6 ЛІНІЙНІ, БІЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ. КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

Нехай V – лінійний простір над полем K. Відображення $\xi : V \times V \to K$ називається *білінійним функціоналом* над простором V, якщо воно задовольняє наступним умовам: $\forall\ \bar{x}, \bar{x}_i, \bar{y}, \bar{y}_i \in V,\ i = 1{,}2; \quad \forall\ \alpha \in K$:

1) $\xi(\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{y}) = \xi(\bar{x}_1, \bar{y}) + \xi(\bar{x}_2, \bar{y})$;
2) $\xi(\alpha\bar{x}, \bar{y}) = \alpha\xi(\bar{x}, \bar{y})$;
3) $\xi(\bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{y}_2) = \xi(\bar{x}, \bar{y}_1) + \xi(\bar{x}, \bar{y}_2)$;
4) $\xi(\bar{x}, \alpha\bar{y}) = \alpha\xi(\bar{x}, \bar{y})$.

Білінійний функціонал називається *симетричним*, якщо виконується умова $\xi(\bar{x}, \bar{y}) = \xi(\bar{y}, \bar{x})$.

Білінійний функціонал називається *кососиметричним*, якщо виконується умова $\xi(\bar{x}, \bar{y}) = -\xi(\bar{y}, \bar{x})$.

Відображення $b : V \to K$ називається *квадратичною формою*, якщо існує такий симетричний білінійний функціонал $\xi(\bar{x}, \bar{y})$, що $b(\bar{x}) = \xi(\bar{x}, \bar{x})$. Білінійний функціонал $\xi(\bar{x}, \bar{y})$ називається *полярним* до квадратичної форми $b(\bar{x})$.

Іншими словами, *квадратичною формою* змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають функцію вигляду

$$b(\bar{x}) = b(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + \\ + a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2, \qquad (6.1)$$

де $a_{ij} = a_{ji}$ – дійсні або комплексні числа.

Матрицею Грама квадратичної форми в даному базисі називається матриця полярного до неї білінійного функціонала:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Канонічним видом кососиметричної форми є наступний вигляд:

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + \ldots.$$

Канонічним видом квадратичної форми називається:

$$b(\bar{x}) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \ldots + \lambda_nx_n^2,\ \lambda_i \in R,\ (\lambda_i \in C),\ i = \overline{1,n}.$$

Нормальним видом квадратичної форми називається:

$$b(\bar{x}) = \beta_1x_1^2 + \beta_2x_2^2 + \ldots + \beta_nx_n^2, \text{ де } \beta_i \in \{0, 1, -1\}.$$

Квадратична форма називається:

– *додатно визначеною*, якщо $\forall\,\bar{x} \quad b(\bar{x}) \geq 0 \wedge b(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$;
– *від'ємно визначеною*, якщо $\forall\,\bar{x} \quad b(\bar{x}) \leq 0 \wedge b(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$.

Критерій Сильвестра. Квадратична форма $b(\bar{x})$ додатно визначена тоді і тільки тоді, коли всі головні мінори її матриці додатні.

Метод Якобі. Канонічний вид квадратичної форми можна знайти за наступною формулою:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2,$$

де Δ_i $(i = \overline{1,3})$ – головні мінори матриці A квадратичної форми, $\Delta_0 = 1$.

Метод Лагранжа. Розглянемо квадратичну форму виду (6.1).

1. Якщо $a_{11} \neq 0$, то покладемо $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$, $y_i = x_i$, $i = \overline{2,n}$ і перетворимо квадратичну форму до вигляду $b = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + c(y_2, y_2, \dots, y_n)$.
2. Якщо $a_{11} = 0$, але $\exists\ i:\ a_{ii} \neq 0$, то, змінюючи нумерацію змінних, приходимо до попереднього випадку.
3. Якщо $\forall\ i = \overline{1,n}$ $a_{ii} = 0$, але $a_{12} \neq 0$, то покладемо $x_1 = z_1 - z_2$, $x_2 = z_1 + z_2$, $x_i = z_i$, $i = \overline{3,n}$, та приходимо до першого випадку.

Таким чином, в результаті скінченого числа перетворень квадратичну форму можна привести до канонічного виду.

Метод ортогональних перетворень зведення квадратичної форми до канонічного виду полягає в наступному:

1. Записати матрицю A даної квадратичної форми.
2. Визначити з характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = 0$ власні значення цієї матриці (всі вони дійсні, оскільки матриця A симетрична).
3. Для кожного власного значення λ_k визначити відповідні йому лінійно незалежні власні вектори.
4. До отриманих власних векторів, що відповідають власному значенню λ_k, застосувати процес ортогоналізації.
5. Після того, як будуть знайдені всі n власних векторів матриці A, що утворюють ортогональний базис $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$ в n – вимірному дійсному евклідовому просторі матриць-стовпців, розташувати координати векторів $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$ у відповідні стовпці шуканої матриці Q.
6. Записати канонічний вид квадратичної форми
$$b = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$
де λ_k – власні значення матриці A.
7. Записати лінійне перетворення змінних
$$\bar{x} = Q\bar{y} \text{ або } (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)^t = Q(y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n)^t,$$
яке приводить задану квадратичну форму до канонічного виду.

Розглянемо ***процес ортогоналізації Грама-Шмідта*** довільного базису $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ n – вимірного евклідового простору.

Покладемо

$$\bar{g}_1 = \bar{f}_1.$$

З векторів $\bar{g}_1$ і $\bar{f}_2$ утворюємо вектор $\bar{g}_2 = \bar{f}_2 - \lambda_{21}\bar{g}_1$. Число λ_{21} візьмемо таким, щоб $(\bar{g}_2, \bar{g}_1) = 0$. Маємо:

$$0 = (\bar{g}_2, \bar{g}_1) = (\bar{f}_2 - \lambda_{21}\bar{g}_1, \bar{g}_1) = (\bar{f}_2, \bar{g}_1) - \lambda_{21}(\bar{g}_1, \bar{g}_1).$$

Отже $\lambda_{21} = \dfrac{(\bar{f}_2, \bar{g}_1)}{(\bar{g}_1, \bar{g}_1)}$. Тоді

$$\bar{g}_2 = \bar{f}_2 - \frac{(\bar{f}_2, \bar{g}_1)}{(\bar{g}_1, \bar{g}_1)}\bar{g}_1.$$

Побудований вектор $\bar{g}_2$ ортогональний вектору $\bar{g}_1$. Побудуємо наступний вектор $\bar{g}_3 = \bar{f}_3 - \lambda_{31}\bar{g}_1 - \lambda_{32}\bar{g}_2$. Підберемо числа λ_{31} і λ_{32} так, щоб $(\bar{g}_3, \bar{g}_1) = 0$ і $(\bar{g}_3, \bar{g}_2) = 0$. Для визначення цих чисел маємо рівняння:

$$0 = (\bar{g}_3, \bar{g}_1) = (\bar{f}_3, \bar{g}_1) - \lambda_{31}(\bar{g}_1, \bar{g}_1),$$
$$0 = (\bar{g}_3, \bar{g}_2) = (\bar{f}_3, \bar{g}_2) - \lambda_{32}(\bar{g}_2, \bar{g}_2).$$

Отже $\lambda_{31} = \dfrac{(\bar{f}_3, \bar{g}_1)}{(\bar{g}_1, \bar{g}_1)}$, $\lambda_{32} = \dfrac{(\bar{f}_3, \bar{g}_2)}{(\bar{g}_2, \bar{g}_2)}$. Тоді

$$\bar{g}_3 = \bar{f}_3 - \frac{(\bar{f}_3, \bar{g}_1)}{(\bar{g}_1, \bar{g}_1)}\bar{g}_1 - \frac{(\bar{f}_3, \bar{g}_2)}{(\bar{g}_2, \bar{g}_2)}\bar{g}_2.$$

Вектор $\bar{g}_3$, очевидно, ортогональний векторам $\bar{g}_1$ і $\bar{g}_2$.

Таким чином,

$$\bar{g}_i = \bar{f}_i - \sum_{k=1}^{i-1}\lambda_{ik}\bar{g}_k, \text{ де } \lambda_{ik} = \frac{(\bar{f}_i, \bar{g}_k)}{(\bar{g}_k, \bar{g}_k)},\ i = \overline{2,n}.$$

Продовжуючи за вказаною схемою процес створення попарно ортогональних векторів $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3, \ldots$, побудуємо за скінчене число кроків ортогональний базис n – вимірного евклідового простору. У разі потреби його можна нормувати.

Алгоритм зведення пари квадратичних форм до канонічного виду одним лінійним перетворенням

1. З'ясувати за критерієм Сільвестра, яка з наведених квадратичних форм додатно визначена.
2. До додатно визначеної квадратичної форми застосувати алгоритм Лагранжа або ортогональних перетворень зведення квадратичної форми до канонічного виду, записати відповідне перетворення.
3. Привести додатно визначену квадратичну форму до нормального виду, записати сумарне перетворення додатно визначеної квадратичної форми до нормального виду.
4. Застосувати отримане лінійне перетворення до другої квадратичної форми.
5. Звести останню форму до канонічного виду методом ортогональних перетворень, записати сумарне перетворення.