Приклади розв'язування задач

1. Знайдіть ранг матриць: а) $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\2&4&6\\1&7&4\end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix}3&5&4\\2&3&2\\4&6&4\end{pmatrix}$;

в) $C=\begin{pmatrix}2&4&6&1\\0&0&0&0\\1&5&3&2\end{pmatrix}$.

Розв'язання:

а) Зведемо матрицю A до ступінчастого вигляду шляхом елементарних перетворень її рядків:

$$A=\begin{pmatrix}0&3&2\\2&4&6\\1&7&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&7&4\\0&3&2\\2&4&6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -2I\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&7&4\\0&3&2\\0&-10&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \cdot(-0,5)\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&7&4\\0&3&2\\0&5&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -2\cdot II\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&7&4\\0&3&2\\0&-1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&7&4\\0&-1&-3\\0&3&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ +3\cdot II\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&7&4\\0&-1&-3\\0&0&-7\end{pmatrix}.$$

Тому $rangA=3$.

б) $$B=\begin{pmatrix}3&5&4\\2&3&2\\4&6&4\end{pmatrix}\begin{matrix}-II\\ \\ \cdot 0,5\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2\\2&3&2\\2&3&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -2\cdot I\\ -II\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Отже, $rang\,B=2$.

в) $$A=\begin{pmatrix}2&4&6&1\\0&0&0&0\\1&5&3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&5&6&2\\2&4&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -2\cdot I\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&5&6&2\\0&-6&-9&-6\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тоді $rang\,C=2$.

2. Дослідіть на сумісність та знайдіть загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3,\\6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7,\\9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13.\end{cases}$$

Розв'язання:

Запишемо розширену матрицю системи та приведемо її шляхом елементарних перетворень над рядками до ступінчастого виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\6&8&2&5&7\\9&12&3&10&13\end{array}\right)\begin{matrix}\\ -2I\\ -3I\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\0&0&0&1&1\\0&0&0&4&4\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ -4II\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)-2II \quad \sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Як бачимо, $r = rangA = rang(A\,|\,B) = 2$, тобто за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна. Кількість залежних змінних дорівнює $r = 2$, а незалежних $n - r = 4 - 2 = 2$. Тут n – кількість змінних у системі. Система не визначена, так як $r \neq n$.

Вихідну систему рівнянь представимо у вигляді:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1, \\ x_4 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Таким чином, отримаємо загальний розв'язок даної системи:

$$\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_2, \\ x_3 = 1 - 3c_1 - 4c_2, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Тут c_1, c_2 – довільні числа.

3. Розв'яжіть СЛАР методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 11 = 0, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$$

Розв'язання:

Для розв'язання СЛАР методом Гауса запишемо її розширену матрицю. Представимо читачу можливість самостійно привести її до ступінчатого виду, застосувавши елементарні перетворення над рядками. Запишемо лише результат:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Тоді $r = rangA = rang(A\,|\,B) = 4$, $r = n = 4$, тобто система визначена. Отже, $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 0$.

4. Дослідіть систему на сумісність. У випадку сумісності – розв'яжіть:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 3 - I\cdot 7 \\ \cdot 3 - I\cdot 5 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 46 & -22 & -38 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -II\cdot 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Ранг матриці системи дорівнює двом, а розширеної – трьом. За теоремою Кронекера-Капеллі система несумісна.