Приклади розв'язування задач

1. Розв'яжіть систему лінійних алгебраїчних рівнянь: а) за теоремою Крамера; б) матричним способом:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ x+y-z=-2, \\ 4x-y+5z=3. \end{cases}$$

Розв'язання:

а) Обчислимо визначник системи Δ й визначники Δ_x, Δ_y, Δ_z, що отримані з визначника Δ заміною першого, другого, третього стовпців стовпцем вільних членів:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}=-11\neq 0,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=33,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}=-55,\ \Delta_z=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-44.$$

За формулами Крамера одержуємо єдиний розв'язок системи:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{33}{-11}=-3,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-55}{-11}=5,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-44}{-11}=4.$$

Відповідь: $(-3;\ 5;\ 4)$.

б) Перепишемо вихідну систему у вигляді

$$A\cdot X=B,$$

де $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Оскільки $\Delta\neq 0$, то матриця A має обернену. Знайдемо її методом алгебраїчних доповнень:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=4,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-9,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=-11,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=11,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=11,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=4,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -11 & -3 \\ -9 & 11 & 4 \\ -5 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв'язок:

$$X = A^{-1}\cdot B = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -11 & -3 \\ -9 & 11 & 4 \\ -5 & 11 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 33 \\ -55 \\ -44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $(-3;\, 5;\, 4)$.

2. Розв'яжіть СЛАР: а) за правилом Крамера; б) шляхом зведення її до матричного рівняння. Порівняйте отримані результати.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 11 = 0, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$$

Розв'язання:

а) Знайдемо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

За теоремою Крамера дана СЛАР має єдиний розв'язок. Знайдемо значення визначників $\Delta_i, i = \overline{1,4}$ матриць, отриманих з вихідної заміною i-ого стовпця стовпцем вільних членів. Отримаємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & 5 & 4 & 1 \\ 11 & 3 & 2 & 1 \\ 40 & 10 & 9 & 7 \\ 37 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -3,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 20 & 4 & 1 \\ 1 & 11 & 2 & 1 \\ 2 & 40 & 9 & 7 \\ 3 & 37 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 20 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 1 \\ 2 & 10 & 40 & 7 \\ 3 & 8 & 37 & 2 \end{vmatrix} = -6,\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 37 \end{vmatrix} = 0.$$

Значення змінних знайдемо зі співвідношень:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2,\ x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{0}{-3} = 0.$$

б) Запишемо вихідну систему у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 11 \\ 40 \\ 37 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 20 \\ 11 \\ 40 \\ 37 \end{pmatrix}.$$

На стор. 26-28 знайдено обернену матрицю:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -45 & 63 & -6 & 12 \\ 20 & -31 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -17 & 25 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тоді:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -45 & 63 & -6 & 12 \\ 20 & -31 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -17 & 25 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 11 \\ 40 \\ 37 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 0$. Як бачимо, розв'язки СЛАР, що знайдені різними методами, співпадають між собою.

Підстановкою отриманих значень у вихідну систему легко переконатись, що набір $(1, 2, 2, 0)$ дійсно є її розв'язком.