} b_{n+1}^2 & \cdots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}, \; a_i \neq 0,\; b_i \neq 0,\; i = \overline{1, n+1}.$$

Розв'язання:

Визначником Вандермонда називається визначник виду:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \mathop{\Pi}_{n \ge i > j \ge 1} \left(x_i - x_j \right).$$

Зведемо даний в умові визначник до визначника такого типу наступним чином: винесемо з першого рядка множник a_1^n, з другого – a_2^n,..., з останнього – a_{n+1}^n. Отримаємо:

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & b_{n+1}^n \end{vmatrix} = a_1^n \ a_2^n \dots a_{n+1}^n \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & b_1/a_1 & b_1^2/a_1^2 & \cdots & b_1^n/a_1^n \\ 1 & b_2/a_2 & b_2^2/a_2^2 & \cdots & b_2^n/a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b_{n+1}/a_{n+1} & b_{n+1}^2/a_{n+1}^2 & \cdots & b_{n+1}^n/a_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n+1} a_{k+1}^n \prod_{n+1 \ge i > j \ge 1} \left(\frac{b_i}{a_i} - \frac{b_j}{a_j} \right).$$

3. Обчисліть визначники n-го порядку:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_0 & a_1 & x & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}, \text{б)} \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a+b_1 & a & \cdots & a \\ a & a & a+b_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+b_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

а) Зведемо матрицю до трикутного виду, для чого віднімемо від кожного її рядка перший рядок. Тоді

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_0 & a_1 & x & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= a_0 (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) = a_0 \prod_{i=1}^{n-1} (x-a_i).$$

б) Перевіряючи отримані знання, читач може впевнитись самостійно, що:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a+b_1 & a & \cdots & a \\ a & a & a+b_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+b_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ 0 & b_1 & a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= ab_1 b_2 \ldots b_{n-1} = a \prod_{i=1}^{n-1} b_i \, .$$