3 МНОГОЧЛЕНИ

3.1 Додавання й множення многочленів. Найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне многочленів

Многочленом від змінної x *над полем* P називається вираз виду

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, \qquad (3.1)$$

де a_0, a_1, …, a_{n-1}, a_n – елементи поля P, які називаються *коефіцієнтами многочлена* (3.1). Якщо $a_0 \neq 0$, то n називається степенем многочлена, a_0 – *старшим коефіцієнтом*, a_n – *вільним членом*, a_0x^n – *старшим членом многочлена* (3.1).

Многочлен, всі коефіцієнти якого дорівнюють нулю, називається *нульовим* і позначається 0. Степінь нульового многочлена не визначена.

Два многочлени називаються *рівними*, якщо дорівнюють їх коефіцієнти при однакових степенях змінної x.

Нехай $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$, $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{s} b_k x^{s-k}$. *Добутком многочленів* $f(x)$ і $g(x)$ називається многочлен $f(x)\cdot g(x) = \sum\limits_{j=0}^{n+s} c_j x^{n+s-j}$, у якому $c_j = \sum\limits_{i+k=j} a_i b_k$.

Якщо $n \geq s$, то *сумою многочленів* $f(x)$ і $g(x)$ називається многочлен

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_s) + (a_{n-1} + b_{s-1})x + ...$$
$$... + (a_{n-s} + b_s)x^s + a_{n-s-1}x^{s+1} + ... + a_0x^n.$$

Щодо введених операцій додавання й множення множина всіх многочленів від змінної x над полем P є комутативним кільцем, що прийнято позначати $P[x]$. Якщо $f(x) \in P[x]$, $0 \neq g(x) \in P[x]$, то в $P[x]$ існує єдина пара многочленів $q(x)$, $r(x)$ таких, що $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, причому $r(x) = 0$ або степінь $r(x)$ менше степеня $g(x)$; $q(x)$ називається *часткою від ділення многочлена* $f(x)$ *на многочлен* $g(x)$, $r(x)$ – *остачею від цього ділення*. При $r(x) = 0$ кажуть, що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$ ($g(x)$ ділить $f(x)$), і пишуть $g(x) \mid f(x)$, при цьому многочлен $g(x)$ називається *дільником многочлена* $f(x)$, а $f(x)$ – *кратним многочлена* $g(x)$.

Найбільшим спільним дільником (НСД) многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$ з $P[x]$, $k > 1$, серед яких хоча б один відмінний від нульового, називається такий їх спільний дільник, що ділиться на будь-який спільний дільник даних многочленів і старший коефіцієнт якого дорівнює одиниці. НСД многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$ позначимо ($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$). Якщо $g(x)$ ділить $f(x)$, то ($f(x)$; $g(x)$) $= b_0^{-1}g(x)$, де b_0 – старший коефіцієнт многочлена $g(x)$. Якщо ж $g(x)$ не ділить $f(x)$, то НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює останній відмінній від нуля остачі алгоритму Евкліда для многочленів $f(x)$ і $g(x)$, діленій на старший коефіцієнт.

Розглянемо спосіб отримання НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$, відомий під назвою алгоритму Евкліда. Розділимо многочлен $f(x)$ на $g(x)$ та визначимо остачу $r_1(x)$:

$$f(x) = p_1(x)g(x) + r_1(x).$$

Розділимо дільник $g(x)$ на остачу $r_1(x)$ та знайдемо остачу $r_2(x)$:

$$g(x) = p_2(x)r_1(x) + r_2(x).$$

Будемо послідовно ділити многочлени $r_i(x)$ на $r_{i+1}(x), i = 1, 2, 3, \ldots$ та знаходити остачі $r_{i+2}(x)$. Через скінчене число кроків отримана остача r_{k+1} дорівнюватиме нулю. Таким чином, многочлен r_k – остання остача, що не дорівнюватиме нулю – буде найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Зауваження. При знаходженні НСД на всіх етапах алгоритма Евкліда дозволяється множити ділене або дільник на довільне ненульове число для спрощення відшукання остачі, яку знаходять з точністю до числового множника.

Відшукання НСД трьох і більше многочленів зводиться до відшукання НСД двох многочленів у силу рівності:

$$(f_1(x);\ f_2(x);\ \ldots;\ f_k(x)) = ((f_1(x);\ f_2(x);\ \ldots;\ f_{k-1}(x));\ f_k(x)),\ k \ge 3.$$

Якщо $(f_1(x);\ f_2(x);\ \ldots;\ f_k(x)) = d(x)$, то в $P[x]$ існують многочлени $g_i(x),\ i = \overline{1,k}$ такі, що $d(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x) g_i(x)$.

Многочлени називаються *взаємно простими*, якщо їх НСД дорівнює одиниці. Многочлени $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$ із $P[x]$ взаємно прості тоді й тільки тоді, коли існують у $P[x]$ многочлени $g_i(x),\ i = \overline{1,k}$ такі, що $\sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x) g_i(x) = 1.$

Найменшим спільним кратним (НСК) ненульових многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$ $(k > 1)$ з $P[x]$ називається таке їх спільне кратне, яке ділить будь-яке спільне кратне даних многочленів і старший коефіцієнт якого дорівнює одиниці. НСК многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$ будемо позначати $[f_1(x);\ f_2(x);\ \ldots;\ f_k(x)]$. НСК двох многочленів обчислюється за формулою

$$[f(x); g(x)] = \frac{f(x) \cdot g(x)}{a_0 b_0 (f(x);\ g(x))},$$

де a_0, b_0 – старші коефіцієнти многочленів $f(x)$ і $g(x)$ відповідно. Відшукання НСК трьох і більше многочленів зводиться до відшукання НСК двох многочленів у силу рівності

$$\lfloor f_1(x);\ f_2(x);\ \ldots;\ f_{k-1}(x);\ f_k(x)\rfloor = \lfloor\lfloor f_1(x);\ f_2(x);\ \ldots;\ f_{k-1}(x)\rfloor;\ f_k(x)\rfloor,\ k \ge 3.$$

3.2 Корінь многочлена

Нехай $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \in P[x]$, $a \in P$. *Значенням многочлена* $f(x)$ при $x = \alpha$ називають елемент $f(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n$ поля P й позначають його $f(\alpha)$.

Теорема 3.1 (Безу) Остача r від ділення многочлена $f(x)$ на лінійний двочлен $x - \alpha$ дорівнює значенню многочлена $f(x)$ при $x = \alpha$, тобто $r = f(\alpha)$.

Якщо многочлен $f(x)$ можна представити у вигляді $f(x) = (x - \alpha)\cdot g(x) + f(\alpha)$, $g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$, то коефіцієнти многочлена $g(x)$ та значення $f(\alpha)$ найпростіше знайти за допомогою *схеми Горнера*

	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
α	b_0	b_1	...	b_{n-1}	$f(\alpha)$

де $b_0 = a_0$; $b_1 = \alpha b_0 + a_1$; …; $b_k = \alpha b_{k-1} + a_k$; …; $b_{n-1} = \alpha b_{n-2} + a_{n-1}$; $f(\alpha) = \alpha b_{n-1} + a_n$.

Елемент $\alpha \in P$ називається *коренем многочлена* $f(x) \in P[x]$, якщо $f(\alpha) = 0$. Якщо $(x-\alpha)^k$, $k \in N$, ділить $f(x)$, але $(x-\alpha)^{k+1}$ не ділить $f(x)$, то α називається $k-$ *кратним коренем* (або *коренем кратності* k) многочлена $f(x)$. Корінь кратності $k = 1$ називається простим коренем.

Раціональні корені многочлена над полем дійсних чисел необхідно шукати тільки серед чисел: $\pm\frac{m}{n}$, де числа m – дільники вільного коефіцієнта a_n, а n – дільники старшого коефіцієнта a_0. Отже, якщо $a_0 = 1$ і відомо, що многочлен $f(x)$ має раціональні корені, то вони є цілими числами.

Многочлен $f(x)$ виду $f(x) = a$, $a \in P$, назвемо *сталим*. Для будь-якого несталого многочлена $f(x) \in P[x]$ існує розширення поля P, що містить всі корені многочлена $f(x)$, тобто розширення, в якому $f(x)$ розкладається на лінійні множники: $f(x) = \alpha_0(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n)$, де α_0 – старший коефіцієнт многочлена $f(x)$.

Корені α_1, α_2, ..., α_n многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \ne 0$, пов'язані з його коефіцієнтами *формулами Вієта*:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\alpha_n = -\frac{a_1}{a_0};$$

$$\sum_{i_1<i_2}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_2}{a_0};\ \ldots;$$

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k}=(-1)^k\frac{a_k}{a_0};\ \ldots;\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

Похідною многочлена $f(x)=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n\in P[x]$, $a_0\neq 0$, $n\geq 1$, називається многочлен

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots 2a_{n-2}x+a_{n-1}.$$

Похідна сталого многочлена, за означенням, вважається рівною нульовому многочлену. Многочлен $f(x)\in P[x]$ не має кратних коренів ні в полі P, ні в будь-якому його розширенні тоді й тільки тоді, коли він взаємно простий зі своєї похідною.

Для многочленів над полем нульової характеристики справедливе твердження: k – кратний корінь многочлена є $(k-1)$ – кратним коренем його похідної. Зокрема, простий корінь многочлена не є коренем його похідної.

Нехай $f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_s)^{k_s}\in P[x]$, $char\ P=0$, $\alpha_i\neq\alpha_j$ при $i\neq j$, $k_i>0$. Тоді $(f(x);\ f'(x))=(x-\alpha_1)^{k_1-1}(x-\alpha_2)^{k_2-1}\ldots(x-\alpha_s)^{k_s-1}$ й многочлен

$$f_1(x)=\frac{f(x)}{(f(x);\ f'(x))}=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_s)$$

має ті ж корені, що й $f(x)$, але всі вони є простими.

Якщо $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ – різні елементи поля P, а $\beta_0,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_n$ – довільні елементи поля P, то в $P[x]$ існує один і тільки один многочлен $f(x)$ степеня $\leq n$ такий, що $f(\alpha_i)=\beta_i$, $i=\overline{0,n}$. Цей многочлен задається формулою

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\beta_i\frac{(x-\alpha_0)\ldots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\ldots(x-\alpha_n)}{(\alpha_i-\alpha_0)\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}. \tag{3.2}$$

Формула (3.2) називається *інтерполяційною формулою Лагранжа*.

Многочлен $f(x)$ (з потрібними властивостями) можна одержати й за допомогою *інтерполяційної формули Ньютона*:

$$f(x)=\lambda_0+\lambda_1(x-\alpha_0)+\lambda_2(x-\alpha_0)(x-\alpha_2)+\ldots+\lambda_n(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{n-1}),$$

де коефіцієнти $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ визначаються послідовно шляхом підстановки замість x значень $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$.

3.3 Незвідність многочленів. Многочлени над C, R і Q

Несталий многочлен з коефіцієнтами з поля P називається *звідним* над полем P, якщо він розкладається в добуток двох несталих многочленів з коефіцієнтами з поля P. У противному випадку, несталий многочлен називається *незвідним* над полем P. Сталі многочлени, за означенням, не зараховуються ні до тих, що зводяться, ні до тих, що не зводяться. Усякий несталий многочлен з коефіцієнтами з поля P розкладається в добуток незвідних многочленів над полем P. Такий розклад однозначний (єдиний) з точністю до постійних множників і порядку запису співмножників.

Нехай $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n\in P[x]$, $n\geq 1$. Запис многочлена $f(x)$ у вигляді

$$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)...p_s^{k_s}(x), \tag{3.3}$$

де $p_1(x)$, $p_2(x)$, …, $p_s(x)$ – різні незвідні многочлени над полем P зі старшими коефіцієнтами, що дорівнюють одиниці, називається *канонічним розкладом* многочлена $f(x)$ над полем P. Канонічний розклад многочлена $f(x)$ визначений однозначно з точністю до порядку запису співмножників.

Нехай $p(x)$ – многочлен, незвідний над полем P. Якщо $p^k(x)$ ділить $f(x)$, $k\in N$, але $p^{k+1}(x)$ не ділить $f(x)$, то многочлен $p(x)$ називається k – *кратним незвідним множником многочлена* $f(x)$. Якщо $char\ P=0$, то k – кратний незвідний множник многочлена $f(x)$ є $(k-1)$ – кратним множником похідної $f'(x)$. Зокрема, при $k=1$ $f'(x)$ не ділиться на $p(x)$.

Нехай $f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)...p_s^{k_s}(x)$ – канонічний розклад многочлена $f(x)$ над полем P, $char\ P=0$. Тоді $(f(x);f'(x))=p_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2-1}(x)...p_s^{k_s-1}(x)$ й многочлен

$$f_1(x)=\frac{f(x)}{(f(x);f'(x))}=a_0p_1(x)p_2(x)...p_s(x)$$

має ті ж незвідні множники, що й $f(x)$, але не має k – кратних незвідних множників $(k\geq 2)$.

Над полем комплексних чисел незвідними многочленами є многочлени першого степеня і тільки вони. Над полем дійсних чисел незвідними є многочлени першого степеня, многочлени другого степеня з від'ємними дискримінантами і тільки вони.

Многочлен $f(x)\in Q[x]$ є незвідним над Q тоді й тільки тоді, коли над цим полем є незвідним многочлен з цілими коефіцієнтами, отриманий множенням $f(x)$ на НСК знаменників всіх його коефіцієнтів. Многочлен із цілими коефіцієнтами не зводиться над полем раціональних чисел тоді й тільки тоді, коли він не розкладається в добуток двох несталих многочленів із цілими коефіцієнтами. Незвідність многочлена з цілими коефіцієнтами над Q можна встановити, користуючись наступною *ознакою Ейзенштейна*.

Нехай $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ – многочлен з цілими коефіцієнтами. Якщо існує таке просте число p, що a_0 не ділиться на p, всі інші коефіцієнти многочлена $f(x)$ діляться на p, не діляться на p^2, то многочлен $f(x)$ є незвідним над полем раціональних чисел.

Раціональним дробом або *дробово-раціональною функцією* над полем P називається вираз виду $\frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ й $g(x)$ – многочлени з коефіцієнтами з поля P, причому $g(x) \neq 0$. Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ й $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ над полем P називаються *рівними*, якщо $f(x) \cdot \psi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ в кільці $P[x]$.

На множині всіх раціональних дробів над полем P можна задати алгебраїчні операції (додавання й множення) рівностями:

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{f(x)\psi(x) + g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{f(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}.$$

Щодо цих операцій множина раціональних дробів над полем P є полем, що називається *полем раціональних дробів* або *полем дробово-раціональних функцій над полем P* і позначається $P(x)$.

Раціональний дріб називається *правильним*, якщо в ньому степінь чисельника менше степеня знаменника. Правильний раціональний дріб називається *найпростішим*, якщо його знаменник є степенем деякого незвідного многочлена, степінь якого більше степеня чисельника. Основною теоремою про раціональні дроби є наступна: кожний правильний раціональний дріб розкладається в суму найпростіших дробів, причому це розкладання єдине.

3.4 Границі та відокремлення дійсних коренів многочлена

Для практики велике значення має питання про знаходження такого інтервалу, в якому знаходяться всі дійсні корені многочлена $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами. Число b, яке є більшим за довільний корінь многочлена $f(x)$, будемо називати верхнею межею дійсних коренів цього многочлена. Число a, яке є меншим за довільний корінь многочлена $f(x)$, будемо називати нижньою межею дійсних коренів цього многочлена.

Теорема 3.2 Нехай число $b > 0$ таке, що коефіцієнти частки та остача при діленні многочлена $f(x)$ на $x - b$ є числами одного знаку, тоді число b – верхня границя додатних коренів многочлена $f(x)$.

Теорема 3.3 Нехай $f(x)$ – многочлен степеня n з дійсними коефіцієнтами. Розглянемо допоміжні многочлени: $f_1(x) = f(-x)$, $f_2(x) = x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f_3(x) = x^n \cdot f\left(-\frac{1}{x}\right)$ та позначимо через b_1, b_2, b_3 – верхні межі додатних коренів цих многочленів. Тоді нижня границя від'ємних коренів многочлена $f(x)$ дорівнює $-b_1$, нижня границя додатних коренів дорівнює $\frac{1}{b_2}$, а верхня границя від'ємних коренів $-\frac{1}{b_3}$.

Розглянемо многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами. Припустимо, що він не має кратних коренів, тобто $f(x)$ та $f'(x)$ взаємно прості.

Назвемо системою Штурма для многочлена $f(x)$ скінчену впорядковану систему многочленів з дійсними коефіцієнтами

$$f_0(x) = f(x),\ f_1(x),\ \ldots,\ f_m(x) \tag{3.4}$$

якщо виконуються наступні умови:

1) сусідні многочлени системи не мають спільних коренів;
2) останній многочлен $f_m(x)$ не має дійсних коренів;
3) якщо x_0 – дійсний корінь многочлена f_k $\left(k = \overline{1, m-1}\right)$, то числа $f_{k-1}(x_0)$ та $f_{k+1}(x_0)$ мають різні знаки;
4) якщо x_0 – дійсний корінь многочлена $f(x)$, то добуток $f(x) \cdot f_1(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, коли x, зростаючи, переходить через число x_0.

Нехай число C не є коренем многочлена $f(x)$. Обчислимо значення всіх многочленів системи Штурма при $x = C$. Отримаємо сукупність дійсних чисел: $f_0(C), f_1(C), \ldots, f_m(C)$. Викреслимо з цієї сукупності числа, що дорівнюють нулю, та позначимо через $W(C)$ число перемін знаку в послідовності, що залишилася.

Теорема 3.4 (теорема Штурма) Нехай многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами не має кратних коренів та володіє системою Штурма (3.4). Якщо числа a і b, що не є коренями многочлена $f(x)$, такі, що $W(b) \geq W(a)$, то різниця $W(b) - W(a)$ дорівнює числу дійсних коренів многочлена $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$.

Теорема 3.5 Всякий многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами степеня, не нижче першого, що не має кратних коренів, володіє системою Штурма, яка може бути побудована наступним чином:

1) покладемо $f_0(x) = f(x),\ f_1(x) = f'(x)$ (при необхідності похідну можна скоротити на додатний множник);
2) розділимо $f_{k-1}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ на $f_k(x)$, а остачу від ділення з протилежним знаком приймемо за $f_{k+1}(x)$.

Процес продовжуємо до тих пір, поки остання з остач не виявиться многочленом нульового степеня (при цьому для спрощення обчислень на всіх етапах алгоритму дозволяється множити ділене або дільник на довільне додатне число – знаки при побудові системи грають вирішальну роль).

3.5 Многочлени від декількох змінних

Многочленом $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ *від* n *змінних* $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ над полем P називається сума скінченого числа доданків виду

$$a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}, \tag{3.5}$$

де всі $k_i \geq 0$; a – елемент поля P, що називається *коефіцієнтом члена* (3.5). Передбачається, що многочлен $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ не містить подібних членів і члени з коефіцієнтами, що дорівнюють нулю, не записуються.

Два многочлени $f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ й $g(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ називаються *рівними*, якщо їх коефіцієнти при однакових членах дорівнюють один одному.

Сума $k_1 + k_2 + ... + k_n$ називається *степенем члена* (3.5).

Степенем многочлена $f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ *по сукупності змінних* називається найбільша зі степенів його членів. Многочлени нульового степеня – це відмінні від нуля елементи поля P. Многочлен від n змінних, всі коефіцієнти якого дорівнюють нулю, називається *нульовим*. Степінь нульового многочлена вважається невизначеною.

Сумою многочленів $f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ і $g(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ називається многочлен, коефіцієнти якого знаходяться додаванням відповідних коефіцієнтів многочленів f і g; якщо при цьому деякий член входить у запис лише одного з даних многочленів, то коефіцієнт при ньому в іншому многочлені вважається рівним нулю.

Добутком многочленів $f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ і $g(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ називається многочлен, отриманий почленним множенням f на g з наступним приведенням подібних доданків. Щодо введених операцій додавання й множення множина всіх многочленів від змінних $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ над полем P є комутативним кільцем, що прийнято позначати $P[x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n]$.

Нехай

$$ax_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}\,, \tag{3.6}$$

$$bx_1^{e_1} x_2^{e_2} ... x_n^{e_n}\,, \tag{3.7}$$

де $a \neq 0$; $b \neq 0$, – різні члени многочлена $f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \in P[x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n]$. Член (3.6) будемо вважати вище члена (3.7) (а член (3.7) – нижче члена (3.6)), якщо існує таке i, $1 \leq i \leq n$, що $k_1 = e_1,\ ...,\ k_{i-1} = e_{i-1}$, але $k_i > e_i$. Якщо всі члени многочлена $f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ розташовані так, що кожний наступний нижче попереднього, то кажуть, що члени цього многочлена розташовані *лексикографічно* (або многочлен $f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ записаний лексикографічно). Той член, що при лексикографічному записі многочлена розташований на першому місці, називається *старшим членом многочлена*. Старший член добутку многочленів дорівнює добутку старших членів співмножників.

Многочлен $f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ називається *симетричним*, якщо він не змінюється ні при якій перестановці змінних $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$. Наступні n симетричних многочленів від n змінних:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n\,;$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n;$$
$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_1x_2x_n + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n;\ \ldots;$$
$$\sigma_{n-1} = x_1x_2\ldots x_{n-1} + x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n + \ldots + x_2x_3\ldots x_n;$$
$$\sigma_n = x_1x_2\ldots x_n$$
називаються *елементарними* (або *основними*) *симетричними* многочленами.

Основна теорема про симетричні многочлени. Усякий симетричний многочлен від змінних $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ над полем P можна представити у вигляді многочлена від елементарних симетричних многочленів $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n$ з коефіцієнтами, що належать полю P; це представлення єдине. З теореми випливає, що $f(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) \in P$, якщо $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ – корені многочлена $g(x)$ степеня n з коефіцієнтами з поля P й $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ – симетричний многочлен з коефіцієнтами з поля P.

Статечними сумами називаються симетричні многочлени $S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$. З елементарними симетричними многочленами вони пов'язані формулами Ньютона:
$$S_k - S_{k-1}\sigma_1 + S_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^{k-1}S_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0,\ k \le n,$$
$$S_k - S_{k-1}\sigma_1 + S_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^{k-1}S_{k-n}\sigma_n = 0,\ k > n.$$

Теоретичні питання

1. Означення многочлена *n*-ого степеня з дійсними коефіцієнтами. Старший член многочлена. Вільний член многочлена.
2. Операції додавання, віднімання многочленів. Добуток двох многочленів.
3. Властивості операцій додавання, множення многочленів.
4. Ділення двох многочленів. Неповна частка, остача. Ділення кутом.
5. Означення дільника многочлена.
6. Найбільший спільний дільник многочленів.
7. Алгоритм Евкліда знаходження НСД двох многочленів.
8. Взаємно прості многочлени.
9. Найменше спільне кратне многочленів.
10. Основні властивості подільності многочленів.
11. Теореми про взаємо прості многочлени.
12. Означення взаємно простої системи многочленів.
13. Означення кореня многочлена.
14. Значення многочлена в точці.
15. Схема Горнера. Її побудова та застосування.
16. Простий корінь многочлена. Кратний корінь. Показник кратності кореня многочлена.
17. Похідні многочлена в точці (знаходження за допомогою схеми Горнера).
18. Основна теорема алгебри комплексних чисел.
19. Формули Вієта.
20. Теорема про комплексні корені многочлена.
21. Раціональний дріб. Правильний раціональний дріб. Найпростіший дріб.

22. Теорема про розкладання раціонального дробу у суму найпростіших.