1 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

1.1 Форми задання комплексних чисел. Комплексні числа в алгебраїчній формі

Комплексним числом називається вираз, що має вигляд: $x+iy$, де x, y – дійсні числа $(x\in R, y\in R)$; i – уявна одиниця – число , квадрат якого дорівнює мінус одиниці $(i^2=-1)$; число позначається $z=x+iy$. Числа x і y при цьому називаються відповідно дійсною і уявною частиною комплексного числа z і позначаються: $x=Re\,z$, $y=Im\,z$.

Вираз $z=x+iy$ називається *алгебраїчною формою* запису комплексного числа; знаки між складовими числа – звичайні знаки операцій додавання і множення, які мають ті самі властивості, що і для дійсної області. Множина комплексних чисел позначається C, а $z\in C$ – елемент цієї множини.

З означення випливає, що дійсні числа можна розглядати як частинний випадок комплексних, тобто $R\subset C$, а саме при $y=0$ отримаємо $z=x$ – дійсне число. Число $z=iy$ називається чисто уявним.

Приклад 1.1 Записати дійсну і уявну частини чисел:

$$z_1=3-2i,\ z_2=5,\ z_3=-3i,\ z_4=1+i.$$

Розв'язання:

$$Re\,z_1=3, Im\,z_1=-2;\ Re\,z_2=5, Im\,z_2=0;$$
$$Re\,z_3=0, Im\,z_3=-3;\ Re\,z_4=1, Im\,z_4=1.$$

Комплексні числа z_1 і z_2 називаються *рівними*, якщо у них відповідно рівні дійсні і уявні частини:

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re\,z_1=Re\,z_2, \\ Im\,z_1=Im\,z_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Комплексні числа називаються *спряженими*, якщо у них рівні дійсні частини, а уявні протилежні за знаком. Число, спряжене числу $z=x+iy$, позначається $\overline{z}=x-iy$. Означення спряжених чисел можна записати в вигляді рівності:

$$Re\,\overline{z}=Re\,z,\ \ Im\,\overline{z}=-Im\,z. \tag{1.2}$$

Із означення, в частинному випадку, випливає, що число, спряжене дійсному числу, співпадає з ним: $\overline{x}=x,\ x\in R$.

Приклад 1.2 Записати числа, спряжені комплексним числам із приклада 1.1.

Розв'язання:

Використовуючи формули (1.2), отримаємо:

$$z_1=3-2i,\ \overline{z_1}=3+2i;\ z_2=5,\ \overline{z_2}=5;\ z_3=-3i,\ \overline{z_3}=3i;\ z_4=-1+i,\ \overline{z_4}=-1-i.$$

Із означення комплексного числа як упорядкованої пари дійсних чисел отримаємо, що завдання комплексного числа можна розглядати як завдання точки на площині, абсцисою якої є $x=\mathrm{Re}\,z$, ординатою $y=\mathrm{Im}\,z$, тобто числу $z=x+iy$ відповідає точка $M(x,y)$. Між множиною точок площини xOy і множиною C комплексних чисел встановлюється взаємно однозначне відображення: кожній точці $M(x, y)$ відповідає єдине число $z = x + iy$, кожному числу $z = x + iy$ відповідає єдина точка M з координатами (x, y); площина xOy при цьому називається комплексною площиною. На рис. 1.1 відмічені точки, що відповідають комплексним числам з приклада 1.1.

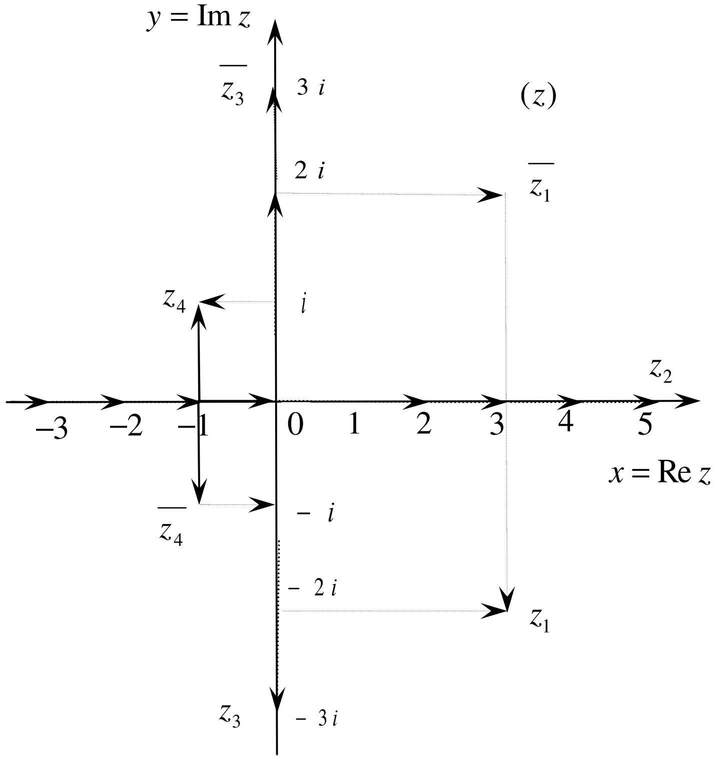

Рисунок 1.1 – Зображення точок, що відповідають комплексним числам

Використовуючи геометричну інтерпретацію комплексних чисел як точок площини, переконаємося в справедливості твердження, що комплексні числа не порівнюються, тобто на множині C не визначені операції порівняння (не мають місця знаки $<$, $\leq$, $>$, $\geq$). Це випливає з того, що множини точок площини не впорядковані.

1.2 Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі

Сумою двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається число $z = x + iy$ таке, що задовольняє рівності $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, тобто $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = x + iy$. Позначається: $z = z_1 + z_2$.

Правило додавання. При додаванні комплексних чисел додаються дійсні і уявні частини відповідно.

Приклад 1.3 Знайти суму чисел z_1 і z_2, z_2 і z_3, де $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 5 + 2i$, $z_3 = 1 - i$.

Розв'язання:

$$z_1 + z_2 = (3 - 2i) + (5 + 2i) = (3 + 5) + i(-2 + 2) = 8 + 0 \cdot i = 8;$$

$$z_2 + z_3 = (5 + 2i) + (1 - i) = 6 + 1 \cdot i = 6 + i.$$

Різницею комплексних чисел z_1 і z_2 називається число z таке, що $z_1 = z + z_2$. Позначається: $z = z_1 - z_2$. Використовуючи правило додавання, отримаємо для знаходження різниці $z = z_1 - z_2$, $z = x + iy$ рівності $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$.

Правило віднімання. При знаходженні різниці $z_1 - z_2$ із дійсної і уявної частин зменшуваного віднімаються відповідно дійсна і уявна частини від'ємника:

$$z = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i\,.$$

Приклад 1.4 Знайти різницю $z_1 - z_2$, $z_2 - z_3$ для чисел із приклада 1.3.

Розв'язання:

$$z_1 - z_2 = (3 - 2i) - (5 + 2i) = (3 - 5) + (-2i - 2i) = -2 - 4i\,;$$

$$z_2 - z_3 = (5 + 2i) - (1 - i) = 4 + 3i\,.$$

Добутком комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається число $z = x + iy$, таке, що виконуються рівності $x = x_1x_2 - y_1y_2$, $y = x_1y_2 + x_2y_1$. Позначається: $z = z_1 \cdot z_2$. Неважко переконатися, що ці рівності мають місце, якщо виконати формальний добуток виразів $(x_1 + iy_1)$ і $(x_2 + iy_2)$, як двочленів:

$$(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)\,.$$

Правило множення. Комплексні числа перемножуються, як двочлени, при цьому враховується, що $i^2 = -1$.

Приклад 1.5 Знайти добуток чисел: $z_1 = 1 - 2i$ і $z_2 = 3 + 4i$.

Розв'язання:

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - 2i)\cdot(3 + 4i) = 1\cdot 3 + 1\cdot 4i - 2i\cdot 3 - 2i\cdot 4i = 3 - 2i - 8i^2 = 11 - 2i\,.$$

Приклад 1.6 Знайти суму і добуток пари комплексних спряжених чисел.

Розв'язання:

Для чисел $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ отримаємо: $z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$, тобто $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$;

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)\cdot(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2\,.$$

Результат розв'язку можна сформулювати як властивість: сума і добуток спряжених комплексних чисел – дійсні числа.

Часткою від ділення числа z_1 на $z_2 (z_2 \neq 0)$ називається число z таке, що має місце наступна рівність $z \cdot z_2 = z_1$. Позначається: $z = \dfrac{z_1}{z_2}$. Задача знаходження частки зводиться до визначення $Re\, z$ та $Im\, z$ з системи:

$$\begin{cases} Re(z \cdot z_2) = Re\, z_1, \\ Im(z \cdot z_2) = Im\, z_1. \end{cases}$$

При знаходженні частки зручно використовувати властивість добутку спряжених чисел.

Правило ділення. Для того, щоб поділити число z_1 на z_2 $(z_2 \neq 0)$, потрібно чисельник і знаменник дробу $\dfrac{z_1}{z_2}$ помножити на число $\overline{z_2}$, спряжене до знаменника.

Приклад 1.7 Знайти частку від ділення числа $z_1 = 3 + 2i$ на $z_2 = 2 - i$.

Розв'язання:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+2i}{2-i}=\frac{(3+2i)\cdot(2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)}=\frac{(6-2)+i(3+4)}{4+1}=\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i.$$

Піднесення комплексного числа z до степеня n – це знаходження добутку n множників, кожен з яких дорівнює z, тобто $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n}$.

Правило піднесення до степеня. При піднесені до степеня n числа z (знаходження $Re\,z^n$ та $Im\,z^n$) використовується правило піднесення до степеня двочлена $(x+iy)$, в загальному випадку використовується формула бінома Ньютона: $(x+iy)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k x^{n-k}(iy)^k$, де $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Приклад 1.8 Знайти степінь числа i, тобто i^n.

Розв'язання:

Маємо $i^2=-1$, $i^3=i^2\cdot i=-1$, $i^4=\left(i^2\right)^2=(-1)^2=1$. Помічаючи закономірність, отримаємо для $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$ наступні значення: $i^{4k}=\left(i^4\right)^k=1$; $i^{4k+1}=i^{4k}\cdot i=i$; $i^{4k+2}=i^{4k}\cdot i^2=-1$; $i^{4k+3}=i^{4k}\cdot i^3=-i$.

Приклад 1.9 Знайти $Im(1-i)^4$, $Re(2-i)^3$.

Розв'язання:

$$(1-i)^4=\left((1-i)^2\right)^2=(1-2i-1)^2=(-2i)^2=-4,\ Im(1-i)^4=0;$$

$$(2-i)^3=2^3+3\cdot 2^2\cdot(-i)+3\cdot 2\cdot(-i)^2+(-i)^3=8-12i-6+i=2-11i;\ Re(2-i)^3=2.$$

Приклад 1.10 Піднести число $2+i$ до п'ятого степеня.

Розв'язання:

Використовуючи формулу бінома Ньютона при $n=5$:

$$(2+i)^5=2^5+5\cdot 2^4\cdot i+\frac{5\cdot 4}{2!}2^3 i^2+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}2^2\cdot i^3+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!}2i^4+i^5=$$
$$=32+80i-80-40i+10+i=-38+41i.$$

Коренем n-ого степеня з комплексного числа z називається число w таке, що $w^n=z$. Позначається: $w=\sqrt[n]{z}$.

Правило знаходження кореня. Для знаходження кореня $\sqrt[n]{z}$ (відповідно $x=\mathrm{Re}\sqrt[n]{z}$ та $y=\mathrm{Im}\sqrt[n]{z}$) необхідно, використовуючи означення кореня і правило піднесення до степеня, скласти і розв'язати систему рівнянь відносно невідомих x та y:

$$\sqrt[n]{z}=x+iy\Rightarrow z=(x+iy)^n\Rightarrow\begin{cases}Re\,z=Re(x+iy)^n,\\ Im\,z=Im(x+iy)^n.\end{cases}$$

Приклад 1.11 Знайти корінь $\sqrt{3-4i}$.

Розв'язання:

Позначимо $\sqrt{3-4i}=x+iy$, тоді $(x+iy)^2=3-4i$, або $x^2-y^2+i2xy=3-4i$. Використовуючи умову рівності комплексних чисел, запишемо систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, знайдемо $x_1 = 2,\ \ x_2 = -2,\ \ y_1 = -1,\ \ y_2 = 1$. В результаті отримаємо два значення квадратного кореня: $\sqrt{3-4i} = 2 - i$ та $\sqrt{3-4i} = -2 + i$.

Використовуючи означення спряжених чисел і правила знаходження суми, добутку, частки комплексних чисел, можна встановити справедливість наступних властивостей операцій комплексного спряження:

1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$; 2) $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; 4) $\overline{P}_n(z) = P_n(\overline{z})$; 5) $\overline{\left(\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}\right)} = \frac{P_n(\overline{z})}{Q_m(\overline{z})}$.

У двох останніх рівностях $P_n(z)$ та $Q_m(z)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами степенів n та m відповідно.

Приклад 1.12 Обчислити $P(\overline{z_0}) + P(z_0)$, якщо $P(z) = 2z^2 + 3z + 1$ і $z_0 = \frac{1+2i}{1-i}$.

Розв'язання:

Використовуючи властивість 4, знаходимо: $P(\overline{z_0}) + P(z_0) = \overline{P(z_0)} + P(z_0) = = 2\,Re\,P(z_0)$. Далі, позбавляючись комплексності у знаменнику, запишемо число z_0 в алгебраїчній формі: $z_0 = \frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)\cdot(1+i)}{2} = \frac{-1+3i}{2}$. Підставимо його у вираз для $P(z)$. Отримаємо $P(z_0) = 2\frac{(3i-2)^2}{4} + \frac{3(3i-1)}{2} + 1 = = \frac{-9-6i+1+9i-3+2}{2} = -\frac{9}{2} + i\frac{3}{2}$, тому $\operatorname{Re} P(z_0) = -\frac{9}{2}$. Відповідно маємо: $P(\overline{z_0}) + P(z_0) = 2\,Re\,P(z_0) = -9$.

1.3 Комплексні числа в тригонометричній і показниковій формах

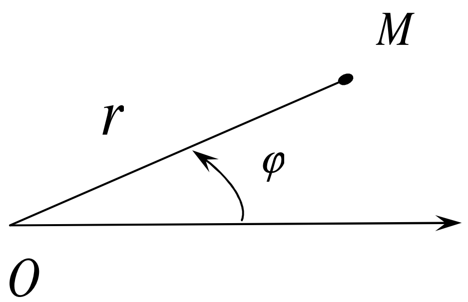

Рисунок 1.2,а – Положення точки на площині в полярній системі координат

Кожному комплексному числу $z = x + iy$ геометрично відповідає точка $M(x, y)$ на площині xOy. Але положення точки на площині, крім декартових координат (x, y), можна зафіксувати іншою парою – її полярних координат (r, φ) в полярній системі (рис. 1.2,а).

Величина r є невід'ємною і для даної точки знаходиться єдиним способом, а кут φ може приймати нескінченну множину значень (при цьому $z \neq 0$): якщо точці відповідає деяке значення φ_0, то їй також відповідають значення $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, $k \in Z$. Наприклад, якщо для точки

$z=-1-i$ (див. рис. 1.1) обрати $\varphi_0=\frac{5\pi}{4}$, то їй відповідає будь-яке $\varphi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, $k\in Z$, зокрема $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$ при $k=-1$. Якщо ж обрати $\varphi_0=-\frac{3\pi}{4}$, то $\varphi=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, $k\in Z$, а при $k=1$ отримаємо $\varphi=\frac{5\pi}{4}$.

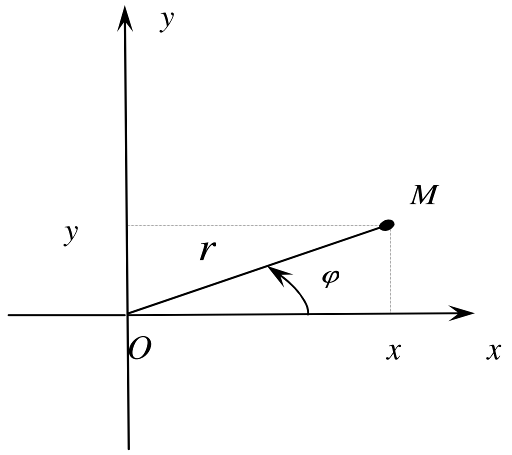

Рисунок 1.2,б – Зв'язок полярних і декартових координат

Використовуючи зв'язок декартових і полярних координат точки M: $x=r\cdot\cos\varphi$, $y=r\cdot\sin\varphi$ (рис. 1.2,б), з алгебраїчної форми запису комплексного числа $z=x+iy$ отримаємо тригонометричну форму:

$$z=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (1.3)$$

Якщо позначити комплексне число z, у якого $Re\,z=cos\,\varphi$, а $Im\,z=sin\,\varphi$, через $e^{i\varphi}$, тобто $\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$, то з (1.3) отримаємо показникові форму запису комплексного числа:

$$z=r\cdot e^{i\varphi}. \qquad (1.4)$$

Рівність $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ називається *формулою Ейлера*.

Помітимо, що геометричне завдання комплексного числа $z=(r,\varphi)$, рівносильне завданню вектора $\overline{OM}$, довжина якого дорівнює r, тобто $\left|\overline{OM}\right|=r$, а напрямок – під кутом φ до осі Ox (рис. 1.2,б).

Число r – довжина радіус-вектору точки $M(x,y)$ – називається *модулем* комплексного числа $z=x+iy$. Позначається: $|z|=r$.

З рис. 1.2,б отримаємо формулу для знаходження модуля числа, заданого в алгебраїчній формі $z=x+iy$:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (1.5)$$

Очевидно, що $|z|\geq 0$ і $|z|=0$ тільки для числа $z=0$ $(x=0, y=0)$.

За допомогою правила віднімання запишемо модуль числа $z=z_1-z_2$, де $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$: $|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. А це, як відомо, є формула для відстані між точками $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$. Таким чином, число $|z_1-z_2|$ є відстанню між точками z_1 і z_2 на комплексній площині.

Приклад 1.13 Знайти модулі комплексних чисел:

а) $z_1=2$, $z_2=-2+\sqrt{3}$; б) $z_3=-2i$, $z_4=(2-\sqrt{3})\cdot i$; в) $z_5=-1+2i$.

Розв’язання:

а) Числа z_1 і z_2 – дійсні, причому $z_1 = x_1 = 2 > 0$, $z_2 = x_2 = -2 + \sqrt{3} < 0$. Тому $|z_1| = z_1 = 2$, $|z_2| = -z_2 = 2 - \sqrt{3}$ (рис. 1.3).

б) Числа z_3 і z_4 – чисто уявні, причому $z_3 = iy_3$, $y_3 = -2 < 0$; $z_4 = iy_4$, $y_4 = 2 - \sqrt{3} > 0$. Тому $|z_3| = |y_3| = -y_3 = 2$, тобто $|-2i| = 2$; $|z_4| = |y_4| = y_4 = 2 - \sqrt{3}$, або $\left|\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot i\right| = 2 - \sqrt{3}$ (рис. 1.3).

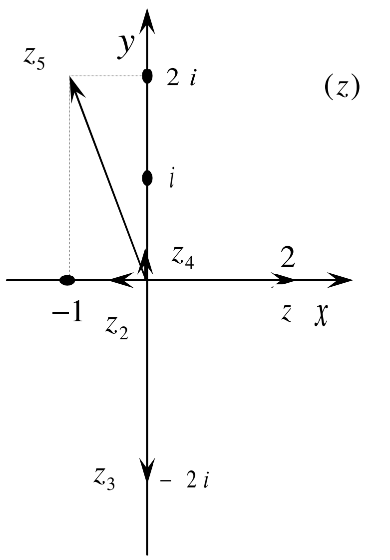

Рисунок 1.3 – Положення точок прикладу 1.13 на комплексній площині

в) для числа $z_5 = -1 + 2i$ маємо $x_5 = \operatorname{Re} z_5 = -1$, $y_5 = \operatorname{Im} z_5 = 2$.

Тому $|z_5| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$ (рис. 1.3).

Полярний кут φ точки $M(x, y)$ називається *аргументом* комплексного числа $z = x + iy$. Позначається: $\varphi = \arg z$.

Надалі під $\arg z$ будемо розуміти значення φ, що задовольняє умові $-\pi < \varphi \le \pi$. Так, для точки $z = -1 - i$ (рис. 1.1) $\arg z = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Формулу для знаходження комплексного числа $z = x + iy$, заданого в алгебраїчній формі, отримаємо, використовуючи зв'язок декартових і полярних координат точки $M(x, y)$ (рис. 1.2,б). Для точок, що не лежать на уявній осі координат, тобто для z, у яких $x \ne 0$, отримаємо $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$; для точок уявної додатної полуосі, тобто для z, у яких $x = 0$, $y > 0$, маємо $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; для точок уявної від’ємної полуосі, тобто для z, у яких $x = 0$, $y < 0$, відповідно $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

Аргумент числа $z = 0$ – величина не визначена.

Знаходження аргументу при $x \ne 0$ зводиться до розв’язання тригонометричного рівняння $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$. При $y = 0$, тобто коли $z = x$ – число дійсне, маємо $\varphi = 0$ при $x > 0$ і $\varphi = \pi$ при $x < 0$. При $y \ne 0$ розв’язок рівняння залежить від чверті площини xOy. Чверть, в якій розміщена точка z, визначається за знаками $Re\, z$ і $Im\, z$.

В результаті отримаємо:

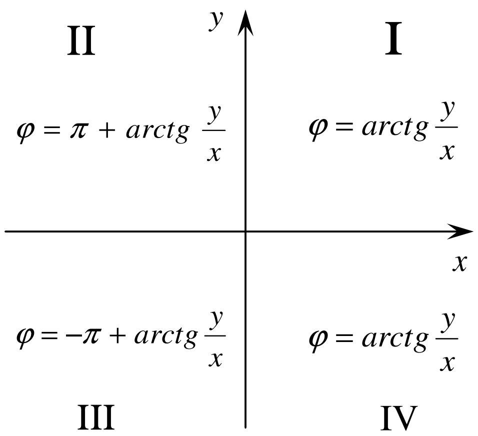

Рисунок 1.4 – Схема для визначення аргументу комплексного числа

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, x > 0, \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, x = 0, y < 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

При розв'язанні прикладів зручно користуватися схемою, яка зображена на рис. 1.4.

Приклад 1.14 Знайти аргументи чисел з прикладу 1.13.

Розв'язання:

а) Числа $z_1 = 2$ і $z_2 = -2 + \sqrt{3}$ – дійсні, причому $z_1 = x_1 > 0$, $z_2 = x_2 < 0$, тому $\arg z_1 = 0$, $\arg z_2 = \pi$ (рис. 1.3).

б) Числа $z_3 = -2i$ і $z_4 = \left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot i$ – чисто уявні $\left(x_3 = x_4 = 0\right)$, причому $y_3 = \operatorname{Im} z_3 = -2 < 0$, $y_4 = \operatorname{Im} z_4 = 2 - \sqrt{3} > 0$, тому $\arg z_3 = -\dfrac{\pi}{2}$, $\arg z_4 = \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 1.3).

в) Для числа $z_5 = -1 + 2i$ $\operatorname{Re} z_5 = -1 \neq 0$, тому з $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ знаходимо $tg\varphi = -2$; так як при цьому $\operatorname{Im} z_5 > 0$, $\operatorname{Re} z_5 < 0$ (точка знаходиться у другій чверті, рис. 1.3), то отримаємо $\varphi = \pi + arctg(-2)$ (рис. 1.4) або $\varphi = \pi - arctg 2$.

Приклад 1.15 Знайти модуль і аргумент числа $z = 2 - i$.

Розв'язання:

Знаходимо $|z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$. Так як $\operatorname{Re} z = 2 > 0$, $\operatorname{Im} z = -1 < 0$, тобто точка знаходиться в четвертій чверті, то з рівності $tg\varphi = -\dfrac{1}{2}$ отримаємо $\varphi = -arctg\dfrac{1}{2}$ (рис. 1.4).

Аргумент комплексного числа можна визначити не однозначно. Це випливає з неоднозначності завдання величини кута φ для даної точки, а також з тригонометричної форми запису комплексного числа і властивості періодичності функцій $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$.

Усякий кут, що відрізняється від $\arg z$ на доданок, кратний 2π, позначається $Argz$ і записується рівністю:

$$Argz = \arg z + 2k\pi, \ k \in Z \quad (1.7)$$

де $\arg z$ – головне значення аргументу, $-\pi < \arg z \le \pi$.

Приклад 1.16 Записати $\arg z$ і $Argz$ для чисел $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$.

Розв'язання:

Числа z_1 і z_2– дійсні, розташовані на дійсній осі, тому $\arg z_1 = 0$, $Argz_1 = 2k\pi$; $\arg z_2 = \pi$, $Argz_2 = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$, числа z_3 і z_4 – чисто уявні, розташовані на уявній осі, тому $\arg z_3 = \dfrac{\pi}{2}$, $Argz_3 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$; $\arg z_4 = -\dfrac{\pi}{2}$, $Argz_4 = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

Приклад 1.17 Записати числа з прикладу 1.16: а) в тригонометричній формі; б) в показниковій формі.

Розв'язання:

Очевидно, що модулі усіх чисел дорівнюють 1. Тому, використовуючи розв'язок попереднього прикладу та формули (1.3) і (1.4), отримаємо:

а) $1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi$; $-1 = \cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi - 2k\pi)$; $k \in Z$. $i = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$; $-i = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$.

б) $1 = e^{2k\pi i}$; $-1 = e^{(\pi + 2k\pi)i}$; $i = e^{\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i}$; $k \in Z$.

Приклад 1.18 Записати в тригонометричній формі числа $z_1 = -1 - i$, $z_2 = \cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}$, $z_3 = i\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Розв'язання:

Числа z_1 і z_2 записані в алгебраїчній формі (помітимо, що заданий запис числа z_2 не є тригонометричною формою запису (порівняйте з (1.3)). Знайдемо модулі чисел за формулою (1.5): $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{cos^2\dfrac{\pi}{5} + \left(-sin\dfrac{\pi}{5}\right)^2} = 1$. Далі знайдемо аргументи.

Для числа z_1 маємо $tg\varphi = 1$ і, так як $\operatorname{Re} z_1 < 0$, $\operatorname{Im} z_1 < 0$ (точка розташована в третій чверті), отримаємо $\arg z_1 = -\pi + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4}$. Для числа z_2 маємо $tg\varphi = -tg\dfrac{\pi}{5}$, або $tg\varphi = tg\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)$, і, так як $Re\, z_2 > 0$, $Im\, z_2 < 0$ (рис. 1.4)), отримаємо $\arg z_2 = -\dfrac{\pi}{5}$.

Запишемо числа z_1 і z_2 в тригонометричній формі:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\,sin\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)\right);$$

$$z_2 = cos\left(-\frac{\pi}{5} + 2k\pi\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{5} + 2k\pi\right),\ k \in Z .$$

Помітимо, що для числа z_2 розв'язок можна знайти інакше, а саме використовуючи властивості тригонометричних функцій: $cos\,\alpha = cos(-\alpha)$, $-sin\,\alpha = sin(-\alpha)$.

Число z_3 є добутком двох чисел. Виконуючи множення, отримаємо алгебраїчну форму запису (знайдемо $Re\,z_3$ і $Im\,z_3$): $z_3 = sin\frac{\pi}{5} + i\,cos\frac{\pi}{5}$.

Тут, як і для числа z_2, при розв'язанні зручно використовувати перетворення тригонометричних виразів, а саме $sin\frac{\pi}{5} = cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)$, $cos\frac{\pi}{5} = sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)$. Якщо міркувати, як і раніше, знайдемо $|z_3| = 1$, $arg\,z_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$. Для числа $z_3 = sin\frac{\pi}{5} + i\,cos\frac{\pi}{5}$, записаного в алгебраїчній формі, отримаємо тригонометричну форму: $z_3 = cos\left(\frac{3\pi}{10} + 2k\pi\right) + i\,sin\left(\frac{3\pi}{10} + 2k\pi\right),\ k \in Z$.

Умови рівності комплексних чисел отримаємо, використовуючи геометричний зміст модуля і аргументу комплексного числа, заданого в тригонометричній формі. Так, для чисел $z_1 = r_1(cos\,\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1)$, $z_2 = r_2(cos\,\varphi_2 + i\,sin_2)$ з умови $z_1 = z_2$, очевидно, випливає:

$$r_1 = r_2;\ \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi,\ k \in Z$$

або

$$|z_1| = |z_2|,\ Argz_1 - Argz_2 = 2k\pi,\ k \in Z .$$

Аргументи рівних комплексних чисел або рівні (в частинному випадку рівні головні значення), або відрізняються на доданок, кратний 2π.

Для пари спряжених комплексних чисел z і $\bar{z}$ справедливі наступні рівності:

$$|\bar{z}| = |z|,\ arg\,\bar{z} = -arg\,z . \quad (1.8)$$

1.4 Дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі

Множення. Задамо два комплексних числа в тригонометричній формі $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ та $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ і перемножимо їх за правилом добутку двочленів:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(cos\,\varphi_1 + i\,sin\,\varphi_1)\cdot(cos\,\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_2) =$$
$$= r_1 \cdot r_2 \cdot (cos\,\varphi_1\,cos\,\varphi_2 - sin\,\varphi_1\,sin\,\varphi_2 + i(cos\,\varphi_1\,sin\,\varphi_2 + i\,sin\,\varphi_1\,cos\,\varphi_2))$$

або

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Отримали нове число z, записане в тригонометричній формі: $z = r(cos\varphi + i\,sin\varphi)$, для якого $r = r_1 \cdot r_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Правило множення. При множенні комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі, їх модулі перемножуються, а аргументи додаються:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,\ Arg(z_1 \cdot z_2) = \arg_1 + \arg z_2. \tag{1.9}$$

В результаті множення чисел можемо отримати аргумент добутку, що не є головним значенням.

Приклад 1.19 Знайти модулі і аргументи чисел:

а) $z = -2i\left(cos\frac{4\pi}{7} - i\,sin\frac{4\pi}{7}\right)$; б) $z = (1+i)(\sqrt{3} - i)$.

Розв'язання:

Кожне з даних чисел записане у вигляді добутку. Знайдемо модулі і аргументи співмножників і використаємо правило (1.9):

а) $z = z_1 \cdot z_2$, $z_1 = -2i$, $z_2 = cos\frac{4\pi}{7} - i\,sin\frac{4\pi}{7} = cos\left(-\frac{4\pi}{7}\right) + i\,sin\left(-\frac{4\pi}{7}\right)$.

Для чисел z_1 та z_2 знаходимо модулі та аргументи: $|z_1| = 2$, $arg\,z_1 = -\frac{\pi}{2}$; $|z_2| = 1$, $arg\,z_2 = -\frac{4\pi}{7}$. Використовуючи формули (1.9), отримаємо $|z| = |z_1| \cdot |z_2| = 2$, $Argz = arg\,z_1 + arg\,z_2 = -\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{7} = -\frac{15\pi}{14}$; $arg\,z = 2\pi - \frac{15\pi}{14} = \frac{13\pi}{14}$;

б) $z = z_1 \cdot z_2$, $z_1 = (1+i)$, $z_2 = \sqrt{3} - i$. Для числа z_1 маємо: $|z_1| = \sqrt{2}$, $arg\,z_1 = \frac{\pi}{4}$; для числа z_2: $|z_2| = 2$, $tg\varphi_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, і так як $Re\,z_2 > 0$, $Im\,z_2 < 0$ (точка знаходиться в четвертій чверті), то $arg\,z_2 = -\frac{\pi}{6}$.

Використовуючи формули (1.9), отримаємо $|z| = 2\sqrt{2}$, $arg\,z = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$.

Помітимо, що для розв'язання цієї задачі можна розкрити дужки, записати кожне число в алгебраїчній формі, а потім знайти $|z|$ і $\arg z$, використовуючи формули (1.5), (1.6).

Ділення. Розглянемо частку комплексних чисел $\frac{z_1}{z_2}$, заданих в тригонометричній формі. Із означення частки $z = \frac{z_1}{z_2}$ маємо $z_1 = z \cdot z_2$ і, використовуючи до добутку правило множення (формули (1.9)), отримаємо $r = \frac{r_1}{r_2}$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Правило ділення. Модуль частки, отриманий в результаті ділення чисел, заданих в тригонометричній формі, дорівнює частці від ділення модуля чисельника на модуль знаменника, а аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого та дільника:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \; Arg\frac{z_1}{z_2} = arg\, z_1 - arg\, z_2. \qquad (1.10)$$

В результаті ділення чисел за формулою (1.11) можемо отримати аргумент частки, що не є головним значенням.

Приклад 1.20 Записати в тригонометричній формі число $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Розв'язання:

Позначимо $z = \dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3}-i$. Для чисел z_1 та z_2 знайдемо модулі та аргументи: $|z_1| = \sqrt{2}$, $arg\, z_1 = \dfrac{\pi}{4}$; $|z_2| = 2$, $arg\, z_2 = -\dfrac{\pi}{6}$ (див. приклад 1.19). За формулою (1.11) отримаємо $|z| = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $arg\, z = \dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5\pi}{12}$ і $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \sqrt{2}\left(cos\left(\dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi\right) + i\, sin\left(\dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi\right)\right)$, $k \in Z$.

Піднесення до степеня. Із означення степеня z^n і правила множення чисел, записаних в тригонометричній формі (формула 1.9)), отримаємо

$$|z^n| = r^n, \qquad Argz^n = n\varphi, \text{ де } z = r(cos\,\varphi + i\, sin\,\varphi).$$

Правило піднесення до степеня. При піднесенні до степеня комплексного числа в цей степінь підноситься модуль числа, а аргумент множиться на показник степеня:

$$|z^n| = |z|^n, \qquad Argz^n = n\, arg\, z. \qquad (1.11)$$

Записуючи число z^n в тригонометричній формі, отримаємо формулу піднесення до степеня:

$$z^n = [r(cos\,\varphi + i\, sin\,\varphi)]^n = r^n(cos\, n\varphi + i\, sin\, n\varphi). \qquad (1.12)$$

При $r = 1$ ця рівність буде мати вигляд:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (1.13)$$

Рівність (1.13) носить назву формули Муавра.

Приклад 1.21 Знайти модуль і аргумент числа $(1+i)^5$.

Розв'язання:

Позначимо $z = z_1^{\,5}$, $z_1 = 1+i$. Знайдемо модуль і аргумент числа z_1: $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{4}$. Тому $|z| = \left(\sqrt{2}\right)^5$ і $Argz = 5 \cdot arg\, z_1 = \dfrac{5\pi}{4}$. Так як за означенням для головного значення аргументу виконується умова $-\pi < \arg z \le \pi$, то $arg\, z = \dfrac{5\pi}{4} - 2\pi = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Приклад 1.22 Записати в тригонометричній формі число $(1+i)^5\left(\sqrt{3}-i\right)^7$.

Розв'язання:

Позначимо $z = z_1 \cdot z_2$, $z_1 = (1+i)^5$, $z_2 = (\sqrt{3}-i)^7$. Знайдемо модулі і аргументи чисел z_1 і z_2. Для числа z_1 маємо: $|z_1| = (\sqrt{2})^5$, $arg\, z_1 = -\frac{3\pi}{4}$ (див. приклад 1.21). Для числа z_2 послідовно знаходимо: $|\sqrt{3}-i| = 2$, $arg(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6}$ (див. приклад 1.19), $|z_2| = 2^7$, $Argz_2 = 7\, arg(\sqrt{3}-i) = -\frac{7\pi}{6}$, або, знаходячи головне значення аргументу: $arg\, z_2 = \frac{5\pi}{6}$. Таким чином, за формулою (1.9) отримаємо $|z| = (\sqrt{2})^5 \cdot 2^7 = 2^9\sqrt{2}$ і $Argz = \frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$. Запишемо число $z = z_1 \cdot z_2$ в тригонометричній формі: $z = 2^9\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+2k\pi\right)\right)$, $k \in Z$.

Приклад 1.23 Використовуючи формулу Муавра, знайти вираз для $cos3\varphi$ і $sin3\varphi$ через тригонометричні функції кута φ.

Розв'язання:

З формули (1.13) при $n=3$ маємо $(cos\varphi + i\,sin\varphi)^3 = cos3\varphi + i\,sin3\varphi$. Піднесемо ліву частину цієї рівності до третього степеня, враховуючи, що $i^3 = -i$ (див. приклад 1.8):

$$cos^3\varphi + i3cos^2\varphi\, sin\varphi - 3cos\varphi\, sin^2\varphi + i^3 sin^3\varphi = cos3\varphi + i\,sin3\varphi,$$
$$(cos^3\varphi - 3cos\varphi\, sin^2\varphi) + i(3cos^2\varphi\, sin\varphi - sin^3\varphi) = cos3\varphi + i\,sin3\varphi.$$

Використовуючи умову рівності комплексних чисел, отримаємо:

$$cos3\varphi = cos^3\varphi - 3cos\varphi \cdot sin^2\varphi, \qquad sin3\varphi = 3cos^2\varphi \cdot sin\varphi - sin^3\varphi.$$

Здобуття кореня. Розглянемо задачу про здобуття кореня з комплексного числа, заданого в показниковій $z = re^{i\varphi}$ або тригонометричній $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ формі. Шукане число $w = \sqrt[n]{z}$ також запишемо в показниковій формі: $w = \rho e^{i\theta}$, $\rho = |w|$, $\theta = arg\, w$. Використовуючи означення операції піднесення до степеня $z = w^n$ і умови (1.11), отримаємо:

$$\rho^n = r,\ n\theta = \varphi + 2k\pi,\ k \in Z,$$

звідки

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ k \in Z \qquad (1.14)$$

Правило здобуття кореня. Для того щоб здобути корінь з комплексного числа, потрібно здобути корінь (арифметичний) того ж степеня з модуля даного числа, а аргумент $(Argz)$ розділити на показник кореня:

$$\left|\sqrt[n]{z}\right| = \sqrt[n]{|z|},\ Arg\sqrt[n]{z} = \frac{Argz}{n}. \qquad (1.15)$$

Тепер можна записати число $w=\sqrt[n]{z}$ в показниковій формі:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\frac{Argz}{n}}.$$

Якщо записати це відношення в тригонометричній формі, то, враховуючи періодичність тригонометричних функцій, неважко переконатися, що вираз $\sqrt[n]{z}$ приймає тільки n різних значень. Для їх запису достатньо в формулі (1.14) узяти n послідовних значень k, наприклад $k=0,1,2,...,n-1$. В результаті отримаємо формулу здобуття кореня з комплексного числа в тригонометричній формі:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\,sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,...,n-1, \qquad (1.16)$$

де $r=|z|$, $\varphi=arg\,z$.

Зауваження.

1. Розглянута задача про здобуття кореня степеня n з комплексного числа рівносильна розв'язанню рівняння виду $z^n-a=0$, де, очевидно, $z=\sqrt[n]{a}$. Для розв'язання рівняння потрібно знайти n значень $\sqrt[n]{a}$, а для цього необхідно знайти $r=|a|$, $\varphi=arg\,a$ і використати формулу здобуття кореня.

1. Дослідження формули (1.16) показує, що всі комплексні числа w_k, $k=0,1,...,n-1$ (значення $\sqrt[n]{z}$) мають рівні модулі, тобто геометрично розташовані на колі з центром у початку координат радіуса $R=\sqrt[n]{r}$, $r=|z|$. Аргументи двох послідовних чисел відрізняються на $\frac{2\pi}{n}$, так як $arg\,w_{k+1}-arg\,w_k=\frac{2\pi}{n}$, тобто кожне наступне значення w_{k+1} може бути отримане із попереднього w_k поворотом радіус-вектору точки w_k на $\frac{2\pi}{n}$ (всі w_k розташовані в вершинах правильного n- кутника). В цьому полягає геометричний зміст формули (1.16).

Алгоритм розв'язання рівнянь вигляду $z^n-a=0$ $\left(z^n=a\right)$.

1. Знайти модуль і аргумент числа $a: r=|a|$, $\varphi=arg\,a$.
2. Записати формулу (1.16) при заданому значенні n:
$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\,sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$
3. Виписати значення коренів рівняння z_k, при $k=0,1,...,n-1$.

Приклад 1.24 Розв'язати рівняння: а) $z^6-1=0$; б) $z^3-i=0$.

Розв'язання:

Ця задача рівносильна задачі знаходження всіх значень кореня з комплексного числа. Розв'язуємо в кожному випадку за алгоритмом.

а) Знайдемо $z=\sqrt[6]{1}$.

1. Знайдемо модуль і аргумент числа 1: $r=1$, $\varphi=0$.

1. Для отриманих значень запишемо формулу (1.16):

$$z=\sqrt[6]{1}=\sqrt[6]{1}\cdot\left(cos\frac{2k\pi}{6}+i\,sin\frac{2k\pi}{6}\right),\ k=0,1,...,5.$$

Помітимо, що справа стоїть $\sqrt[6]{1}$ – арифметичний корінь, його єдине значення дорівнює 1.

3. Надаючи k послідовно значень від 0 до 5, випишемо розв'язки рівнянь:

$$z_1=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$z_2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_3=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_4=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

$$z_5=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_6=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

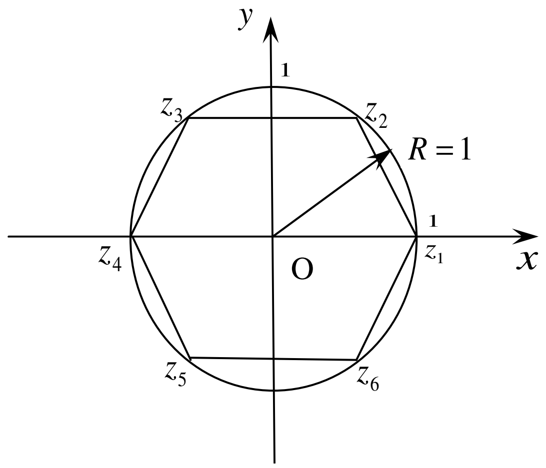

Рисунок 1.6,а – Ілюстрація до прикладу 1.24, а

Геометрично відповідні точки розташовані в вершинах правильного шестикутника, вписаного в коло радіуса $R=1$, одна з точок (відповідає $k=0$) $z_1=1$. Будуємо шестикутник (рис. 1.6,а). Помітимо властивості коренів цього рівняння з дійсними коефіцієнтами – його комплексні корені являються попарно спряженими: $z_6=\overline{z_2}$, $z_5=\overline{z_3}$, z_1 і z_4 – дійсні числа.

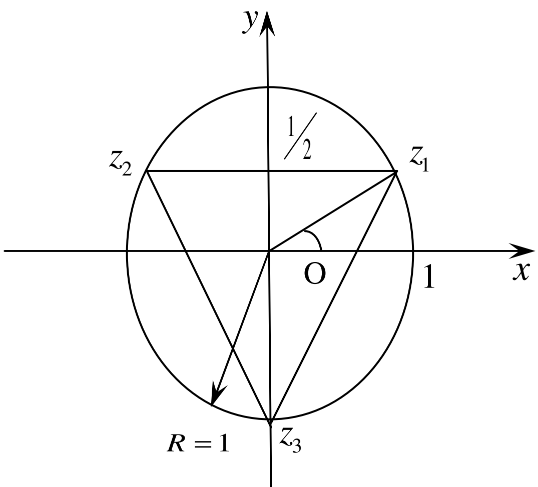

Рисунок 1.6,б – Ілюстрація до прикладу 1.24, б

б) Знайдемо $z=\sqrt[3]{i}$.

1. Визначимо модуль і аргумент числа i: $r=|i|=1$, $\varphi=\arg i=\dfrac{\pi}{2}$.

1. За формулою (1.16) запишемо:

$$\sqrt[3]{i}=1\cdot\left(cos\frac{\pi/2+2\pi k}{3}+i\,sin\frac{\pi/2+2\pi k}{3}\right)=$$

$$=cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)+i\,sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right),k=0,1,2.$$

3. Випишемо корені z_1,z_2,z_3:

$$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},\ z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},\ z_3=-i.$$

Для геометричного представлення розв'язків рівняння достатньо зобразити одне значення, наприклад $z_1=cos\dfrac{\pi}{6}+i\,sin\dfrac{\pi}{6}$ (при $k=0$) – це точка кола $|z|=1$, що лежить на промені $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Після цього будуємо правильний трикутник, вписаний в коло $|z|=1$ (рис. 1.6,б).

Теоретичні питання

1. Означення комплексного числа. Уявна одниця. Дійсна та уявна частини комплексного числа. Зображення комплексного числа на координатній площині. Алгебраїчна форма комплексного числа. Арифметичні операції над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі.
2. Комплексне спряження. Властивості.
3. Модуль та аргумент комплексного числа. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа.
4. Умови рівності комплексних чисел.
5. Зв'язок між алгебраїчною та тригонометричною формами числа.
6. Множення та ділення чисел, заданими у тригонометричній та показниковій формах. Піднесення числа до степеня. Формула Муавра.
7. Здобуття кореня n-ого степеня з комплексного числа.