

Приклади розв'язування задач

1. Знайдіть можливі добутки матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Добуток AB існує: $A_{1 \times 2} \cdot B_{2 \times 2} = C_{1 \times 2}$,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6) = (3 + 10 \quad 4 + 12) = (13 \quad 16).$$

Добуток BA – не існує, тому що кількість стовпців матриці B (два стовпці) не дорівнює кількості рядків матриці A (один рядок).

2. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Знайдіть $A^t \cdot B + 2C$.

Розв'язання:

$$1) A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2) A^t B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$3) 2C = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$4) A^t \cdot B + 2C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

3. Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Знайдіть A^3 .

Розв'язання:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

За властивостями добутку матриць: $A^3 = A \cdot A \cdot A = (A \cdot A) \cdot A = A \cdot (A \cdot A)$, тому матриці A та A^2 є переставними: $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A$.

4. Дано дві матриці: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Обчисліть:

а) $11A - \frac{1}{3}B$; б) $A^t - 3B$; в) $B - 2A^2$.

Розв'язання:

а) За означенням добутку матриці на число обчислимо $11A$ та $\frac{1}{3}B$:

$$11A = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 22 \\ 44 & 0 & 11 \\ -11 & -22 & 11 \end{pmatrix}; \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

За правилом додавання матриць отримаємо:

$$C = 11A - \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 22 \\ 44 & 0 & 11 \\ -11 & -22 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{32}{3} & 22 \\ \frac{131}{3} & -\frac{4}{3} & 11 \\ -\frac{32}{3} & -\frac{67}{3} & \frac{28}{3} \end{pmatrix}.$$

б) За означенням транспонованої матриці $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Помножимо

елементи матриці B на 3:

$$3B = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \\ -3 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді } A^t - 3B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \\ -3 & 3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 1 & -1 \\ -2 & -12 & -2 \\ 5 & -2 & -14 \end{pmatrix}.$$

в) Знайдемо матрицю, що дорівнює $B - 2A^2$.

$$2A^2 = 2 \cdot A \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) & 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) & 4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 0 + (-2) \cdot 4 + 1 \cdot (-1) & -1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) & -1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 9 \\ -9 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 6 \\ -2 & 4 & 18 \\ -18 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що за властивостями множення $2 \cdot A \cdot A = (2 \cdot A) \cdot A = 2 \cdot (A \cdot A)$.

$$\text{Тоді } B - 2A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -8 & 6 \\ -2 & 4 & 18 \\ -18 & -6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -6 \\ 3 & 0 & -18 \\ 17 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Матричним рівнянням називають рівняння, невідомим якого є матриця.

Коренем матричного рівняння є матриця, яка при підстановці її у рівняння перетворює його на вірну тотожність. Два рівняння називають **рівносильними**, якщо множини їх розв'язків співпадають. Для розв'язання матричних рівнянь використовують такі перетворення, як додавання до обох частин рівняння однієї і тієї ж матриці (за правилом додавання матриць), множення обох частин рівності на ненульове число, множення обох частин рівності на ненульову матрицю (за правилом множення матриць).

5. Знайдіть матрицю X , якщо $2X + A = B^t$ (A та B – матриці з прикладу 4).

Розв'язання:

Додамо до обох частин даного рівняння матрицю $-A$, а потім помножимо обидві частини на число $\frac{1}{2}$. Отримаємо:

$$X = \frac{1}{2}(B^t - A).$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B^t - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Перевірте, чи виконуються для матриць A та B з прикладу 4 рівності:

а) $(2A + 3B)^t = 2A^t + 3B^t$; б) $(AB)^t = B^t A^t$; в) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Розв'язання:

а) Перевіримо виконання даної рівності. Для цього перетворимо ліву та праву його частини:

$$2A = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}; 3B = 3 \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \\ -3 & 3 & 15 \end{pmatrix};$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \\ -3 & 3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 4 \\ 11 & 12 & 2 \\ -5 & -1 & 17 \end{pmatrix};$$

$$(2A + 3B)^t = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 4 \\ 11 & 12 & 2 \\ -5 & -1 & 17 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 12 & 11 & -5 \\ 5 & 12 & -1 \\ 4 & 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

З іншого боку:

$$2A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}; 3B^t = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \\ -3 & 3 & 15 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 12 & 3 & -3 \\ 3 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix};$$

$$2A^t + 3B^t = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 3 & -3 \\ 3 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & -5 \\ 5 & 12 & -1 \\ 4 & 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо вірну рівність: $(2A + 3B)^t = 2A^t + 3B^t$.

б) За означенням добутку матриць:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \\ 4 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 4 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \\ -1 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & -1 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 6 & 10 \\ 15 & 5 & 5 \\ -7 & -8 & 5 \end{pmatrix}; (AB)^t = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 10 \\ 15 & 5 & 5 \\ -7 & -8 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 15 & -7 \\ 6 & 5 & -8 \\ 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

З іншого боку:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 15 & -7 \\ 6 & 5 & -8 \\ 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Рівність вірна.

в) Знайдемо квадрат суми матриць:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 14 & 22 \\ 38 & 25 & 20 \\ -25 & -14 & 31 \end{pmatrix}.$$

З іншого боку:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 9 \\ -9 & -3 & -3 \end{pmatrix};$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 0 \\ 8 & 17 & 0 \\ -8 & 8 & 25 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 10 \\ 15 & 5 & 5 \\ -7 & -8 & 5 \end{pmatrix};$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 9 \\ 16 & 1 & 6 \\ -1 & -11 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} 22 & 14 & 22 \\ 38 & 25 & 20 \\ -25 & -14 & 31 \end{pmatrix}.$$

Отже, твердження $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ для даних матриць доведено.