5 ОПЕРАТОРИ

В теорії лінійних просторів важливу роль відіграють *лінійні оператори*, які ще називають *лінійними «перетвореннями»* простору.

У векторному просторі L задано оператор, якщо вказано правило (закон), за яким кожному вектору $\overline{x} \in L$ ставиться у відповідність деякий вектор $\overline{x}' \in L$. Вектор $\overline{x}'$ називають образом вектора $\overline{x}$, а $\overline{x}$ – прообразом вектора $\overline{x}'$.

Отже, оператор у векторному просторі L – це функція, множиною визначення і множиною значень якої є простір L.

Оператори позначають буквами $A, B, C, \ldots, \varphi, \psi \ldots$

Образ вектора $\overline{x}$ при дії оператора A позначають символом $\overline{x}' = A\,\overline{x}$.

Оператори в просторі L називають ще операторами простору L, перетвореннями простору L, відображенням простору L в себе.

Оператор A у векторному просторі L називають *лінійним*, якщо він задовольняє наступним умовам:

1. $\forall\ \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in L \quad A(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = A\overline{x}_1 + A\overline{x}_2;$
2. $\forall\ \vec{x} \in L \quad A(\lambda \overline{x}) = \lambda \cdot (A\overline{x}).$

Із означення лінійного оператора випливають наступні *властивості*:

1. Будь-який лінійний оператор A в просторі L залишає нерухомим нульовий вектор $\overline{0}$ цього простору, тобто $A(\overline{0}) = \overline{0}$.
2. Будь-який лінійний оператор A в просторі L протилежному вектору $-\overline{x}$ довільного вектора $\overline{x}$ ставить у відповідність вектор, протилежний образу вектора $\overline{x}$.
3. Лінійний оператор A в просторі L будь-якій лінійній комбінації довільно вибраних векторів $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ простору L ставить у відповідність лінійну комбінацію (з тими ж коефіцієнтами) образів цих векторів.

З'ясуємо, якими елементами можна задати лінійний оператор в просторі L_n.

Задати лінійний оператор A в просторі L_n – це означає задати образи всіх векторів кожного базису цього простору.

Якщо відомі образи всіх векторів одного з базисів простору L_n при дії оператора A, то можна знайти образи всіх векторів простору при дії цього оператора.

Теорема 5.1 Будь-який оператор A в просторі L_n однозначно визначається завданням образів $A\overline{e}_1, A\overline{e}_2, \ldots, A\overline{e}_n$ всіх векторів будь-якого фіксованого базису $B < \overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n >$ цього простору.

Теорема 5.2 Якою б не була впорядкована система з n векторів $\overline{c}_1, \overline{c}_2, \ldots, \overline{c}_n$ простору L_n існує, і до того ж тільки один, лінійний оператор A простору L_n такий, що вектори цієї системи будуть образами векторів базису $B < \overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n >$ при дії цього оператора.

Нехай A – деякий лінійний оператор в L_n, $B < \overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n >$ – будь-який базис цього простору. Оператор A відображає вектори цього базису в деякі вектори $A\overline{e}_1, A\overline{e}_2, ..., A\overline{e}_n$ кожний з яких одночасно виражається через вектори базису B.

Нехай

$$A\overline{e}_1 = \alpha_{11}\overline{e}_1 + \alpha_{21}\overline{e}_2 + ... + \alpha_{n1}\overline{e}_n,$$
$$A\overline{e}_2 = \alpha_{12}\overline{e}_1 + \alpha_{22}\overline{e}_2 + ... + \alpha_{n2}\overline{e}_n,$$
$$...$$
$$A\overline{e}_n = \alpha_{1n}\overline{e}_1 + \alpha_{2n}\overline{e}_2 + ... + \alpha_{nn}\overline{e}_n.$$

З коефіцієнтів α_{ik} складаємо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

стовпцями якої є координатні рядки векторів $A\overline{e}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ в базисі $B < \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n >$.

Оскільки координатні рядки векторів $A\overline{e}_i$ визначаються однозначно, то і матриця A визначається оператором A однозначно.

Матрицю A називають *матрицею лінійного оператора* A в базисі $B < \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n >$.

Отже в базисі B лінійний оператор A задається матрицею A.

При фіксованому базисі B кожному лінійному оператору A простору L_n відповідає певним чином визначена матриця $n-$ого порядку – матриця цього лінійного оператора.

І, навпаки, кожна матриця $n-$ого порядку $B = (\beta_{ik})$ є матрицею деякого лінійного оператора простору L_n в базисі $B < \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n >$.

Дійсно, знаючи матрицю $B = (\beta_{ik})$, знайдемо вектори:

$$\overline{b}_1 = \beta_{11}\overline{e}_1 + \beta_{21}\overline{e}_2 + ... + \beta_{n1}\overline{e}_n,$$
$$\overline{b}_2 = \beta_{12}\overline{e}_1 + \beta_{22}\overline{e}_2 + ... + \beta_{n2}\overline{e}_n,$$
$$...$$
$$\overline{b}_n = \beta_{1n}\overline{e}_1 + \beta_{2n}\overline{e}_2 + ... + \beta_{nn}\overline{e}_n.$$

За теоремою 2 визначимо лінійний оператор.

В просторі L_n, який вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ відображає відповідно у вектори $\overline{b}_1, \overline{b}_2, ..., \overline{b}_n$ оператор B – єдиний, його матрицею в базисі $< \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n >$ є матриця B.

Отже, якщо в лінійному просторі L_n над полем P обрано базис $< \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n >$ і кожному оператору A простору L_n поставлено у відповідність матрицю A цього оператора в базисі $B < \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n >$, то цим буде встановлена взаємно-однозначна відповідність між всіма лінійними операторами простору L_n і всіма матрицями $n-$ого порядку над полем P.

З'ясуємо, як знаючи матрицю лінійного оператора A і координати вектора $\overline{x}$ в базисі $B<\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n>$, знайти координати вектора $A\overline{x}$ в цьому ж базисі.

Позначаючи координатний стовпець вектора $\overline{x}$ через $[\overline{x}]$, а координатний стовпець вектора $A\overline{x}$ – символом $[A\overline{x}]$, одержуємо

$$[A\overline{x}]=\begin{bmatrix}\lambda_1\alpha_{11}+\lambda_2\alpha_{21}+...+\lambda_n\alpha_{n1}\\ \lambda_1\alpha_{12}+\lambda_2\alpha_{22}+...+\lambda_n\alpha_{n2}\\ ...\\ \lambda_1\alpha_{1n}+\lambda_2\alpha_{2n}+...+\lambda_n\alpha_{nn}\end{bmatrix}=A[\overline{x}],$$

тобто $[A\overline{x}]=A[\overline{x}]$.

Отже, справедливе *твердження*:

Координатний стовпець вектора $[A\overline{x}]$ в базисі $B<\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n>$ дорівнює добутку матиці лінійного оператора та координатного стовпця вектора $\overline{x}$ в цьому базисі.

Матриці є тим аналітичним апаратом, за допомогою якого вивчаються лінійні оператори в скінченно вимірних просторах.

Кожний лінійний оператор простору L_n задається в обраному базисі певною матрицею. При зміні базису матриця лінійного оператору також буде змінюватися. Як же пов'язані матриці, які задають один і той же оператор, в різних базисах?

Лема: Нехай $A=(\alpha_{ij})$ і $B=(\beta_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$ – матриці над полем P. Якщо для будь-якого стовпця $[\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n]$ з елементами з поля P $A[\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n]=B[\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n]$, то $A=B$.

Теорема 5.3 Якщо лінійний оператор A простору L_n задається в базисі $B<\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n>$ матрицею A, то в базисі $B'<\overline{e}'_1,\overline{e}'_2,...,\overline{e}'_n>$ він задається матрицею $A'=T^{-1}\cdot A\cdot T$, де T – матриця переходу від базису B до базису B'.

Рядками матриці оператору T в базисі B є координатні рядки векторів $\overline{e}_1',\overline{e}_2',...,\overline{e}_n'$ в цьому базисі. Але координатні рядки векторів $\overline{e}_i'$ в базисі B є рядками і матриці переходу T від базису B до базису B'.

Отже, матриця переходу T є матрицею оператора T, який переводить базис B в базис B', обчислена в базисі B. Але матриця переходу T є матрицею оператора T в базисі B'.

Дійсно, матрицею оператора T в базисі B є матриця T; матрицею переходу від базису B до базису B' є також матриця T. Тому матрицею оператора B в базисі B' є матриця

$$T\cdot T\cdot T^{-1}=T.$$

Нехай A і B – матриці $n-$ого порядку над полем P.

Означення. Матриця B називається подібною до матриці A, якщо існує така невироджена матриця $n-$ого порядку Q над полем P, що

$$B=Q^{-1}\cdot A\cdot Q.$$

Теорема 5.4 На множині M_n всіх матриць $n-$ого порядку над полем P подібність матриць є відношенням еквівалентності.

Отже, всі матриці, які задають даний лінійний оператор A простору L_n в різних базисах цього простору, подібні між собою.

Якщо матриця A задає лінійний оператор A в базисі $<\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n>$, то і будь-яка матриця B подібна матриці A:

$$B=Q^{-1}AQ$$

також задає оператор A в деякому базисі B', а саме в базисі $<\overline{e}_1',\overline{e}_2',...,\overline{e}_n'>$, пов'язаному з базисом $<\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n>$ матрицею переходу $T=Q^{-1}$.

Отже, всі матриці класу подібних матриць і тільки вони задають в різних базисах простору L_n один і той же лінійний оператор цього простору.

Властивості подібних матриць:

1. Подібні матриці мають рівні визначники.
2. Подібні матриці A і B або одночасно вироджені, або одночасно невироджені.

Нехай A і B – деякі лінійні оператори простору L_n.

Означення.

1. Оператор S, який кожному вектору $\overline{x}\in L_n$ ставить у відповідність вектор $A\overline{x}+B\overline{x}$, називається сумою операторів A і B, позначається $S=A+B$. Отже, $S=A+B$ означає, що $\forall\ \overline{x}\in L_n \quad S\overline{x}=A\overline{x}+B\overline{x}$.
2. Добутком лінійних операторів A і B називається оператор C, який визначається за формулою: $\forall\ \overline{x}\in L_n \quad C\overline{x}=A(B\overline{x})$, позначається $C=A\cdot B$.
3. Добутком лінійного оператора A на число α називається оператор D, який визначається за формулою: $\forall\ \overline{x}\in L_n\ \forall\alpha\in P \quad Dx=\alpha A\overline{x}$, позначають $D=\alpha A$.

Властивості операцій над лінійними операторами:

1. Сума лінійних операторів A і B є лінійним оператором.
2. Операція додавання лінійних операторів асоціативна і комутативна.
3. Множина L_n^* всіх лінійних операторів простору L_n з визначеною на ній операцією додавання є адитивною абелевою групою.
4. Добуток лінійних операторів A і B є лінійним оператором.
5. Операція множення операторів асоціативна і пов'язана з операцією додавання дистрибутивними законами.
6. Множина L_n^* всіх лінійних операторів простору L_n з визначеними на ній операціями додавання і множення є кільцем.
7. Добуток лінійного оператора A на число λ є лінійним оператором.
8. Множина L_n^* всіх лінійних операторів простору L_n є лінійним простором над полем P.

Множина L_n^* з визначеними на ній операціями є прикладом алгебраїчної системи, яка називається *лінійною алгеброю* або просто *алгеброю*. Лінійна алгебра, так само як група, кільце і поле, належить до основних типів алгебраїчних систем.

Означення. Лінійною алгеброю над полем P називається множина U, на якій визначені операції додавання і множення і операція множення елементів з U на елементи з поля P, причому U відносно додавання і множення елементів з U є кільце, а відносно додавання та множення на елементи з P – лінійний простір і, зокрема, множення елементів з U і множення на елементи з P пов'язані співвідношеннями

$$\forall \lambda \in P \quad \forall \overline{a}, \overline{b} \in U \quad \lambda\left(\overline{a}\overline{b}\right) = \left(\lambda\overline{a}\right)\overline{b} = \overline{a}\left(\lambda\overline{b}\right)$$

Лінійні алгебри U і U_1 над полем P називаються ізоморфними, якщо між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність так, що якщо елементам $\overline{a}$ і $\overline{b}$ алгебри U відповідають елементи $\overline{a}_1$ і $\overline{b}_1$ алгебри U_1, то сумі $\overline{a} + \overline{b}$ відповідає сума $\overline{a}_1 + \overline{b}_1$, добутку $\overline{a} \cdot \overline{b}$ – добуток $\overline{a}_1 \cdot \overline{b}_1$ і добутку $\lambda\overline{a}$ $\left(\lambda \in P\right)$ відповідає добуток $\lambda\overline{a}_1$.

Теорема 5.5 Алгебра L_n^* лінійних операторів $n-$вимірного векторного простору L_n над полем P ізоморфна алгебрі M_n матриць $n-$ого порядку над полем P.

Нехай M – деяка підмножина $n-$вимірного лінійного простору L_n і A – довільний лінійний оператор цього простору. Оператор A переводить кожний вектор $\overline{x} \in M$ в деякий вектор $A\overline{x}$, який є образом вектора $\overline{x}$.

Означення. Сукупність образів всіх векторів множини M називається образом множини M відносно оператора A, позначають M_A.

Теорема 5.6 Образ будь-якого лінійного підпростору U простору L_n відносно будь-якого лінійного оператора A також є підпростором простору L_n.

Означення. Сукупність L_{nA} образів усіх векторів простору L_n називається областю значень лінійного оператора A.

Іноді область значень лінійного оператора A називають образом оператора A і позначають символом $Im A$. З теореми 5.6 випливає, що образ лінійного оператора A є лінійним підпростором простору L_n.

Означення. Розмірність області значень L_{nA} називають рангом оператора A і позначають $rang\ A$.

Теорема 5.7 Ранг будь-якого лінійного оператора простору L_n дорівнює рангу матриці цього оператора у довільно обраному базисі.

Але розмірність підпростору L_{nA}, тобто ранг оператора A, дорівнює максимальній кількості лінійно незалежних векторів системи (*), отже – рангу матриці A.

Наслідок. Всі подібні між собою матриці мають однакові ранги.

Означення. Ядром лінійного оператора A простору L_n називається сукупність всіх векторів цього простору, які оператором A відображаються в нульовий вектор $\overline{0}$.

Ядро лінійного оператора позначається символом $KerA$.

Розмірність ядра оператора A називається *дефектом* цього оператора.

Ядро лінійного оператора є підпростором простору L_n.

Теорема 5.8 Сума рангу і дефекту лінійного оператора A простору L_n дорівнює розмірності n цього простору

$$dim(Im\,A) + dim(KerA) = dim\,L_n = n\,.$$

Нехай A – лінійний оператор, що діє в $n-$вимірному просторі L_n.

Означення. Лінійний оператор A простору L_n називається не виродженим, якщо його ранг дорівнює n; оператор A називається виродженим, якщо його ранг менше n.

Отже, лінійний оператор A не вироджений якщо:

1. область значень $L_{n\,A}$ оператора A співпадає з простором L_n;
2. дефект оператора дорівнює нулю;
3. ядро оператора A складається тільки з нульового вектора.

Теорема 5.9 Лінійний оператор A простору L_n не вироджений тоді і тільки тоді, коли його матриця A в довільно вибраному базисі $<\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n>$ простору L_n невироджена.

Теорема 5.10 Не вироджений лінійний оператор A простору L_n взаємно однозначно відображає простір L_n на весь L_n.

Теорема 5.11 Не вироджений лінійний оператор A простору L_n будь-яку лінійно незалежну систему векторів цього простору переводить в лінійно незалежну систему.

Означення. Лінійний оператор B простору L_n називається оберненим до лінійного простору A, якщо $A \cdot B = B \cdot A = E$, де E – одиничний оператор. Обернений оператор позначають A^{-1}.

Обернений оператор переводить кожний вектор $A\bar{x}$ у вектор $\bar{x}$.

Теорема 5.12 Для того щоб існував оператор A^{-1}, обернений до оператора A, необхідно і достатньо, щоб оператор A був невиродженим.

З теореми випливає ще одне означення невиродженого оператора, а саме: *невиродженим лінійним оператором* називається лінійний оператор, для якого існує обернений оператор.

Ненульовий вектор $\bar{x}$ називається *власним вектором* оператора, якщо $\exists\,\lambda \in K:\ \ A\bar{x} = \lambda\,\bar{x}$. В цьому випадку λ називається *власним числом (значенням)* оператора A.

Запишемо *характеристичний многочлен* оператора:

$$X(\lambda) = det(A - \lambda E) \text{ або } X\,(\lambda) = \left|\,A - \lambda\,E\,\right|.$$

Теорема 5.13 Число λ буде власним числом оператора A тоді і тільки тоді, коли $\left|\,A - \lambda\,E\,\right| = 0$.

Алгебраїчною кратністю власного значення $\tilde{\lambda}$ називається таке число k, при якому характеристичний многочлен $X(\lambda)$ ділиться на $\left(\lambda - \tilde{\lambda}\right)^k$ і не ділиться на $\left(\lambda - \tilde{\lambda}\right)^{k+1}$. Іншими словами, це кратність числа $\tilde{\lambda}$ як кореня характеристичного многочлена. *Геометрична кратність* $\tilde{\lambda}$ – це розмірність інваріантного підпростору M_{λ}, тобто кількість лінійно незалежних власних векторів, що відповідають власному значенню $\tilde{\lambda}$.

Нехай лінійний оператор A $n-$вимірного векторного простору L_n має n лінійно незалежних власних векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$, тобто в просторі L_n існує базис $< \bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n >$, який складається з власних векторів оператора A з власними значеннями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Тоді $A\bar{e}_1 = \lambda_1 \bar{e}_1$, $A\bar{e}_2 = \lambda_2 \bar{e}_2$, ..., $A\bar{e}_n = \lambda_n \bar{e}_n$ В цьому базисі оператор A задається діагональною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Навпаки, якщо в деякому базисі $< \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n >$ матриця A' оператора A діагональна

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \alpha_n \end{pmatrix},$$

то $A\bar{e}'_i = \alpha_i \bar{e}'_i$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$, тобто всі вектори цього базису – власні вектори оператора A'.

Отже, справедлива *теорема.*

Теорема 5.14 Якщо вектори базису $< \bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n >$ є власними векторами лінійного оператора A, то в базисі $< \bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n >$ оператор A задається діагональною матрицею. Навпаки, якщо в деякому базисі матриця оператора A – діагональна, то всі вектори цього базису є власними векторами оператора A.

Виникає питання: чи можна оператор A задати в деякому базисі діагональною матрицею, і як, знаючи матрицю оператора A в деякому базисі, встановити, чи має цей оператор власні вектори, які утворюють базис простору?

Означення. Лінійний оператор A в $n-$вимірному просторі L_n над полем P має простий спектр, якщо в полі P існує n різних характеристичних коренів цього оператора.

Теорема 5.15 Якщо лінійний оператор A має простий спектр, то існує базис простору L_n, в якому цей оператор задається діагональною матрицею.

Нехай A матриця $n-$ого порядку над полем P. Вважають, що матриця A зводиться до діагонального виду, якщо існує діагональна матриця, подібна до матриці A.

Теорема 5.16 Кожна матриця $n-$ого порядку над полем P, яка має в цьому полі n різних характеристичних коренів, подібна деякій діагональній матриці, тобто зводиться до діагонального виду.

Знаходження матриці, подібної матриці A, називається зведенням матриці A до діагонального виду.

Розглянемо спосіб знаходження діагональної матриці A_1, подібної матриці A.

Вище було доведено, що матриця A лінійного оператора A векторного простору L_n над полем P у деякому базисі є діагональною тоді і тільки тоді, коли цей базис складається з власних векторів даного оператора.

Достатньою умовою для зведення матриці лінійного оператора векторного простору розмірності n є наявність у даного оператора n різних власних значень, причому діагональними елементами будуть саме ці власні значення.

Якщо лінійний оператор має менш як n власних значень, причому враховується їх кратність як коренів характеристичного рівняння оператора, то матриця такого оператора не зводиться до діагонального виду.

Якщо лінійний оператор має менш як n різних власних значень, причому враховуються кратності кожного як коренів характеристичного рівняння оператора (їх рівно n), то треба дослідити ще, яке число k лінійно незалежних власних векторів визначає кожен корінь λ кратності s. Оскільки число лінійно незалежних власних векторів довільного лінійного оператора, які належать одному власному значенню λ, не перевищує s, то:

– матриця не зводиться до діагонального виду, коли хоча б для одного λ виконується нерівність $k < s$ (тоді не набереться стільки власних векторів, скільки їх повинно бути в базисі);

– матриця зводиться до діагонального виду, коли для всіх λ виконується рівність $k = s$, причому діагональними елементами є власні значення оператора, що повторюються стільки разів, яка їх кратність.

Серед лінійних операторів, які діють в евклідовому просторі, важливу роль відіграють ортогональні та симетричні оператори. Розглянемо питання щодо ортогональних операторів.

Означення. Лінійний оператор A в дійсному евклідовому просторі R_n називається ортогональним, якщо $\left(A\overline{x}, A\overline{y}\right) = \left(\overline{x}, \overline{y}\right)\ \forall\ \overline{x}, \overline{y} \in R_n$.

Ортогональний оператор зберігає скалярний добуток, отже, він зберігає довжини векторів і кути між ними.

Властивості ортогональних векторів:

Тотожній оператор E є ортогональним, оскільки $E\overline{x} = \overline{x}\ \forall\ \overline{x}$, отже, $\left(E\overline{x}, E\overline{y}\right) = \left(\overline{x}, \overline{y}\right)$.

Добуток ортогональних операторів є ортогональним, оскільки оператори A і B ортогональні, то $\left(AB\overline{x}, AB\overline{y}\right) = \left(A\overline{x}, A\overline{y}\right) = \left(\overline{x}, \overline{y}\right)$.

Оператор, обернений до ортогонального оператору, є ортогональним.

Якщо A – ортогональний оператор, то добуток αA буде ортогональним тоді і тільки тоді, коли $\alpha = \pm 1$. Це випливає з рівності $\left(\alpha A\overline{x}, \alpha A\overline{y}\right) = \alpha^2\left(A\overline{x}, A\overline{y}\right) = \alpha^2\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$.

Ортогональний оператор переводить будь-який ортонормований базис в ортонормований. Покажемо, що вірне і обернене *твердження*: лінійний оператор A, який переводить хоч би один ортонормований базис в ортонормований є ортогональним.

Дійсно, нехай ортонормований базис $<\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n>$ оператором A переводиться в ортонормований базис $<\bar{e}_1',\bar{e}_2',...,\bar{e}_n'>$. Тоді, якщо

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n,\ \bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + ... + y_n\bar{e}_n,$$

то

$$A\bar{x} = x_1\bar{e}_1' + x_2\bar{e}_2' + ... + x_n\bar{e}_n',\ A\bar{y} = y_1\bar{e}_1' + y_2\bar{e}_2' + ... + y_n\bar{e}_n'$$

і

$$\left(A\bar{x}, A\bar{y}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_ny_n = \left(\bar{x},\bar{y}\right).$$

Нехай $A = \left(\alpha_{ik}\right)$ – матриця ортогонального оператора в ортогональному базисі $<\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n>$. Оскільки під дією ортогонального оператора ортонормований базис переходить в ортонормований, то образи $A\bar{e}_1, A\bar{e}_2,..., A\bar{e}_n$ базисних векторів $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$ самі утворюють ортонормований базис. Отже, $\left(A\bar{e}_i, A\bar{e}_k\right) = 0$ при $i \neq k$ і $\left(A\bar{e}_i, A\bar{e}_i\right) = 1$ при всіх i, тобто

$$a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} + ... + a_{ni}a_{nk} = 0 \text{ при } i \neq k,$$

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + ... + a_{ni}^2 = 1 \text{ при всіх } i. \tag{5.1}$$

Звідси випливає, що стовпці матриці A, які розглядаються як вектори, самі утворюють ортонормовану систему. Це ж вірно і для рядків, тобто

$$a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + ... + a_{in}a_{kn} = 0 \text{ при } i \neq k,$$

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + ... + a_{in}^2 = 1 \text{ при всіх } i. \tag{5.2}$$

Означення. Матриця A, для якої транспонована матриця A^t співпадає з оберненою матрицею A^{-1} називається ортогональною матрицею.

Отже, якщо для матриці A має місце співвідношення $A^t = A^{-1}$, то матриця A – ортогональна і для неї виконуються рівності (5.1) і (5.2).

Матриця ортогонального оператора в будь-якому базисі є ортогональною, і, навпаки, якщо в деякому ортонормованому базисі матриця оператору A є ортогональною, то і оператор A – ортогональний.

Теорема 5.17 Визначник ортогональної матриці дорівнює ± 1.

З теореми випливає, що будь-який ортогональний оператор є невиродженим. Обернене твердження невірне, оскільки не будь-яка матриця з визначником, що дорівнює ± 1, буде ортогональною.

Теорема 5.18 Матриця переходу від ортонормованого базису евклідового простору до іншого його ортонормованого базису є ортогональною.

Теорема 5.19 Власні значення ортогонального оператору дорівнюють ± 1.

З'ясуємо, що собою являє довільний ортогональний оператор, який діє в дійсному $n-$вимірному евклідовому просторі. Нехай A – ортогональне перетворення прямої R^1 і $\bar{e} \in R^1$. Тоді $A\bar{e} \in R^1$, і, отже, $A\bar{e} = \lambda\bar{e}$, де $\lambda = \pm 1$, тобто $A\bar{e} = \pm\bar{e}$, і A – або тотожне перетворення, або центральна симетрія.

Нехай тепер A – ортогональне перетворення площини R^2 і

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

– його матриця в деякому ортонормованому базисі. Тоді

$$a_{11}^2+a_{21}^2=1;\ a_{12}^2+a_{22}^2=1;\ a_{11}\cdot a_{12}+a_{21}\cdot a_{22}=0.$$

В силу перших двох рівностей знайдуться такі φ і ψ, що $a_{11}=cos\,\varphi$, $a_{21}=sin\,\varphi$ і $a_{12}=cos\,\psi$, $a_{22}=sin\,\psi$. Тоді третя рівність дає

$$cos\,\varphi\cdot cos\,\psi+sin\,\varphi\cdot sin\,\psi=cos(\psi-\varphi)=0.$$

Звідси випливає, що $\psi-\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ або $\dfrac{3\pi}{2}$. В першому випадку $a_{12}=cos\,\psi=-sin\,\varphi$, $a_{22}=sin\,\psi=cos\,\varphi$, і одержуємо

$$A=\begin{pmatrix} cos\,\varphi & -sin\,\varphi \\ sin\,\varphi & cos\,\varphi \end{pmatrix},$$

тобто перетворення A – це поворот на кут φ навколо початку координат. (зокрема при $\varphi=0$, це тотожне перетворення, а при $\varphi=\pi$ – симетрія відносно початку координат).

У другому випадку $a_{12}=sin\,\varphi$, $a_{22}=-cos\,\varphi$ і

$$A=\begin{pmatrix} cos\,\varphi & sin\,\varphi \\ sin\,\varphi & -cos\,\varphi \end{pmatrix}.$$

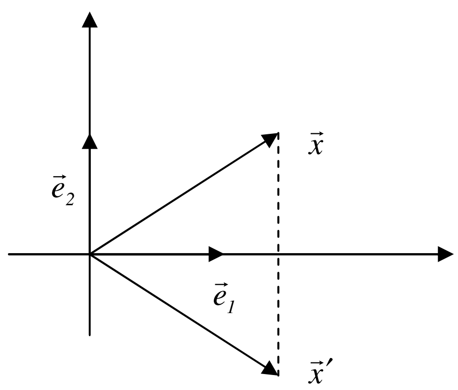

Рисунок 5.1

Ця матриця симетрична і ортогональна, і в деякому ортонормованому базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ зводиться до діагонального виду. Власні значення знаходяться безпосередньо з рівняння

$$\begin{vmatrix} cos\,\varphi-\lambda & sin\,\varphi \\ sin\,\varphi & -cos\,\varphi-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-1=0,$$

тобто $\lambda=\pm1$, і матриця перетворення A зводиться до виду $A=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Довільний вектор $\vec{x}$, що дорівнює в новому базисі $x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2$, перетворюється в $\vec{x}'=x_1\vec{e}_1-x_2\vec{e}_2$. Це симетрія відносно прямої, що визначається вектором $\vec{e}_1$ – першим базисним вектором нового базису (рис. 5.1).

Отже, ортогональне перетворення площини – це або його поворот навколо початку координат на деякий кут φ (зокрема, тотожне перетворення або центральна симетрія; визначник такого перетворення дорівнює +1), або – осьова симетрія (з визначником, що дорівнює -1).

Звідси випливають дві теореми елементарної геометрії:

Добуток двох осьових симетрій є поворотом навколо точки перетину осей симетрії (оскільки це ортогональне перетворення з визначником, що дорівнює +1).

Добуток повороту і симетрії, вісь якої проходить через центр повороту, є симетрією відносно деякої нової осі, яка проходить через ту ж точку (оскільки це ортогональне перетворення з визначником, що дорівнює -1).

Означення. Лінійний оператор A $n-$вимірного евклідового простору називається симетричним (самоспряженим), якщо для будь-яких векторів $\vec{x}, \vec{y}$ цього простору виконується рівність:

$$(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y}).$$

Тотожній оператор E та нульовий оператор Θ є симетричними операторами.

Більш загальним прикладом симетричного оператора є оператор, при якому будь-який вектор помножується на фіксоване число α,

$$A\vec{x} = \alpha\vec{x}.$$

Дійсно, $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \alpha\vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y})$.

Теорема 5.20 Симетричний оператор евклідового простору в будь-якому ортонормованому базисі задається симетричною матрицею. Навпаки, якщо лінійний оператор евклідового простору хоч би в одному ортонормованому базисі задається симетричною матрицею, то цей оператор симетричний.

Властивості симетричних операторів:

1. Сума симетричних операторів є симетричний оператор.
2. Добуток симетричного оператора на число є симетричний оператор.
3. Оператор, обернений до невиродженого симетричного оператора, є симетричним.
4. Для того, щоб добуток симетричних операторів A і B був симетричним, необхідно і достатньо, щоб ці оператори були переставними, тобто щоб виконувалась рівність $A \cdot B = B \cdot A$.

Теорема 5.21 Всі характеристичні корені симетричного оператора дійсні.

Теорема 5.22 Власні вектори симетричного оператора A, яким відповідають різні власні значення оператора, ортогональні.

Теорема 5.23 Нехай A – симетричний оператор в E_n, $\vec{e}$ – його власний вектор. Сукупність P_1 векторів $\vec{x}$, ортогональних до вектора $\vec{e}$, є $(n-1)-$мірний підпростір E_{n-1}, інваріантний відносно оператора A.

Теорема 5.24 Для симетричного оператора A існує ортогональний базис, в якому матриця оператора A діагональна і дійсна.

Теорема 5.25 Для будь-якої симетричної матриці A можна знайти таку ортогональну матрицю Q, яка зводить матрицю A до діагонального виду, тобто матриця $Q^{-1} \cdot A \cdot Q$, одержана трансформуванням матриці A матрицею Q, буде діагональною.

Оскільки для ортогональної матриці Q її обернена матриця дорівнює транспонованій $Q^{-1} = Q^t$, то рівність $B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$ можна записати так $B = Q^t \cdot A \cdot Q$.

Контрольні питання для самоперевірки

1. Що називається оператором?
2. Який оператор називається лінійним?
3. Доведіть властивості лінійного оператора.
4. Як визначається лінійний оператор A в L_n?
5. Які вектори простору L_n можуть бути образами векторів базису $<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$ при дії лінійних операторів в цьому просторі?
6. Що собою являє матриця лінійного оператора?
7. Доведіть, що проектування трьохвимірного простору на координатну площину векторів $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ паралельно осі координат вектора $\vec{e}_3$ є лінійним оператором і знайдіть його матрицю в базисі $<\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3>$.
8. Нехай A – оператор, який кожному многочлену $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами ставить у відповідність його похідну $f'(x)$, тобто $Af(x)=f'(x)$. Доведіть, що оператор A лінійний. Знайдіть його матрицю в базисі:

   а) $1,x,x^2,...,x^n$;

   б) $1,(x-c),\dfrac{(x-c)^2}{2!},...,\dfrac{(x-c)^n}{n!}$, де c – дійсне число.
9. Покажіть, що множення квадратних матриць другого порядку: а) зліва, б) справа на дану матрицю $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ є лінійними операторами простору всіх матриць другого порядку, і знайти матриці цих операторів в базисі $<\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}>$.
10. Доведіть, що існує єдиний лінійний оператор трьохвимірного простору, який переводить вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ відповідно у $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$, і знайдіть матрицю цього оператора в тому ж базисі, в якому задані координати всіх векторів: а) $\vec{a}_1=(2,\ 3,\ 5),\vec{b}_1=(1,\ 1,\ 1)$, б) $\vec{a}_2=(0,\ 1,\ 2),\vec{b}_2=(1,\ 1,\ -1)$, в) $\vec{a}_3=(1,\ 0,\ 0),\vec{b}_1=(2,\ 1,\ 2)$.
11. Доведіть, що перетворення трьохвимірного простору $\varphi(\vec{x})=(\vec{x},\vec{a})\vec{a}$, де $\vec{a}(1,2,3)$ є лінійним перетворенням, і знайдіть його матриці в ортонормованому базисі $<\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3>$, в якому задані координати всіх векторів, і в базисі $\vec{b}_1=(1,\ 0,\ 1),\vec{b}_2=(2,\ 0,\ -1),\vec{b}_3=(1,\ 1,\ 0)$.
12. За яким правилом перетворюються координати вектора $\vec{x}$ лінійного простору в результаті застосування до цього вектора лінійного оператора A?
13. Як змінюється матриця оператора A при переході від одного базису до іншого?
14. Як зміниться матриця лінійного оператора, якщо в базисі $<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$ поміняти місцями два вектори $\vec{e}_i,\vec{e}_j$?

15. Лінійний оператор φ в базисі $<\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4>$ має матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть матрицю цього оператора в базисі

а) $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4$; б) $\vec{e}_1,\ \vec{e}_1+\vec{e}_2,\ \vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3+\vec{e}_4$.

16. Доведіть, що матриці одного і того ж лінійного оператора в двох базисах тоді і тільки тоді співпадають, коли матриця переходу від одного з цих базисів до іншого переставна з матрицею цього лінійного оператора в одному з даних базисів.
17. Які оператори називаються рівними?
18. Як вводяться лінійні операції над операторами?
19. Чому дорівнює матриця: а) суми операторів $A+B$; б) добутку оператору A на число λ; в) добутку лінійного оператора A на оператор B?
20. Які властивості має операція множення операторів?
21. Покажіть, що лінійні оператори $n-$вимірного простору відносно додавання і множення на число самі утворюють векторний простір.
22. Яка розмірність лінійного простору всіх лінійних операторів, що діють в лінійному просторі L_n над числовим полем P?
23. Оператор A в базисі $<\vec{a}_1=(-3,7),\vec{a}_2=(1,-2)>$ має матрицю $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а оператор B в базисі $<\vec{b}_1=(6,-7),\vec{b}_2=(-5,6)>$ має матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $A\cdot B$ в тому базисі, в якому задано координати всіх векторів.
24. Дайте означення лінійної алгебри.
25. Які лінійні алгебри називаються ізоморфними?
26. Доведіть теорему про ізоморфізм алгебри L_n^* лінійних операторів векторного простору L_n^* над полем P алгебрі M_n матриць $n-$ого порядку над полем P.
27. Доведіть, що множина M_n всіх матриць $n-$ого порядку над полем P є лінійна алгебра над полем P.
28. Дайте означення образу лінійного оператора.
29. Що називається рангом лінійного оператора?
30. Доведіть, що лінійного оператора є підпростором векторного простору, в якому діє цей оператор.
31. Дайте означення ядра лінійного оператора і доведіть, що ядро є підпростором.
32. Доведіть теорему про суму рангу і дефекту лінійного оператора.

33. Побудуйте ядро $KerA$, область значень $Im A$ та знайдіть ранг $r = dim(Im A)$ і дефект $d = dim(Ker A)$ лінійного оператора A векторного простору L_n, заданого в деякому базисі $< \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ цього простору своєю матрицею A, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

34. З'ясуйте, чи є оператор A невиродженим, якщо є, то знайдіть матрицю X оберненого оператора A^{-1} в тому самому базисі, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

35. Доведіть що добуток $A \cdot B$ двох невироджених лінійних операторів A і B простору L_n є також невиродженим лінійним оператором цього простору.
36. Доведіть, що оператор A невироджений тоді і тільки тоді, коли його дефект дорівнює нулю, і, отже, ранг співпадає з розмірністю простору.
37. Що називають простим спектром лінійного оператора A простору L_n над полем P?
38. В якому базисі $n-$вимірного простору L_n над полем P лінійний оператор A задається діагональною матрицею?
39. Сформулюйте достатню умову зведення матриці до діагонального виду.
40. При якій умові існує базис простору L_n, в якому лінійний оператор задається діагональною матрицею?
41. Які з наступних матриць лінійних операторів векторного простору L_3 над полем дійсних чисел R можна звести до діагонального виду в результаті переходу до нового базису? Знайдіть цей базис і відповідну йому діагональну матрицю при позитивній відповіді, якщо:

а) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, б) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

в) $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, г) $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

42. Нехай лінійний оператор A дійсного векторного простору L_n має тільки одне власне значення λ кратності n. Визначте необхідні і достатні умови, при яких матриця A цього лінійного оператора зводиться до діагонального виду.

43. Доведіть, що коли лінійний оператор A дійсного векторного простору L_n має n різних власних значень, то довільний лінійний оператор B, який переставний з A, має базис з власних векторів, причому довільний власний вектор оператора A буде одночасно і власним вектором оператора B.
44. Дайте означення ортогонального оператору.
45. Які властивості має ортогональний оператор?
46. Які властивості матриці ортогонального оператору в ортонормованому базисі?
47. Чому дорівнює визначник ортогональної матриці?
48. Доведіть, що якщо лінійний оператор, що діє в евклідовому просторі, зберігає довжини всіх елементів цього простору, то даний лінійний оператор – ортогональний.
49. Доведіть, що добуток двох ортогональних матриць є ортогональною матрицею.
50. Доведіть, що оператор, обернений до ортогонального, також є ортогональним.
51. Доведіть, якщо число λ з поля R є власним значенням ортогонального оператору, то або $\lambda = 1$, або $\lambda = -1$.
52. Доведіть, що матриця переходу від ортонормованого базису евклідового простору до іншого його ортонормованого базису є ортогональною.
53. Доведіть, що в будь-якому ортонормованому базисі матриця ортогонального оператора є ортогональною.
54. Дайте геометричну інтерпретацію оператору, що діє в евклідовому просторі V_2, який має в деякому ортонормованому базисі матрицю
$$A = \begin{pmatrix} cos\,\varphi & sin\,\varphi \\ sin\,\varphi & -cos\,\varphi \end{pmatrix}.$$
55. Доведіть, якщо підпростір R_1 інваріантний відносно ортогонального оператору A, то його ортогональне доповнення $R_1^{\perp}$ також інваріантне відносно A.
56. Який лінійний оператор називається симетричним?
57. Який вид має матриця симетричного оператора в ортонормованому базисі?
58. Доведіть, що якщо лінійний оператор A, що діє в евклідовому просторі, симетричний, то він є симетричним і в будь-якому інваріантному відносно оператора A підпросторі евклідового простору.
59. Чому будь-який симетричний оператор має власні вектори?
60. Скільки власних значень має симетричний оператор в E_n?
61. Яку властивість мають власні вектори симетричного оператора, що відповідають різним власним значенням?
62. Доведіть, що якщо лінійний оператор A в просторі E_n симетричний, то існує ортонормований базис із власних векторів цього оператора. Чи вірне обернене твердження?

63. Доведіть, що якщо A – симетричний оператор, що діє в лінійному просторі V_3, то V_3 можна представити у вигляді прямої суми взаємно ортогональних підпросторів, інваріантних відносно оператора A.
64. Доведіть, що лінійна комбінація симетричних операторів з дійсними коефіцієнтами є симетричним оператором.
65. Доведіть, що добуток $A \cdot B$ двох симетричних операторів A і B тоді і тільки тоді є симетричним оператором, коли $A \cdot B = B \cdot A$.
66. Доведіть, що симетричним є оператор $A \cdot B + B \cdot A$, де A і B – деякі симетричні оператори.
67. Знайдіть ортонормований базис $< \vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}, ..., \vec{e}_n^{\,\prime} >$ з власних векторів і матрицю A' в цьому базисі для лінійного оператора A, заданого в деякому ортонормованому базисі $< \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ евклідового простору E_n матрицею A, якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.