4 ЛІНІЙНІ ТА ЕВКЛІДОВІ ПРОСТОРИ

4.1 Лінійні простори

В таких алгебраїчних структурах, як група, кільце, поле об'єктом розгляду є одна множина елементів, над якими можна проводити одну або дві алгебраїчні операції. Лінійний простір є алгебраїчною структурою, в якій фігурують дві множини: поле $P(\oplus,\circ)$ та адитивна абелева група $V(+)$. Для зручності елементи групи будемо називати векторами та позначати: $\overline{a},\overline{b},\overline{c},...$ Елементи поля $P(\oplus,\circ)$ будемо називати числами та позначати: $\alpha,\beta,\gamma,...$

Множина V називається лінійним простором над полем P, якщо виконуються наступні умови:

I. множина $V(+)$ є адитивною абелевою групою:

1. $(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$,
2. $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$,
3. існує нейтральний елемент $\overline{0}\in V:\ \overline{x}+\overline{0}=\overline{x}$,
4. $\forall\ \overline{x}\in V\ \exists -\overline{x}:\ \overline{x}+(-\overline{x})=\overline{0}$;

II. кожній парі елементів $\alpha\in P$ і $\overline{x}\in V$ ставиться у відповідність елемент $\alpha\cdot\overline{x}\in V$:

1. $\alpha\cdot(\beta\cdot\overline{x})=(\alpha\circ\beta)\cdot\overline{x}$,
2. $1\cdot\overline{x}=\overline{x}$, де 1 – нейтральний елемент поля P;

III. операції $+,\oplus,\cdot$ підпорядковуються законам дистрибутивності:

1. $(\alpha\oplus\beta)\cdot\overline{x}=\alpha\cdot\overline{x}+\beta\cdot\overline{x}$,
2. $\alpha\cdot(\overline{x}+\overline{y})=\alpha\cdot\overline{x}+\alpha\cdot\overline{y}$.

При застосуванні теорії лінійних просторів найчастіше використовуються лінійні простори над полем дійсних або комплексних чисел. Тому в подальшому під полем P будемо розуміти одне зі вказаних полів.

Два лінійних простори V_1 і V_2 над одним полем P називаються ізоморфними, якщо між векторами цих просторів можна встановити таку взаємно однозначну відповідність, що сумі векторів простору V_1 відповідає сума їх образів з V_2 та вектору $\alpha\overline{x}$ простору V_1 відповідає вектор $\alpha\overline{x}'$ з V_2, тобто $(\overline{x}+\overline{y})'=\overline{x}'+\overline{y}',(\alpha\overline{x})'=\alpha\overline{x}'$.

Вектори $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_n$ лінійного простору V називаються лінійно залежними, якщо існують такі числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ з поля P, серед яких не всі дорівнюють нулю, що $\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n=\overline{0}$. Якщо остання рівність можлива лише у випадку, коли $\forall i=\overline{1,n}\ \alpha_i=0$, то вектори $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_n$ називаються лінійно незалежними.

Лінійний простір V над полем P називаються скінчено вимірним, якщо у ньому можна знайти скінчену максимальну лінійно незалежну систему векторів. Всяка така система називається базою (базисом) простору V. Кількість векторів бази називається розмірністю простору V.

Нехай вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ є базою скінчено вимірного простору V над полем дійсних або комплексних чисел. Тоді довільний вектор $\overline{a}$ простору можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів бази: $\overline{a} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + ... + \alpha_n \overline{e}_n$. Числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ називаються координатами вектора $\overline{a}$ в базі $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$.

Теорема 4.1. Якщо лінійні простори V_1 та V_2 над полем P ізоморфні, то лінійно незалежній системі векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_r$ простору V_1 відповідає лінійно незалежна система їх образів $\overline{a}'_1, \overline{a}'_2, ..., \overline{a}'_r$ простору V_2.

Наслідок. Якщо простори V_1 та V_2 ізоморфні, то образом бази одного простору є база другого простору.

Нехай $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ та $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, ..., \overline{e}'_n$ – дві різні бази одного n- вимірного лінійного простору V (над полем дійсних або комплексних чисел). Для зручності назвемо базу $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ старою, а $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, ..., \overline{e}'_n$ новою. Представимо кожний вектор нової бази у вигляді комбінації векторів старої:

$$\begin{aligned} &\overline{e}'_1 = a_{11}\overline{e}_1 + a_{21}\overline{e}_2 + ... + a_{n1}\overline{e}_n, \\ &\overline{e}'_2 = a_{12}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2 + ... + a_{n2}\overline{e}_n, \\ &... \\ &\overline{e}'_n = a_{1n}\overline{e}_1 + a_{2n}\overline{e}_2 + ... + a_{nn}\overline{e}_n. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Матрицю координат векторів нового базису $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, ..., \overline{e}'_n$ у старому базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

будемо називати матрицею переходу від старої бази $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ до нової $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, ..., \overline{e}'_n$.

Введемо у розгляд матриці-стовпці

$$e = \begin{pmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \dots & \overline{e}_n \end{pmatrix}^t \text{ та } e' = \begin{pmatrix} \overline{e}'_1 & \overline{e}'_2 & \dots & \overline{e}'_n \end{pmatrix}^t.$$

Тоді за допомогою цих матриць систему (4.1) можна записати у вигляді: $e' = T^t \cdot e$. Зауважимо, що матриця T невироджена.

Нехай вектор $\overline{a}$ задано своїми координатами у старому базисі $\overline{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^t$. Тоді його координати у новому базисі можна визначити за формулою: $\begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & \dots & a'_n \end{pmatrix}^t = T^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^t$.

Множина L лінійного векторного простору V над полем P дійсних або комплексних чисел називається підпростором простору V, якщо $\forall\ \overline{x}, \overline{y} \in L,\ \lambda \in P:\ \overline{x} + \overline{y} \in L, \lambda \cdot \overline{x} \in L$. Довільна максимальна лінійно незалежна сукупність векторів підпростору L називається базою підпростору, а число векторів, що входять до бази, називається розмірністю підпростору.

Нехай M – множина векторів $\bar{f}_1, \bar{f}_2, ..., \bar{f}_m, ...$ лінійного простору V. Сукупність всіх можливих комбінацій цих векторів, кожна з яких складається зі скінченої кількості векторів множини M, називається оболонкою множини M та позначається $L(M)$. Лінійна оболонка $L(M)$ є підпростором простору V.

Теорема 4.2. Нехай множина M складається зі скінченого числа векторів $\bar{f}_1, \bar{f}_2, ..., \bar{f}_k$ лінійного простору V, тоді розмірність оболонки $L(M)$ дорівнює рангу системи векторів $\bar{f}_1, \bar{f}_2, ..., \bar{f}_k$.

Нехай V – скінчено вимірний лінійний простір над полем дійсних або комплексних чисел, а L_1 та L_2 – два підпростори цього простору. Сумою $L_1 + L_2$ називають лінійну оболонку їх об'єднання $L_1 \bigcup L_2$. Так як оболонка довільної множини векторів простору V є підпростором простору V, то сума підпросторів L_1 та L_2 є деяким підпростором простору V. Перетином двох підпросторів L_1 та L_2 простору V називають таку множину векторів, кожний з яких належить одночасно і підпростору L_1 і підпростору L_2. Перетин $L_1 \bigcap L_2$ двох підпросторів L_1 та L_2 також є підпростором простору V.

Теорема 4.3. Нехай L_1 та L_2 – два підпростори лінійного простору V. Тоді $dim(L_1 + L_2) = dim(L_1) + dim(L_2) - dim(L_1 \bigcap L_2)$.

Наслідок. Якщо підпростори L_1 та L_2 n-вимірного простору V такі, що $dim(L_1) + dim(L_2) > n$, то підпростір $L_1 \bigcap L_2$ містить хоча б один ненульовий вектор.

Якщо підпростір $L_1 \bigcap L_2$ містить лише нульовий вектор, то сума таких підпросторів називається прямою та позначається $L_1 \oplus L_2$.

Теорема 4.4. Нехай L_1 та L_2 – підпростори лінійного простору V, причому $V = L_1 \oplus L_2$. Тоді довільний вектор простору V можна представити єдиним чином у вигляді суми двох векторів, один з яких належить підпростору L_1, а другий – L_2.

Теорема 4.5. Якщо n-вимірний лінійний простір V розкладається у пряму суму підпросторів L_1 та L_2, тобто $V = L_1 \oplus L_2$, то $dim(L_1) + dim(L_2) = n$.

Нехай L_1 та L – два підпростори лінійного простору V, причому $L_1 \subset L$. Якщо існує такий підпростір L_2 простору V, що $L_1 \oplus L_2 = L$, то підпростір L_2 називають прямим доповненням до підпростору L_1 відносно підпростору L.

Теорема 4.6. Якщо L_1 та L – два підпростори лінійного простору V, причому $L_1 \subset L$, то існує підпростір L_2 простору V, що є прямим доповненням до підпростору L_1 відносно підпростору L.

4.2 Дійсний евклідовий простір

Лінійний простір над полем дійсних чисел називається дійсним евклідовим простором, якщо в ньому визначена операція скалярного добутку двох будь-яких векторів, тобто будь-якій парі векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ простору ставиться у відповідність дійсне число $(\bar{x},\bar{y})$. При цьому для будь-яких векторів простору повинні виконуватися такі умови (аксіоми):

1. $(\bar{x},\bar{x})\geq 0$; $(\bar{x},\bar{x})=0 \Leftrightarrow \bar{x}=\bar{0}$;
2. $(\bar{x},\bar{y})=(\bar{y},\bar{x})$;
3. $(\lambda\bar{x},\bar{y})=\lambda(\bar{x},\bar{y})$, λ – число;
4. $(\bar{x}_1+\bar{x}_2,\bar{y})=(\bar{x}_1,\bar{y})+(\bar{x}_2,\bar{y})$.

Розглянемо приклади евклідових просторів.

1. Векторний простір направлених відрізків над полем дійсних чисел, в якому скалярний добуток двох довільних векторів $\bar{x}$ і $\bar{y}$ введений таким чином:

$$(\bar{x},\bar{y})=|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|\cdot cos\varphi,\ \bar{x}\neq\bar{0},\ \bar{y}\neq\bar{0}\ (\varphi \text{ – кут між } \bar{x} \text{ і } \bar{y}),$$

$$(\bar{x},\bar{y})=0, \text{ якщо } \bar{x}=\bar{0} \text{ або } \bar{y}=\bar{0}.$$

2. $C_{[a,b]}$ – множина всіх неперервних на відрізку $[a,b]$ дійсних функцій. Ця множина є лінійним простором над полем дійсних чисел. Простір стане евклідовим, якщо кожній парі функцій $f(x)$ і $g(x)$ із множини C поставити у відповідність число

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Теорема 1.1. Для будь-яких двох векторів $\bar{x}$ і $\bar{y}$ дійсного евклідового простору $(\bar{x},\bar{y})^2\leq(\bar{x},\bar{x})(\bar{y},\bar{y})$ (нерівність Коші - Буняковського).

Лінійний простір називається нормованим, якщо кожному вектору $\bar{x}$ цього простору поставлено у відповідність число $\|\bar{x}\|$, яке називається нормою вектору або його довжиною. При цьому повинні виконуватися умови (аксіоми норми):

1. $\|\bar{x}\|\geq 0$, причому $\|\bar{x}\|=0 \Leftrightarrow \bar{x}=\bar{0}$;
2. $\|\bar{x}_1+\bar{x}_2\|\leq\|\bar{x}_1\|+\|\bar{x}_2\|$ – нерівність трикутника;
3. $\|\lambda\bar{x}\|\leq|\lambda|\cdot\|\bar{x}\|\ \forall\lambda\in R$.

Всякий евклідовий простір можна вважати нормованим, якщо кожному вектору $\bar{x}$ простору поставити у відповідність число $\|\bar{x}\|=\sqrt{(\bar{x},\bar{x})}$. Щоб переконатися в цьому, потрібно перевірити виконання всіх аксіом норми. Перша і третя аксіоми норми виконуються, оскільки за першою властивістю скалярного добутку $(\bar{x},\bar{x})\geq 0$, причому $(\bar{x},\bar{x})=0$ лише при $\bar{x}=\bar{0}$, тобто $\|\bar{x}\|\geq 0$, лише коли $\bar{x}=\bar{0}$, а за третьою властивістю $(\lambda\bar{x},\lambda\bar{x})=\lambda^2(\bar{x},\bar{x})$, тобто $\|\lambda\bar{x}\|=\sqrt{(\lambda\bar{x},\lambda\bar{x})}=|\lambda|\cdot\|\bar{x}\|$. Аксіома трикутника також виконується. Дійсно,

$\left\| \overline{x}_1 + \overline{x}_2 \right\| = \sqrt{\left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2, \overline{x}_1 + \overline{x}_2\right)} = \sqrt{\left(\overline{x}_1, \overline{x}_1\right) + 2\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2\right) + \left(\overline{x}_2, \overline{x}_2\right)}$. Згідно нерівності Коші - Буняковського $\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2\right) \le \sqrt{\left(\overline{x}_1, \overline{x}_1\right)\left(\overline{x}_2, \overline{x}_2\right)}$.

Отже, $\left\| \overline{x}_1 + \overline{x}_2 \right\| \le \sqrt{\left\| \overline{x}_1 \right\|^2 + 2\left\| \overline{x}_1 \right\| \left\| \overline{x}_2 \right\| + \left\| \overline{x}_2 \right\|^2} = \left\| \overline{x}_1 \right\| + \left\| \overline{x}_2 \right\|$.

По аналогії з випадком тривимірного простору направлених відрізків введемо поняття кута між двома векторами евклідового простору. Під кутом між якими-небудь ненульовими векторами $\overline{x}$ і $\overline{y}$ простору будемо розуміти таке число $\varphi \in [0, \pi]$, що $cos\varphi = \dfrac{\left(\overline{x}, \overline{y}\right)}{\left\|\overline{x}\right\| \left\|\overline{y}\right\|}$.

Це означення коректне, оскільки згідно з нерівністю Коші - Буняковського $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)^2 \le \left\|\overline{x}\right\|^2 \left\|\overline{y}\right\|^2$, тому дріб, що визначає значення $cos\varphi$ за модулем менше одиниці. Отже, які б не були ненульові вектори $\overline{x}$ і $\overline{y}$ евклідового простору, існує єдине число $\varphi \in [0, \pi]$, що визначає кут між векторами $\overline{x}$ і $\overline{y}$.

Приклад. Нехай V – евклідовий простір, елементами якого є дійсні функції, неперервні на відрізку $[0, \pi]$. Скалярний добуток двох довільних елементів $\overline{f} = f(x)$ та $\overline{g} = g(x)$ простору V визначимо відомим способом $\left(\overline{f}, \overline{g}\right) = \int\limits_0^{\pi} f(x) g(x) dx$. Потрібно знайти кут між елементами $\overline{a} = \sin x$ і $\overline{b} = \sin 3x$.

Розв'язання:

Згідно з означенням скалярного добутку:

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \int\limits_0^{\pi} sin\,x\,sin\,3x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}(cos\,2x - cos\,4x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} cos\,2x\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} cos\,4x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} sin\,2x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{8} sin\,4x\Big|_0^{\pi} = 0;$$

$$\left\|\overline{a}\right\| = \left\|\overline{b}\right\| = \sqrt{\pi}.$$

На основі формули $cos\varphi = \dfrac{\left(\overline{x}, \overline{y}\right)}{\left\|\overline{x}\right\| \left\|\overline{y}\right\|}$: $cos\varphi = 0$, отже, кут між елементами $\sin x$ і $\sin 3x$ простору V дорівнює $\dfrac{\pi}{2}$.

Два вектори $\overline{x}$ і $\overline{y}$ евклідового простору називаються ортогональними, якщо їх скалярний добуток $\left(\overline{x}, \overline{y}\right) = 0$. Суму $\overline{x} + \overline{y}$ двох ортогональних векторів $\overline{x}$ і $\overline{y}$ називатимемо гіпотенузою прямокутного трикутника, побудованого на векторах $\overline{x}$ і $\overline{y}$.

Теорема Піфагора. Квадрат довжини гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює сумі квадратів довжин катетів.

4.3 Ортонормований базис в евклідовому просторі

В евклідовому просторі вектор $\bar{x}$ називається нормованим, якщо його довжина дорівнює одиниці.

Припустимо, що в n- вимірному евклідовому просторі існують n попарно ортогональних векторів, що мають одиничні норми, тобто $(\bar{e}_i, \bar{e}_k) = 1$ при $i = k$. Покажемо, що ці n векторів утворюють базис n- вимірного простору (ортонормований базис). Для цього потрібно довести, що вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ лінійно незалежні. Припустимо, що $\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n = \bar{0}$, де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – деякі доки невідомі дійсні числа. Помножимо обидві частини цієї рівності скалярно на вектор $\bar{e}_1$, отримаємо $\alpha_1(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + \alpha_2(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + \ldots + \alpha_n(\bar{e}_n, \bar{e}_1) = 0$. Так як $(\bar{e}_к, \bar{e}_1) = 0$, $k = \overline{2, n}$, $(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 1, (\bar{e}_k, \bar{e}_1) = 0$, то число $\alpha_1 = 0$. Аналогічним чином встановлюється, що $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. Отже, рівність $\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n = \bar{0}$ можлива лише тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, а це означає, що вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ лінійно незалежні.

Покажемо тепер, що ортонормовані базиси існують в евклідовому просторі. Нехай $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n$ який-небудь базис n- вимірного евклідового простору. Побудуємо за допомогою цього базису ортонормований базис простору. Покладемо $\bar{e}_1 = \dfrac{\bar{f}_1}{\|\bar{f}_1\|}$ $(\|\bar{e}_1\| = 1)$. Із векторів $\bar{e}_1$ і $\bar{f}_2$ утворимо вектор $\bar{g}_2 = \bar{f}_2 - \alpha \bar{e}_1$. Число α візьмемо таким, щоб $(\bar{g}_2, \bar{e}_1) = 0$. Отримаємо $0 = (\bar{g}_2, \bar{e}_1) = (\bar{f}_2 - \alpha \bar{e}_1, \bar{e}_1) = (\bar{f}_2, \bar{e}_2) - \alpha(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = (\bar{f}_2, \bar{e}_1) - \alpha$. Звідси, $\alpha = (\bar{f}_2, \bar{e}_1)$, а $\bar{g}_2 = \bar{f}_2 - (\bar{f}_2, \bar{e}_1)\bar{e}_1$. Покладемо $\bar{e}_2 = \dfrac{\bar{g}_2}{\|\bar{g}_2\|}$ $(\|\bar{e}_2\| = 1)$. Одиничний вектор $\bar{e}_2$ ортогональний вектору $\bar{e}_1$. Побудуємо тепер допоміжний вектор $\bar{g}_3 = \bar{f}_3 - \mu \bar{e}_1 - \nu \bar{e}_2$. Підберемо числа μ і ν так, щоб $(\bar{g}_3, \bar{e}_1) = 0, (\bar{g}_3, \bar{e}_2) = 0$. Для визначення цих двох чисел маємо систему рівнянь $0 = (\bar{g}_3, \bar{e}_1) = (\bar{f}_3, \bar{e}_1) - \mu,\ 0 = (\bar{g}_3, \bar{e}_2) = (\bar{f}_3, \bar{e}_2) - \nu$. Звідси випливає, $\mu = (\bar{f}_3, \bar{e}_1), \nu = (\bar{f}_3, \bar{e}_2)$, а $\bar{g}_3 = \bar{f}_3 - (\bar{f}_3, \bar{e}_1)\bar{e}_1 - (\bar{f}_3, \bar{e}_2)\bar{e}_2$. Одиничний вектор $\bar{e}_3 = \dfrac{\bar{g}_3}{\|\bar{g}_3\|}$, очевидно, ортогональний одиничним векторам $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$.

Продовжуючи процес створення попарно ортогональних одиничних векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \ldots$ (процес ортогоналізації), побудуємо за скінчене число кроків ортонормований базис n- вимірного евклідового простору:

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{f}_1}{\|\bar{f}_1\|},$$

$$\bar{e}_2=\frac{\bar{g}_2}{\|\bar{g}_2\|},\ \bar{g}_2=\bar{f}_2-(\bar{f}_2,\bar{e}_1)\bar{e}_1,$$

$$\bar{e}_3=\frac{\bar{g}_3}{\|\bar{g}_3\|},\ \bar{g}_3=\bar{f}_3-(\bar{f}_3,\bar{e}_1)\bar{e}_1-(\bar{f}_3,\bar{e}_2)\bar{e}_2,$$

$$\ldots$$

$$\bar{e}_n=\frac{\bar{g}_n}{\|\bar{g}_n\|},\ \bar{g}_n=\bar{f}_n-(\bar{f}_n,\bar{e}_1)\bar{e}_1-(\bar{f}_n,\bar{e}_2)\bar{e}_2-\ldots-(\bar{f}_n,\bar{e}_{n-1})\bar{e}_{n-1}.$$

Відмітимо, що різних ортонормованих базисів евклідового простору нескінченно багато, оскільки нескінченно багато базисів $\bar{f}_1,\bar{f}_2,...,\bar{f}_n$, з яких процесом ортогоналізації можна створювати ортонормовані базиси.

Нехай $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$ – який-небудь ортонормований базис евклідового простору, а $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – два довільно взятих вектора цього простору. Представимо кожен з векторів у вигляді лінійної комбінації базисних $\bar{x}=x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+...+x_n\bar{e}_n$, $\bar{y}=y_1\bar{e}_1+y_2\bar{e}_2+...+y_n\bar{e}_n$. Знайдемо $(\bar{x},\bar{y})$, вважаючи відомими координати векторів $\bar{x}$ і $\bar{y}$ в ортонормованому базисі. Маємо $(\bar{x},\bar{y})=x_1y_1+x_2y_2+...+x_n\,y_n$. Тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат в ортонормованому базисі.

4.4 Ортогональне доповнення підпростору евклідового простору. Ізоморфізм евклідових просторів

Нехай L – який-небудь підпростір евклідового простору V. Множина F всіх векторів $\bar{y}$ простору V, ортогональних кожному вектору $\bar{x}$ підпростору L, називається ортогональним доповненням підпростору L відносно простору V. Покажемо, що множина F є підпростором простору V. Для цього потрібно переконається, що сума двох будь-яких векторів множини F належить цій множині і що добуток будь-якого вектору множини F на довільне дійсне число також належить множині F. Нехай $\bar{y}_1$ і $\bar{y}_2$ – два довільні вектори множини F, а $\bar{x}$ – який-небудь вектор підпростору L. Очевидно, $(\bar{x},\bar{y}_1)=0$ і $(\bar{x},\bar{y}_2)=0$ за властивістю векторів множини F. Так як $(\bar{x},\bar{y}_1+\bar{y}_2)=(\bar{x},\bar{y}_1)+(\bar{x},\bar{y}_2)=0$, то $\bar{y}_1+\bar{y}_2\in F$. Для довільного числа λ маємо $(\bar{x},\lambda\bar{y}_1)=\lambda(\bar{x},\bar{y}_1)=0$. Отже і вектор $\lambda\bar{y}_1\in F$. Таким чином, множина F є підпростором евклідового простору V.

З'ясуємо, чи існують взагалі спільні вектори підпросторів L та F. Нехай $\bar{a}\in L$ і $\bar{a}\in F$, тоді $(\bar{a},\bar{a})=0$, тобто $\bar{a}=\bar{0}$. Отже, підпростори L і F не мають спільних векторів, окрім вектора $\bar{0}$ простору V. Звідси витікає, що сума цих підпросторів є прямою.

Евклідові простори V і V' називаються ізоморфними, якщо між векторами цих просторів можна встановити таку взаємно-однозначну відповідність, що $\left(\overline{x}+\overline{y}\right)' = \overline{x}' + \overline{y}'$, $\left(\lambda\overline{x}\right)' = \lambda\overline{x}'$, $\left(\overline{x},\overline{y}\right)' = \left(\overline{x}',\overline{y}'\right)$, де $\overline{x}', \overline{y}', \left(\overline{x}+\overline{y}\right)', \left(\lambda\overline{x}\right)'$ – образи векторів $\overline{x}, \overline{y}$, $\overline{x}+\overline{y}$ і $\lambda\overline{x}$ простору V.

Теорема. Всі евклідові простори однієї розмірності ізоморфні.

4.5 Комплексний евклідовий (унітарний) простір

Лінійний простір над полем комплексних чисел називається комплексним евклідовим простором або унітарним, якщо в ньому визначена операція скалярного добутку двох будь-яких векторів, тобто вказано правило, за яким кожній парі векторів $\overline{x}$ і $\overline{y}$ простору ставиться у відповідність комплексне число $\left(\overline{x},\overline{y}\right)$, при цьому виконуються наступні умови (аксіоми скалярного добутку)

1. $\left(\overline{x},\overline{x}\right) \geq 0$, $\left(\overline{x},\overline{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$;
2. $\left(\overline{x},\overline{y}\right) = \overline{\left(\overline{y},\overline{x}\right)}$;
3. $\left(\lambda\overline{x},\overline{y}\right) = \lambda\left(\overline{x},\overline{y}\right)$;
4. $\left(\overline{x}_1+\overline{x}_2,\overline{y}\right) = \left(\overline{x}_1,\overline{y}\right)+\left(\overline{x}_2,\overline{y}\right)$.

Тут λ – довільне комплексне число, $\overline{\left(\overline{y},\overline{x}\right)}$ – число, спряжене числу $\left(\overline{y},\overline{x}\right)$.

Комплексний евклідовий простір можна зробити нормованим, якщо кожному вектору $\overline{x}$ поставити у відповідність дійсне число $\left\|\overline{x}\right\| = \sqrt{\left(\overline{x},\overline{x}\right)}$. Перевірка аксіом норми здійснюється так само, як і в дійсному евклідовому просторі. Вона основана на використанні нерівності Коші – Буняковського для унітарного простору $\left(\mathrm{Re}\left(\overline{x},\overline{y}\right)\right)^2 \leq \left(\overline{x},\overline{x}\right)\left(\overline{y},\overline{y}\right)$.

В унітарному просторі поняття кута між двома векторами не використовується, але два вектори $\overline{x}$ і $\overline{y}$ такі, що $\left(\overline{x},\overline{y}\right) = 0$, називаються ортогональними.

В комплексному евклідовому просторі існують ортонормовані базиси. Процес ортогоналізації довільного базису унітарного простору співпадає з процесом ортогоналізації базису дійсного евклідового простору.

Нехай $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ – ортонормований базис комплексного евклідового простору, а $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + ... + x_n\overline{e}_n$ і $\overline{y} = y_1\overline{e}_1 + ... + y_n\overline{e}_n$ – два довільно взятих вектори цього простору. Тоді на основі аксіом і властивостей скалярного добутку

$$\left(\overline{x},\overline{y}\right) = \left(x_1\overline{e}_1 + ... + x_n\overline{e}_n, y_1\overline{e}_1 + ... + y_n\overline{e}_n\right) = \left(x_1\overline{e}_1, y_1\overline{e}_1\right) + ... + \left(x_n\overline{e}_n, y_n\overline{e}_n\right) =$$
$$= x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + ... + x_n\overline{y}_n,$$

де $\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_n$ – числа, спряжені комплексним числам $y_1, ..., y_n$. Таким чином $\left(\overline{x},\overline{y}\right) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + ... + x_n\overline{y}_n$, тобто скалярний добуток двох векторів унітарного простору, в якому вибраний ортонормований базис, дорівнює сумі добутків координат першого вектору на відповідні спряжені значення координат іншого вектору.