Приклади розв'язування задач

1. Обчисліть $\dfrac{1}{(a+bi)^2}+\dfrac{1}{(a-bi)^2}$.

Розв'язання:

Зведемо дроби до спільногой знаменника та розкриємо дужки у чисельнику:

$$\frac{1}{(a+bi)^2}+\frac{1}{(a-bi)^2}=\frac{(a-bi)^2+(a+bi)^2}{(a+bi)^2\cdot(a-bi)^2}=$$

$$=\frac{a^2-2abi-b^2+a^2+2abi-b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{2a^2-2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}.$$

2. Доведіть тотожність $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

Доведення:

Нехай $z_1=a_1+b_1i,\ z_2=a_2+b_2i$. Тоді легко отримати доведення:

$$\overline{z_1}+\overline{z_2}=a_1-b_1i+a_2-b_2i=a_1+a_2-i(b_1+b_2)=\overline{z_1+z_2}.$$

3. Знайдіть дійсні числа x та y з рівняння $(2x+y)+(x+3y)i=3-i$.

Розв'язання:

Скористаємося формулою (1.1) і отримаємо систему $\begin{cases}2x+y=3,\\ x+3y=-1.\end{cases}$

Розв'яжемо її методом підстановки:

$$\begin{cases}2(-1-3y)+y=3,\\ x=-1-3y;\end{cases}\begin{cases}-2-5y=3,\\ x=-1-3y;\end{cases}\begin{cases}-5y=5,\\ x=-1-3y;\end{cases}\begin{cases}y=-1,\\ x=2.\end{cases}$$

Отже, $x=2, y=-1$.

4. Запишіть комплексні числа в тригонометричній і показниковій формах а) $z=-1-i$, б) $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Розв'язання:

а) Знайдемо модуль комплексного числа за формулою (1.5): $|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

Далі потрібно знайти кут. Оскільки наше комплексне число знаходиться в третій чверті, то ми будемо віднімати π, скориставшись рисунком 1.4 $\varphi=arctg\dfrac{-1}{-1}-\pi=\dfrac{\pi}{4}-\pi=-\dfrac{3\pi}{4}$. За формулою (1.3) отримаємо тригонометричну форму, тобто: $z=\sqrt{2}\left(cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\,sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Залишилося записати z в показниковій формі. За формулою (1.4): $z=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

б) Визначимо модуль та аргумент даного комплексного числа: $|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=\sqrt{1}=1$; $z\in IV$, $\varphi=arctg\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=-arctg\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}$. Тоді $z=\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\,sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ та $z=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ – шукані тригонометрична та показникова форми числа.

5. Обчисліть $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{-1-i}\right)^{20}$.

Розв'язання:

Розглянемо окремо чисельник і знаменник дробу $z=\frac{z_1}{z_2}$:

1. $z_1=1+\sqrt{3}i$;
1. $|z_1|=\sqrt{1+3}=2$;
3. $z_1\in I$, $\varphi=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$;
4. $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

1. $z_2=1-i$;
1. $|z_2|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$;
3. $z_2\in III$, $\varphi=arctg1-\pi=-\frac{3\pi}{4}$;
4. $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Тепер застосуємо формули (1.10) для знаходження модуля та аргумента частки:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\ Arg\,\frac{z_1}{z_2}=arg\,z_1-arg\,z_2=\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}=\frac{13\pi}{12}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow arg\,z=\frac{13\pi}{12}-2\pi=-\frac{11\pi}{12}.$$

Залишилося піднести z до степеня за формулою (1.12):

$$z^{20}=\sqrt{2}^{20}\left(cos\left(-\frac{11\pi}{12}\cdot 20\right)+i\,sin\left(-\frac{11\pi}{12}\cdot 20\right)\right)=$$
$$=2^{10}\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\,sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2^9\left(1-\sqrt{3}i\right).$$

6. Обчисліть а) $\left(1-\sqrt{2}i\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}i\right)$, б) $-\frac{4i}{2-i}$.

Розв'язання:

а) Перемножимо дужки:

$$\left(1-\sqrt{2}i\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}i\right)=2-2\sqrt{2}i+\sqrt{3}i+\sqrt{6}=\left(2+\sqrt{6}\right)+\left(-2\sqrt{2}i+\sqrt{3}i\right).$$

Винесемо i за дужки, отримаємо дійсну $\left(2+\sqrt{6}\right)$ і уявну $\left(-2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ частини даного добутку.

б) Помножимо чисельник та знаменник дробу на спряжене до знаменника:

$$\frac{-4i}{2-i}=-\frac{4i\cdot(2+i)}{(2-i)(2+i)}=-\frac{8i-4}{4+1}=-\frac{8i-4}{5}=\frac{4}{5}-\frac{8}{5}i.$$

7. Розв’яжіть рівняння $z^2-2iz+3=0$.

Розв’язання:

Знайдемо дискримінант: $D=(-2i)^2-4\cdot1\cdot3=-4-12=-16$. Оскільки дискримінант від’ємний, то корені квадратного рівняння будуть комплексними.

$$\sqrt{D}=\sqrt{-16}=\sqrt{16i^2}=4i,\ z_{1,2}=\frac{2i\pm4i}{2}=\left[\begin{array}{l}z_1=3i;\\ z_2=-i.\end{array}\right.$$

Тест для самоконтролю

1. Скільки форм запису має комплексне число?

А 1 **Б** 2 **В** 3 **Г** 4

2. Що представляє собою число i?

А число, квадратний корінь з якого дорівнює –1

Б число, квадрат якого дорівнює –1

В число, квадратний корінь з якого дорівнює 1

Г число, квадрат якого дорівнює –1

3. Як на координатній площині зображується комплексне число?

А у вигляді відрізка

Б точкою або радіус-вектором

В плоскою геометричною фігурою

Г у вигляді круга

4. Комплексне число z задане у вигляді $z=6+9i$. Число 9 називають

А дійсною частиною числа z

Б уявною частиною числа z

В уявною одиницею

Г аргументом числа z

5. Кажуть, що число $z=a+bi$ записане в:

А алгебраїчній формі

Б тригонометричній формі

В показниковій формі

Г геометричній формі

6. Кажуть, що число $z=re^{i\varphi}$ записане в:

А алгебраїчній формі

Б тригонометричній формі

В показниковій формі

Г геометричній формі

7. Комплексне число z задане у вигляді $z=10-12i$. Число i називають

А дійсною частиною числа z

Б уявною частиною числа z

В уявною одиницею

Г аргументом числа z

8. Комплексне число z задане у вигляді $z=1+2i$. Число 1 називають

А дійсною частиною числа z

Б уявною частиною числа z

В уявною одиницею

Г аргументом числа z

9. Комплексно спряженим числу $z=10+12i$ є число:

А $\bar{z}=12+10i$ **Б** $\bar{z}=10-12i$ **В** $z=12-10i$ **Г** $z=12-12i$

10. Модулем комплексного числа $z=3+4i$ є число:

А $r=\sqrt{3^2+4^2}$ **Б** $r=\sqrt{3^2+(4i)^2}$ **В** $r=\sqrt{(3+4)^2}$ **Г** $r=\sqrt{3+4}$

11. Аргумент добутку двох комплексних чисел $z_1=5(cos\,\pi+i\,sin\,\pi)$ та

$z_1 = 7\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right)$ дорівнює:

А 35 **Б** $\frac{3\pi^2}{2}$ **В** $\frac{5\pi}{2}$ **Г** $-\frac{\pi}{2}$

12. Аргумент частки двох комплексних чисел $z_1 = 5(cos\,\pi + i\,sin\,\pi)$ та $z_1 = 7\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right)$ дорівнює:

А 35 **Б** $\frac{3\pi^2}{2}$ **В** $\frac{5\pi}{2}$ **Г** $-\frac{\pi}{2}$

13. Модуль добутку двох комплексних чисел $z_1 = 5(cos\,\pi + i\,sin\,\pi)$ та $z_1 = 7\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right)$ дорівнює:

А 35 **Б** $\frac{3\pi^2}{2}$ **В** $\frac{5\pi}{2}$ **Г** $-\frac{\pi}{2}$

14. Дійсною частиною суми двох чисел $z_1 = 5 + 10i$ та $z_2 = 7 + 4i$ є число

А 15 **Б** 14 **В** 13 **Г** 12

15. Уявною частиною різниці двох чисел $z_1 = 5 + 10i$ та $z_2 = 7 + 4i$ є число

А 6 **Б** 4 **В** 3 **Г** –2

16. Уявною частиною добутку двох чисел $z_1 = 5 + 10i$ та $z_2 = 7 + 4i$ є число

А 75 **Б** –5 **В** 90 **Г** –90

17. Яка властивість не притаманна комплексному спряженню?

А $\overline{\overline{z}} = z$ **Б** $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ **В** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ **Г** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$

18. Формула Муавра піднесення комплексного числа $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ до натурального степеня n:

А $z^n = r(cosn\varphi + isinn\varphi)$ **Б** $z^n = nr(cosn\varphi + isinn\varphi)$ **В** $z^n = r^n\left(cos\varphi^n + isin\varphi^n\right)$ **Г** $z^n = r^n(cosn\varphi + isinn\varphi)$

19. Множиною точок, що задовольняють рівнянню $|z| - 8 = 0$ є

А коло з центром у початку координат та радіусом 8

Б круг з центром у початку координат та радіусом 8

В точки $(8;\,0)$ та $(0;\,8)$

Г зовнішні точки круга з центром у $O(0;\,0)$ та радіусом 8

20. Множиною точок, що задовольняють нерівності $|z| \geq 5$ є

А коло з центром у початку координат та радіусом 5

Б круг з центром у початку координат та радіусом 5

В зовнішні точки круга з центром у $O(0;\,0)$ та радіусом 5

Г круг та зовнішні точки круга з центром у $O(0;\,0)$ та радіусом 5

21. Множиною точок, що задовольняють нерівності $|z| < 5$ є

А коло з центром у початку координат

Б круг з центром у початку координат та радіусом 5

Г круг та зовнішні точки круга з центром у $O(0;\,0)$ та радіусом 5

та радіусом 5

В зовнішні точки круга з центром у $O(0;\,0)$ та радіусом 5

22.Значенням виразу $\dfrac{i}{-1+i}$ буде число:

А $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ **Б** $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ **В** $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ **Г** $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

23.Обчисліть $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{30}$

А 1 **Б** –1 **В** i **Г** $-i$

24.Обчисліть $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$

А $2^9\left(1+i\sqrt{3}\right)$ **Б** 2^9 **В** $2^9\left(1-i\sqrt{3}\right)$ **Г** $2^9\left(\sqrt{3}-i\right)$

25.Знайдіть всі значення коренів $\sqrt{2i}$

А $1+i, 1-i$ **Б** $1+i, -1-i$ **В** $-1+i, 1-i$ **Г** $-1-i, 1-i$

Відповіді: 1. В. 1. Г. 3. Б. 4. Б. 5. А. 6. В. 7. В. 8. А. 9. Б. 10. А. 11. В. 11. Г. 13. А. 14. Г. 15. А. 16. В. 17. Г. 18. Г. 19. А. 20. Г. 21. В. 21. Г. 23. В. 24. В. 25. Б.