Приклади розв'язування задач

1. Не розкриваючи визначників, доведіть справедливість рівностей:

а) $\begin{vmatrix} 1-\cos 2\alpha & 1 & \sin^2\alpha \\ 1+\cos 2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin 2\alpha & 1 & \sin\alpha\cos\alpha \end{vmatrix} = 0$,

б) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1+\lambda c_1 & a_2+\lambda c_2 & a_3+\lambda c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

а) Використовуючи тригонометричні формули, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 1-\cos 2\alpha & 1 & \sin^2\alpha \\ 1+\cos 2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin 2\alpha & 1 & \sin\alpha\cos\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\sin^2\alpha & 1 & \sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & 1 & \sin\alpha\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

Оскільки перший та третій стовпці визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю (властивість 6).

б) За властивістю 7 представимо даний визначник у вигляді суми двох:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1+\lambda c_1 & a_2+\lambda c_2 & a_3+\lambda c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \lambda c_1 & \lambda c_2 & \lambda c_3 \end{vmatrix}.$$

Перший доданок дорівнює нулю, так як у нього перший та третій рядки рівні (властивість 4). Винесемо множник з третього рядка останнього визначника (властивість 5):

$$\lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

За властивістю $\det A = \det A^t$ будемо мати:

$$\lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Отже, рівність доведено.

2. Обчисліть визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix};\ \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

а) Спочатку з п'ятого рядка віднімемо другий, помножений на 4:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ -4II \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3-4\cdot 4 & 0-4\cdot 0 & 4-4\cdot 1 & 0-4\cdot 0 & 0-4\cdot 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ -13 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Далі розкладемо останній визначник за п'ятим рядком:

$$\Delta = a_{51} \cdot A_{51} + 0 \cdot A_{52} + 0 \cdot A_{53} + 0 \cdot A_{54} + 0 \cdot A_{55} =$$

$$= -13 \cdot (-1)^{5+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -13 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Таким чином, визначник п'ятого порядку зведено до визначника четвертого порядку. Тепер розкладемо останній визначник за другим рядком:

$$\Delta = -13 \cdot \left(0 \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{24}\right) =$$

$$= -13 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -13 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Визначник матриці третього порядку розкриємо за правилом трикутників та знайдемо значення вихідного визначника:

$$\Delta = -13 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -13(50 + 27 + 40 - (30 + 24 + 75)) = 156.$$

б) З другого, третього та четвертого рядка даного визначника віднімемо перший. Тим самим ми приведемо його до трикутного виду. Значення визначника верхньотрикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів. Так отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ -I \\ -I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8.$$

3. Користуючись теоремою Лапласа, обчисліть визначник:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

Теорему Лапласа зручно застосовувати для обчислення визначників, що *містять нулі у декількох різних рядках, але в одних і тих самих стовпцях*. Цій умові якраз і відповідає даний визначник (див. другий та четвертий рядки). Тому виділимо перший і третій його рядок. За теоремою Лапласа визначник дорівнює сумі добутків всіх мінорів, що складаються з елементів виділених рядків на відповідні їм алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = \begin{array}{r} \rightarrow \\ \\ \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+3+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тільки один доданок із шести (четвертий) в отриманій сумі відмінний від нуля. Саме він дає значення даного визначника:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 4 - 3 \cdot 2)(3 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = -(-2) \cdot 5 = 10.$$

В подальшому при знаходженні значення визначника за теоремою Лапласа нульові доданки можна не записувати.

4. Користуючись теоремою Лапласа, обчисліть значення визначника:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

У даному визначнику нульові елементі містять другий та п'ятий рядки. Тому при його розкритті будемо використовувати мінори, що включають в себе перший, третій та четвертий рядки. Застосовуючи теорему, отримаємо:

$$\begin{array}{r} \\ \to \\ \\ \\ \to \end{array}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+4+1+2+3} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+4+1+2+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+4+3+4+5} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

З десяти доданків, що отримали в такому розкладі, ненульовими будуть тільки три. Ясно, що це доданки, в яких мінори не містять нульові елементи третього та п’ятого стовпців. Таким чином, даний визначник дорівнює:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+4+1+3+5} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+4+2+3+5} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+4+3+4+5} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -4.$$