

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7

**Тема: Систематизація та узагальнення знань з розділів лінійної алгебри: «Матриці», «Визначники», «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь»**

Дайте відповіді на наступні питання.

1. Чи можна додати матриці розмірами  $2 \times 3$  і  $3 \times 4$ ?
2. Чи можна помножити матрицю розмірами  $2 \times 3$  на матрицю з такими ж розмірами?
3. Які розміри має матриця  $A$ , якщо відомо, що  $(1 \ 2 \ 3)A = (0 \ 1)$ ?
4. Наведіть приклади рядка  $A$  та стовпця  $B$ , для яких існує добуток: а)  $AB$ ; б)  $BA$ ; в)  $AB$  і  $BA$ ; г)  $AB$ ,  $BA$  та  $AB = BA$ .
5. Яка матриця відіграє роль одиниці в операції множення матриць з розмірами  $n \times n$ ?
6. Для яких матриць  $A_{m \times n}$  існує  $A + A^t$ ?
7. Відомо, що  $A_{2 \times 3} \cdot B_{m \times n} = C_{2 \times 6}$ . Визначте значення  $m$  та  $n$ .
8. Знайдіть добуток матриць: а)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ ; б)  $(3 \ -1 \ 2)^t (2 \ -6 \ 7)$ .
9. Знайдіть  $f(A)$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ .
10. Розв'яжіть матричне рівняння  $3A + 2X = E$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -8 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ .
11. Дано матриці  $A_{2 \times 3}$ ,  $B_{3 \times 1}$ ,  $C_{3 \times 3}$ . Чи існують добутки  $ABC$ ,  $ACB$ ,  $CBA$ ?
12. Чи існує визначник матриці  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ?
13. Як зміниться визначник  $n$ -го порядку, якщо всі його стовпці записати в зворотному порядку?
14. Використовуючи властивість лінійності визначника (№ 7), обчисліть  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1+1 & 1 & 1 \\ 1+2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ .
15. Як пов'язані між собою доповняльний мінор та алгебраїчне доповнення елемента  $a_{ij}$  визначника матриці  $n$ -го порядку?
16. Як зміниться визначник порядку  $n$ , якщо перший стовпець переставити на останнє місце, а інші стовпці пересунути вліво, зберігаючи їх порядок?

17. Як зміниться визначник, якщо кожний його елемент замінити елементом, симетричним з даним відносно «центру» визначника?
18. Як зміниться визначник порядку  $n$ , якщо у всіх його елементів змінити знак на протилежний?
19. Чому дорівнює визначник, у якого сума рядків з парними номерами дорівнює сумі рядків з непарними номерами?

20. Дано матрицю 
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
. Знайдіть:

- а) мінор  $M$ , що стоїть на перетині першого, другого та четвертого рядків, першого, третього та четвертого стовпців;
- б) мінор, доповняльний до мінору  $M$ ;
- в) алгебраїчне доповнення до мінору  $M$ .
21. Обчисліть визначники:

а)  $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$ , б)  $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ , в)  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ , г)  $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$ .

22. Використовуючи тільки властивості визначника, доведіть справедливості рівностей:

а)  $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a)$ ; б)  $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ ;

в)  $\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0$ .

23. Користуючись властивостями визначника, обчисліть:

а)  $\begin{vmatrix} 2789 & 3453 \\ 2790 & 3454 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ .

24. Розв'яжіть рівняння  $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ .

25. Розв'яжіть нерівність  $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} > 0$ .

26. Знайдіть всі члени визначника

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

що містять  $x^3$  и  $x^4$ .

27. Розв'яжіть матричні рівняння з невідомою матрицею  $X$  в загальному вигляді:  $AX = B$ ,  $XA = B$ ,  $AX + B = C$ ,  $AXB^{-1}C = C$ ,  $(3X + 4A^{-1})^{-1} \cdot 2 = BC$ . Укажіть умови існування цих розв'язків.

28. Знайдіть невідому матрицю  $X$  з рівняння:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;

в)  $X \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; г)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ;

д)  $X \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ .

29. Як зміниться обернена матриця  $A^{-1}$ , якщо в матриці  $A$ :

а) переставити  $i$ -ий та  $k$ -ий рядки;

б)  $k$ -ий рядок помножити на число  $b$ , відмінне від нуля;

в) до  $k$ -ого рядка прибавити  $i$ -ий, помножений на число  $b$ , відмінне від нуля?

30. Запишіть систему двох рівнянь з двома невідомими, яка має нескінченно багато розв'язків (єдиний розв'язок).

31. Запишіть систему з найменшим числом невідомих, що має більше невідомих, ніж рівнянь, але не має розв'язків.

32. При яком значенні  $b$  сумісна система

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ 3x + 4y + z = b, \\ 2x + 3y - z = 5? \end{cases}$$

### ТЕСТ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Знайдіть суму матриць:  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

А.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Б.  $\begin{pmatrix} 0 & -8 & 4 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

В.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Г.  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

2. Знайдіть добуток матриці на число:  $-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

**А.**  $\begin{pmatrix} -3 & -6 & -15 \\ 3 & -15 & -6 \end{pmatrix}$       **Б.**  $\begin{pmatrix} -3 & -6 & 15 \\ 3 & -15 & -6 \end{pmatrix}$       **В.**  $\begin{pmatrix} -3 & 6 & -15 \\ 3 & 15 & 6 \end{pmatrix}$       **Г.**  $\begin{pmatrix} -3 & -6 & -15 \\ 3 & -15 & 6 \end{pmatrix}$

3. Оберненою для матриці  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  буде

**А.**  $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$       **Б.**  $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$       **В.**  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$       **Г.**  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. Добутком матриць  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  буде матриця

**А.** (3)      **Б.**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$       **В.**  $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$       **Г.** (-3)

5. Алгебраїчним доповненням  $A_{32}$  до елементу  $a_{32}$  матриці  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

буде число

**А.** 8      **Б.** 4      **В.** -8      **Г.** -4

6. Розв'язком системи  $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$  є

**А.** (-1, 0, 1)      **Б.** (1, -1, 0)      **В.** (0, 1, 4)      **Г.** (1, 1, 0)

7. Визначник другого порядку  $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$  дорівнює

**А.** 2      **Б.** -14      **В.** -2      **Г.** 14

8. Визначник третього порядку  $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$  дорівнює

**А.** 2      **Б.** 6      **В.** -2      **Г.** -6

9. Визначник четвертого порядку  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$  дорівнює

**А. 8**

**Б. 1**

**В. -1**

**Г. 0**

**10.** Знайдіть матрицю, обернену матриці  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

**А.**  $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$       **Б.**  $\begin{pmatrix} -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$       **В.**  $-\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$       **Г.**  $-\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

**11.** Знайдіть частинний розв'язок системи рівнянь  $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

**А.** (1, 1, 0)

**Б.** (-1, -1, 0)

**В.** (0, 1, 1)

**Г.** (0, -1, 1)

*Відповіді:* 1. В; 2. Г; 3. А; 4. Г; 5. В; 6. Б; 7. А; 8. Г; 9. А; 10. Б; 11. В.