Приклади розв'язування задач

1. Знайдіть фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_3 + 13x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання:

Приведемо матрицю системи до ступінчастого виду методом елементарних перетворень над рядками:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -3\cdot I \\ -3\cdot I \\ -2\cdot I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +II \\ +III \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що $rang\, A = 3$, $n = 5$. Отже вільних невідомих $n - r = 2$. Продовжимо перетворення та отримаємо нулі у правому верхньому кутку матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ -2\cdot\mathrm{III} \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Виразимо залежні змінні через незалежні. Для цього за знайденою матрицею запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_5 = 0, \\ x_3 + 4x_5 = 0, \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{звідси} \quad \begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = 2c_1 - c_2, \\ x_3 = -4c_2, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = c_2. \end{cases}$$

Будемо надавати змінним c_1, c_2 таких значень, щоб пари (c_1, c_2) були рядками одиничної матриці другого порядку (за кількістю незалежних змінних).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	2	0	0	**0**
0	–1	–1	0	**1**

Таким чином, фундаментальну систему розв'язків складають $\{ (1, 2, 0, 0, 0), (0, -1, -1, 0, 1) \}$.