Приклади розв'язування задач

1. Знайдіть матрицю, обернену до даної $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ двома способами.

Розв'язання:

I спосіб.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 .$$

Визначник даної матриці відмінний від нуля, тому обернена матриця існує. Знайдемо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2;$$

Отже, $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

II спосіб.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftrightarrow II \\ \leftrightarrow I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-1) \\ +2\cdot I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{5} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) + II \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right);$$

Тоді $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Виконаємо перевірку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 1 & 2\cdot(-3) + 3\cdot 2 \\ -1\cdot 1 + 1\cdot 1 & -1\cdot(-3) + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-3)\cdot(-1) & 1\cdot 3 + (-3)\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = E .$$

Вірно.

2. Дано матриці

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&5&4&1\\1&3&2&1\\2&10&9&7\\3&8&9&2\end{pmatrix}.$$

Знайдіть A^{-1} методом приєднання одиничної матриці, C^{-1} – методом алгебраїчних доповнень.

Розв'язання:

а) Для знаходження оберненої матриці скористаємось методом елементарних перетворень над рядками (на рівні рядка будемо записувати відповідне перетворення).

$$(A|E)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftrightarrow \mathrm{II}\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\2&1&0&1&0&0\\1&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\-2\mathrm{I}\\-\mathrm{I}\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\2-2\cdot1&1-2\cdot0&0-2\cdot1&1-2\cdot0&0-2\cdot1&0-2\cdot0\\1-1&-1-0&1-1&0-0&0-1&1-0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&-2&1&-2&0\\0&-1&0&0&-1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\+\mathrm{II}\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&-2&1&-2&0\\0+0&1+(-1)&0+(-2)&0+1&-1+(-2)&1+0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&-2&1&-2&0\\0&0&-2&1&-3&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot2+\mathrm{III}\\-\mathrm{III}\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1\cdot2+0&0\cdot2+0&1\cdot2+(-2)&0\cdot2+1&1\cdot2+(-3)&0\cdot2+1\\0-0&-2-0&-2-(-2)&1-1&-2-(-3)&0-1\\0&0&-2&1&-3&1\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&-1&1\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&-2&1&-3&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot1/2\\ \\ \cdot(-1/2)\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim\left(E|A^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевіркою встановлюємо, що, дійсно, $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

б) $\det C=-3$, отже, вона не вироджена і має обернену. Знайдемо алгебраїчні доповнення C_{ij} до елементів c_{ij}:

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}=-45,\ C_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}=-63,$$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}=-6,\ C_{41}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 9 & 7 \end{vmatrix}=12,$$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}=20,\ C_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}=-31,$$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}=3,\ C_{42}=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \end{vmatrix}=-5,$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}=1,\ C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}=1,$$

$$C_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}=0,\ C_{43}=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & 7 \end{vmatrix}=-1,$$

$$C_{14}=(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}=-17,\ C_{24}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 2 & 10 & 9 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}=25,$$

$$C_{34}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}=-3,\ C_{44}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \end{vmatrix}=5.$$

Тоді

$$C^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -45 & 63 & -6 & 12 \\ 20 & -31 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -17 & 25 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Читач самостійно може впевнитися в тому, що $C \cdot C^{-1} = C^{-1} \cdot C = E$ та для

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{13}{3} \end{pmatrix} \text{ оберненою буде } B^{-1} = \frac{1}{279}\begin{pmatrix} 69 & -90 & -18 \\ -22 & -129 & 30 \\ -14 & -6 & -57 \end{pmatrix}.$$

3. Доведіть, що для матриць прикладу 2: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Розв'язання:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{13}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & -\frac{17}{3} & -\frac{14}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{19}{3} \\ 3 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{3} \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи метод елементарних перетворень, отримаємо

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{558}\begin{pmatrix} 87 & -303 & 267 \\ -52 & -146 & 206 \\ 43 & -169 & 55 \end{pmatrix}.$$

З іншого боку:

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{558}\begin{pmatrix} 69 & -90 & -18 \\ -22 & -129 & 30 \\ -14 & -6 & -57 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{558}\begin{pmatrix} 87 & -303 & 267 \\ -52 & -146 & 206 \\ 43 & -169 & 55 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що рівність $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ виконується.

4. Розв'яжіть матричне рівняння $AX = B$.

Розв'язання:

Якщо матриця A не вироджена, то обидві частини матричного рівняння можна помножити зліва на A^{-1}:

$$AX = B,$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$
$$EX = A^{-1}B,$$
$$X = A^{-1}B.$$

Тоді $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & -5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -17 \\ 0 & -14 & 22 \\ -13 & -11 & 13 \end{pmatrix}$.