Приклади розв'язування задач

1. Побудуйте многочлен найменшого степеня з дійсними коефіцієнтами, якщо він має прості корені 2 і $3+i$ та двократний 1.

Розв'язання:

Так як многочлен повинен мати дійсні коефіцієнти, то він окрім кореня $3+i$ містить корінь $3-i$, спряжений даному. Отже, розклад шуканого многочлена на множники має вигляд $(x-2)(x-(3+i))(x-(3-i))(x-1)^2$. Перетворимо добуток на многочлен:

$$(x-2)(x-(3+i))(x-(3-i))(x-1)^2=(x-2)(x-3-i)(x-3+i)(x-1)^2=$$
$$=(x-2)\left((x-3)^2-i^2\right)(x-1)^2=(x-2)\left(x^2-6x+9+1\right)\left(x^2-2x+1\right)=$$
$$=\left(x^3-8x^2+22x-20\right)\left(x^2-2x+1\right)=x^5-10x^4+48x^3-72x^2-18x-20.$$

Відповідь: $x^5-10x^4+48x^3-72x^2-18x-20$.

2. Не застосовуючи алгоритму ділення з остачею, знайдіть остачу від ділення многочлена $f(x)=x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x+1$ на: а) x^2-1;

б) x^2+1;

в) x^4-1.

Розв'язання:

а) Степінь остачі не перевищує степеня дільника x^2-1, тому будемо шукати остачу у вигляді многочлена першого степеня $ax+b$. Отже, $f(x)=g(x)\cdot\left(x^2-1\right)+(ax+b)$. Коренями дільника є $1, -1$. Знайдемо значення многочлена $f(x)$ у цих точках:

$$\begin{cases} f(1)=g(1)\cdot\left(1^2-1\right)+(a\cdot 1+b), \\ f(-1)=g(-1)\cdot\left((-1)^2-1\right)+(a\cdot(-1)+b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=7, \\ -a+b=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6, \\ b=1. \end{cases}$$

б) Аналогічно, коренями дільника x^2+1 є $i, -i$. Відомо, що: $i^3=i^2\cdot i=-i,\ i^9=\left(i^3\right)^3=(-i)^3=i,\ i^{27}=\left(i^9\right)^3=-i,\ i^{81}=\left(i^{27}\right)^3=i,\ i^{243}=\left(i^{81}\right)^3=-i$, $(-i)^3=i$, $(-i)^9=-i$, $(-i)^{27}=i$ $\ (-i)^{81}=-i,\ (-i)^{243}=i$. Тоді $f(i)=1,\ f(-i)=1$. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} ai+b=1, \\ -ai+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ b=1. \end{cases}$$

в) Так як степінь дільника дорівнює 4, то будемо шукати остачу у вигляді ax^3+bx^2+cx+d. Коренями дільника є $1, -1, i, -i$. Знаходячи значення многочлена $f(x)$ у цих точках, отримаємо систему рівнянь для відшукання невідомих параметрів a, b, c, d:

$$\begin{cases} a+b+c+d=7, \\ -a+b-c+d=-5, \\ -ai-b+ci+d=1, \\ ai-b-ci+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3, \\ b=0, \\ c=3, \\ d=1. \end{cases}$$

Відповідь: а) $6x+1$; б) 1; в) $3x^3+3x+1$.

3. Знайдіть всі цілі числа a і b, при яких многочлен $f(x)=x^4+ax^3+bx^2-8x+4$ є квадратом деякого многочленна $g(x)$ з кільця $Z(x)$, та запишіть многочлен $g(x)$.

Розв'язання:

Многочлен $f(x)$ має степінь 4. Тому степінь шуканого многочлена $g(x)$ (якщо він існує!) дорівнює 2. Нехай $g(x)=mx^2+nx+p, m\neq 0$. За умовою $f(x)=(g(x))^2$. Запишемо многочлен $(g(x))^2$ у канонічній формі:

$$(g(x))^2=\left(mx^2+nx+p\right)^2=m^2x^4+2mnx^3+\left(2mp+n^2\right)x^2+2np+p^2.$$

З умови рівності многочленів отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} m^2=1, \\ 2mn=a, \\ 2mp+n^2=b, \\ 2np=-8, \\ p^2=4. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо, що $m\in\{1,-1\}$, а з останнього $p\in\{2,-2\}$. Це означає, що дана система рівнянь рівносильна сукупності чотирьох систем:

$$\begin{cases} m=1, \\ p=2, \\ n=-2, \\ a=-4, \\ b=8, \end{cases} \qquad \begin{cases} m=1, \\ p=-2, \\ n=2, \\ a=4, \\ b=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m=-1, \\ p=2, \\ n=-2, \\ a=4, \\ b=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m=-1, \\ p=-2, \\ n=2, \\ a=-4, \\ b=8. \end{cases}$$

Таким чином, якщо $a=-4$ і $b=8$, то існують два многочлени $g_1(x)=-x^2+2x-2$ і $g_2(x)=x^2-2x+2$, які задовольняють умові задачі. Якщо $a=4$ і $b=0$, то $g_1(x)=x^2+2x-2$ і $g_2(x)=-x^2-2x+2$. Цим вичерпуються всі можливі випадки шуканого зображення многочлена $f(x)$.

4. Установіть подільність многочлена $f(x)$ на $g(x)$ в кільці $Z[x]$, якщо $f(x)=x^{19}+x^{17}+x^{13}+x^{11}+x^7+x^5-6x^3$, $g(x)=x^2-1$.

Розв'язання:

Запишемо многочлен $f(x)$ у вигляді суми многочленів, виділивши, якщо це можливо, в кожному з них множник – многочлен $g(x)$:

$$f(x)=\left(x^{19}-x^{17}\right)+\left(2x^{17}-2x^{15}\right)+\left(2x^{15}-2x^{13}\right)+\left(3x^{13}-3x^{11}\right)+\left(4x^{11}-4x^9\right)+$$
$$+\left(4x^9-4x^7\right)+\left(5x^7-5x^5\right)+\left(6x^5-6x^3\right)=x^{17}\left(x^2-1\right)+2x^{15}\left(x^2-1\right)+2x^{13}\left(x^2-1\right)+$$
$$+3x^{11}\left(x^2-1\right)+4x^9\left(x^2-1\right)+4x^7\left(x^2-1\right)+5x^5\left(x^2-1\right)+6x^3\left(x^2-1\right).$$

Оскільки кожен з многочленів-доданків ділиться на многочлен $g(x)$ в кільці $Z[x]$, то многочлен $f(x)$ ділиться на $g(x)$ в $Z[x]$.

5. Знайдіть остачу від ділення многочлена $f(x)=(x-2)^{100}+(x-1)^{50}+1$ на многочлен $g(x)=x^2-3x+2$ в кільці $R[x]$.

Розв'язання:

До многочленів $f(x)$, $g(x)$ застосуємо в кільці $R[x]$ теорему про ділення з остачею. Тоді існують многочлени $s(x)$ і $r(x)$ такі, що $f(x)=g(x)\cdot s(x)+r(x)$ і степінь многочлена $r(x)$: $deg(r(x))<2.$

Остання нерівність означає, що $r(x)=ax+b$. Тому

$$(x-2)^{100}+(x-1)^{50}+1=(x^2-3x+2)s(x)+ax+b.$$

Враховуючи те, що $g(1)=g(2)=0$, підставимо $x=1$ і $x=2$ у здобуту рівність. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a+b=2, \\ 2a+b=2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a=0, \\ b=2. \end{cases}$$

Отже, $r(x)=2.$

6. Знайдіть остачу від ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $g(x)=x+1-i$, якщо $f(x)=ix^4+(3-2i)x^3+(2i-4)x^2+(3-3i)x+3i+2$.

Розв'язання:

Ділення виконаємо за схемою Горнера:

	i	$3–2i$	$2i–4$	$3–3i$	$3i+2$
$–(1–i)$	I	$2–3i$	$–3+7i$	$–1–13i$	$16+5i$

Щоб знайти коефіцієнти частки і остачі, доцільно виконувати проміжні обчислення:

$$3-2i-i(1-i)=2-3i,\ 2i-4-(1-i)(2-3i)=-3+7i,$$
$$3-3i-(1-i)(-3+7i)=-1-13i,\ 3i+2-(1-i)(-1-13i)=16+15i.$$

Отже, остача дорівнює $16+15i$.

7. Доведіть, що многочлен $f(x)=(x+a+b)^{2013}-x^{2013}-a^{2013}-b^{2013}$ ділиться на двочлени $g_1(x)=x+a$ і $g_2(x)=x+b$ в кільці $C[x]$.

Розв'язання:

Знайдемо значення многочлена $f(x)$ при $x=-a$ і $x=-b$:

$$f(-a)=b^{2013}+a^{2013}-a^{2013}-b^{2013}=0, f(-b)=a^{2013}+b^{2013}-a^{2013}-b^{2013}=0.$$

Отже, за теоремою Безу многочлен ділиться на двочлени $g_1(x)$ і $g_2(x)$.

8. Чи є звідним у полі Q многочлен $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-5x+2$?

Розв'язання:

Нехай многочлен $f(x)$ є звідним у полі Q, тобто його можна представити у вигляді добутку не менше як двох многочленів ненульового степеня з кільця $Q[x]$. Щоб розкласти многочлен $f(x)$ на множники, застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. При цьому досить розглянути два випадки можливого розкладу: а) обидва множники мають степінь 2; б) один множник має степінь 1,а другий 3.

Нехай

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)(dx^2 + mx + n) \tag{3.8}$$

Тоді з рівності

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2 = adx^4 + (am + bd)x^4 + (an + bm + cd)x^2 + (bn + cm)x + cn$$

отримаємо:

$$\begin{cases} ad = 1, \\ am + bd = 2, \\ an + bm + cd = -3, \\ bn + cm = -5, \\ cn = 2. \end{cases} \tag{3.9}$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь у цілих числах. З першого знаходимо $a = d = 1$ або $a = d = -1$, з останнього $c = 1, n = 2; c = 2, n = 1; c = -2, n = -1; c = -1, n = -2.$ Розглянемо кожен з восьми можливих варіантів:

$$\begin{cases} a = d = 1, \\ m + b = 2, \\ bm = -6, \\ 2b + m = -5; \end{cases} \begin{cases} a = d = 1, \\ m + b = 2, \\ bm = -6, \\ b + 2m = -5; \end{cases} \begin{cases} a = d = 1, \\ m + b = 2, \\ bm = 0, \\ -2b - m = -5; \end{cases} \begin{cases} a = d = 1, \\ m + b = 2, \\ bm = 0, \\ -2b - m = -5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = d = -1, \\ m + b = -2, \\ bm = 0, \\ 2b + m = -5; \end{cases} \begin{cases} a = d = -1, \\ m + b = -2, \\ bm = 0, \\ b + 2m = -5; \end{cases} \begin{cases} a = d = -1, \\ m + b = -2, \\ bm = -6, \\ -b - 2m = -m; \end{cases} \begin{cases} a = d = -1, \\ m + b = -2, \\ bm = -6, \\ -2b - m = -5. \end{cases}$$

Легко переконатись, що одна з цих систем розв'язків не має. Це означає, що система рівнянь (3.9) несумісна і многочлен $f(x)$ не розкладається в добуток двох многочленів другого степеня з цілими коефіцієнтами.

Припустимо, що розклад (3.8) можливий при дробових числах $a, b, c, d, m, n.$ Зведемо до найменшого спільного знаменника коефіцієнти многочленів $g_1(x) = ax^2 + bx + c$ і $g_2(x) = dx^2 + mx + n$ та винесемо за дужки ці знаменники і найбільші спільні дільники чисельників обох многочленів. Дістанемо розклад:

$$f(x) = \frac{r}{s}(a_1x^2 + b_1x + c_1)(d_1x^2 + m_1x + n_1),$$

де $(r, s) = (a_1, b_1, c_1) = (d_1, m_1, n_1) = 1.$ Оскільки коефіцієнтів многочлена $f(x)$ є цілими числами, то всі коефіцієнти многочлена

$$g(x)=(a_1x^2+b_1x+c_1)(d_1x^2+m_1x+n_1)$$
мають ділитися на число s, а тому й на кожен його простий дільник p. Разом з тим, серед кожної трійки чисел a_1,b_1,c_1 та d_1,m_1,n_1 знайдуться числа, які не діляться на p. Тому серед коефіцієнтів $a_1d_1, a_1m_1+b_1d_1$, $a_1n_1+b_1m_1+c_1d_1, b_1n_1+c_1m_1$ і c_1n_1 многочлена $g(x)$ знайдеться такий, що не ділиться на p. Тому $s=1$ і ми дістанемо розклад (3.8) з цілими коефіцієнтами, що неможливо.

Нехай
$$f(x)=(ax+b)(cx^3+dx^2+mx+n). \tag{3.10}$$
Тоді з рівності
$$x^4+2x^3-3x^2-5x+2=acx^4+(ad+bc)x^3+(am+bd)x^2+(an+bm)x+bn$$
отримаємо:
$$\begin{cases} ac=1, \\ ad+bc=2, \\ am+bd=-3, \\ an+bm=-5, \\ bn=2. \end{cases} \tag{3.11}$$

Одним з розв'язків системи (3.11) є $a=c=n=1, b=2, d=0$ і $m=-3$. Отже, $f(x)=(x+2)(x^3-3x+1)$, тобто многочлен $f(x)$ є звідним у полі Q.

9. Знайдіть найбільший спільний дільник $d(x)$ многочленів $f(x)$ і $g(x)$ та підберіть такі многочлени $m(x)$ і $n(x)$, що $f(x)m(x)+g(x)n(x)=d(x)$, якщо $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-5x+2$, $g(x)=2x^3+x^2-x-1$.

Розв'язання:

До многочленів $f(x)$ і $g(x)$ застосовуємо алгоритм Евкліда:

$$
\begin{array}{l|l}
-\;2x^4+3x^3-3x^2-5x+2 & \underline{2x^3+x^2-x-1} \\
\quad\underline{2x^4+x^3-x^2-x} & x+1 \\
\qquad -\;2x^3-2x^2-4x+2 & \\
\qquad\quad \underline{2x^3+x^2-x-1} & \\
\qquad\qquad -3x^2-3x+3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\;2x^3+x^2-x-1 & \underline{-3x^2-3x+3} \\
\quad\underline{2x^3+2x^2-2x} & -\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3} \\
\qquad -\;-x^2+x-1 & \\
\qquad\quad \underline{-x^2-x+1} & \\
\qquad\qquad 2x-2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\;-3x^2-3x+3 & \underline{2x-2} \\
\quad\underline{-3x^2+3x} & -\dfrac{3}{2}x-3 \\
\qquad -\;-6x+3 & \\
\qquad\quad \underline{-6x+6} & \\
\qquad\qquad -3 &
\end{array}
$$

Отже, в результаті ділення одержуємо:

$$f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x), q_1(x)=x+1, r_1(x)=-3x^2-3x+3,$$

$$g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x), q_2(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}, r_2(x)=2x-2,$$

$$g_2(x)=r_2(x)q_3(x)+r_3(x), q_3(x)=-\frac{3}{2}x-3, r_3(x)=-3.$$

Так як $r_3(x)=-3$ є стале число, а на стале число без остачі ділиться будь-який многочлен, то наступна остача $r_4(x)$ буде дорівнювати нулю. Отже, алгоритм Евкліда записався тут у три рядки, а найбільший спільний дільник дорівнює 1, або $d(x)=1$.

Щоб виразити $d(x)$ через многочлени $m(x)$ і $n(x)$ виразимо спочатку через них $r_3(x)$.

$$r_3(x)=r_1(x)-r_2(x)q_3(x)=r_1(x)-(g(x)-r_1(x)q_2(x))q_3(x)=$$
$$=r_1(x)(1+q_2(x)q_3(x))-g(x)q_3(x)=(f(x)-g(x)q_1(x))(1+q_2(x)q_3(x))-g(x)q_3(x)=$$
$$=f(x)(1+q_2(x)q_3(x))-g(x)(q_1(x)+q_1(x)q_2(x)q_3(x)+q_3(x)).$$

Враховуючи, що $d(x)=-\dfrac{1}{3}r_3(x)$, запишемо:

$$d(x)=\frac{1+q_2(x)q_3(x)}{-3}\cdot f(x)+g(x)\frac{q_1(x)+q_1(x)q_2(x)q_3(x)+q_3(x)}{3}.$$

Отже, $m(x)=\dfrac{1+q_2(x)q_3(x)}{-3}$, $n(x)=\dfrac{q_1(x)+q_1(x)q_2(x)q_3(x)+q_3(x)}{3}$, де $q_1(x)=x+1$, $q_2(x)=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$, $q_3(x)=-\dfrac{3}{2}x-3$. Остаточно одержуємо: $m(x)=-\dfrac{2x^2+3x}{6}$, $n(x)=\dfrac{2x^3+5x^2-6}{6}$.

10. Користуючись схемою Горнера:

а) розкладіть многочлен $f(x)$ за степенями $(x-\alpha)$ і одержаний розклад розташуйте за спадними степенями x;

б) знайдіть значення многочлена $f(x)$ та його похідних при $x=\alpha$, якщо $f(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4,\ \alpha=-2$;

в) знайдіть канонічний розклад $f(x)$ (відокремте кратні множники).

Розв'язання:

а) За схемою Горнера маємо:

	1	0	–6	–4	9	12	4	
–2	1	–2	–2	0	9	–6	16	$=h_0$
–2	1	–4	6	–18	33	–72	$=h_1$	
–2	1	–6	18	–48	129	$=h_2$		
–2	1	–8	34	–116	$=h_3$			
–2	1	–10	54	$=h_4$				
–2	1	–12	$=h_5$					
–2	1	$=h_6$						

Звідси

$$f(x)=(x+2)^6-12(x+2)^5+54(x+2)^4-116(x+2)^3+129(x+2)^2-72(x+2)+16.$$

б) Для многочлена $f(x)$ запишемо формулу Тейлора:

$$f(x)=f(-2)+\frac{f'(-2)}{1!}(x+2)+\frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2+\ldots+\frac{f^{VI}(-2)}{6!}(x+2)^6.$$

Порівняємо цю формулу з розкладом многочлена $f(x)$ за степенями $(x+2)$. Одержуємо, що $f^{(k)}(x_0)=k!\cdot h_k$:

$$f(-2)=16,\ f'(-2)=-72,\ f''(-2)=2!\cdot 129,\ f'''(-2)=-3!\cdot 116,$$

$$f^{IV}(-2)=4!\cdot 54,\ f^{V}(-2)=-5!\cdot 12,\ f^{VI}(-2)=6!.$$

в) Старший коефіцієнт многочлена $a_0=1$, тому многочлен, якщо і має раціональні корені, то вони можуть бути лише цілими. Будемо шукати їх серед дільників вільного члена $a_6=4$: $\pm1,\pm2,\pm4$. За схемою Горнера:

α	1	0	–6	–4	9	12	4
2	1	2	–2	–8	–7	–2	0

Отже, $\alpha = 2$ – корінь даного многочлена та $f(x) = (x-2)(x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 7x - 2)$. Визначимо його кратність. Застосуємо схему Горнера до многочлена $g(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 7x - 2$.

α	1	2	–2	–8	–7	–2
2	1	4	6	4	1	0

Це означає, що $\alpha = 2$ – корінь многочлена $f(x)$ та $f(x) = (x-2)^2(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)$. Продовжимо працювати з многочленом $h(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

α	1	4	6	4	1
2	1	6	18	40	81

Останнє число $81 \neq 0$. Таким чином, коренем многочлена $h(x)$ число $\alpha = 2$ не являється. Представлені кроки можна обєднати в одну таблицю:

α	1	0	–6	–4	9	12	4
2	1	2	–2	–8	–7	–2	0
2	1	4	6	4	1	0	
2	1	6	18	40	81		

Продовжимо пошук його коренів серед ± 1. Результати можна коротко представити у вигляді таблиці:

α	1	4	6	4	1
–1	1	3	3	1	0
–1	1	2	1	0	
–1	1	1	0		
–1	1	0			
–1	1				

Чотири нулі даної таблиці кажуть при кратність 4 кореня $\alpha = -1$. Інших коренів немає. Тому вихідний многочлен можна представити у канолнячному вигляді:

$$f(x) = (x-2)^2(x+1)^4.$$

11. Знайдіть раціональні корені многочлена

$$f(x) = 12x^6 + 64x^5 + 123x^4 + 113x^3 + 65x^2 + 24x + 4.$$

Розв'язання:

Старший коефіцієнт $a_0 = 12 \neq 1$, тому многочлен, якщо має раціональні корені, то вони можуть бути як цілими, так і дробовими.

Будемо шукати їх серед чисел:

$$\pm 1;\quad \pm 2;\quad \pm 4;\quad \pm\frac{1}{2};\quad \pm\frac{1}{3};\quad \pm\frac{2}{3};\quad \pm\frac{4}{3};\quad \pm\frac{1}{4};\quad \pm\frac{1}{6};\quad \pm\frac{1}{12}.$$

Для скорочення обчислень знайдемо межі коренів многочлена $f(x)$. Так як коефіцієнти многочлена $f(x)$ додатні, то він не має додатних коренів і тому верхня межа дорівнює 0.

Знайдемо нижню межу многочлена $f(x)$ методом Ньютона. Так

$$f(-x)=12x^6-64x^5+123x^4-113x^3+65x^2-24x+4.$$

Для $f(-x)$ знаходимо методом Ньютона верхню межу коренів: –3, отже, – 3 – нижня межа коренів для многочлена $f(x)$.

Тоді усі корені многочлена $f(x)$ знаходяться у проміжку $(-3;\ 0)$. Тому залишилися для випробувань числа:

$$-1;\quad -2;\quad -\frac{1}{2};\quad -\frac{1}{3};\quad -\frac{2}{3};\quad -\frac{4}{3};\quad -\frac{1}{4};\quad -\frac{1}{6};\quad -\frac{1}{12}.$$

Знайдемо цілі корені, ними можуть бути числа –1, –2. Обчислюємо $f(1)=405$, $f(-1)=3$. Так як $f(-1)\neq 0$, то число –1 не є коренем $f(x)$. Для числа –2 застосуємо "сито". Результат запишемо у таблицю:

α	$\frac{f(1)}{\alpha-1}$	$\frac{f(-1)}{\alpha+1}$
–2	ціле	ціле

Отже, число –2 підозріле на корінь. За схемою Горнера перевіряємо, чи буде –2 коренем многочлена. Якщо так, то визначимо його кратність:

	12	64	123	113	65	24	4
–2	12	40	43	27	11	2	0
–2	12	16	11	5	1	0	
–2	12	4	3	–1	3		

З таблиці видно, що $\alpha=-2$ є двократним коренем многочлена $f(x)$. Знайдемо дробові корені. До чисел, що залишилися для перевірки, застосовуємо "сито". Результати заносимо до таблиці:

$\frac{p}{q}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$
$\frac{f(1)}{p-q}$	ц	д	ц	д	Ц	д	д
$\frac{f(-1)}{p+q}$	ц		д		Ц		

Числа $-\frac{1}{2}$ і $-\frac{1}{4}$ підозрілі на корінь. Так як –2 є двократним коренем многочлена $f(x)$, то $f(x)=(x+2)^2g(x)$, де $g(x)=12x^4+16x^3+11x^2+5x+1$, то кожне з чисел $-\frac{1}{2}$ і $-\frac{1}{4}$ перевіряємо на корінь за схемою Горнера для многочлена $g(x)$:

	12	16	11	5	1
$-\frac{1}{2}$	12	10	6	2	0
$-\frac{1}{2}$	12	4	4	0	

$-\dfrac{1}{2}$	12	–2	5	

Отже, $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ є двократним коренем многочлена $g(x)$ і тому $f(x) = (x+2)^2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 h(x)$, де $h(x) = 12x^2 + 4x + 4$. Для останнього ж многочлена легко з'ясуємо, що його дискримінант $D = 16 - 4\cdot 12\cdot 4 < 0$, а тому дійсних коренів він не має.

Отже, многочлен $f(x)$ має два двократні корені $\alpha_1 = -2,\ \alpha_2 = -\dfrac{1}{2}$.

12. Позбавтеся від алгебраїчної ірраціональності в знаменнику дробу

$$\frac{1}{\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} + 3}.$$

Розв'язання:

Даний дріб є значенням раціонального дробу $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x^2 - x + 3}$ при $x = \sqrt[3]{7}$, яке є коренем незвідного у полі Q многочлена $h(x) = x^3 - 7$. Многочлени $g(x)$ і $h(x)$ взаємно прості у полі Q. Знайдемо лінійне зображення їхнього найбільшого спільного дільника.

Ділення многочленів виконаємо "кутом":

$$\begin{array}{rl|l} - & x^3 - 7 & \underline{x^2 - x + 3} \\ & \underline{x^3 - x^2 + 3x} & x + 1 \\ - & x^2 - 3x - 7 & \\ & \underline{x^2 - x + 3} & \\ & -2x - 10 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl|l} - & x^2 - x + 3 & \underline{-2x - 10} \\ & \underline{x^2 + 5x} & -\dfrac{1}{2}x + 3 \\ - & -6x + 3 & \\ & \underline{-6x - 30} & \\ & 33 & \end{array}$$

Звідси

$$33 = (x^2 - x + 3) - (-2x - 10)\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) =$$

$$= (x^2 - x + 3) - \left((x^3 - 7) - (x^2 - x + 3)(x + 1)\right)\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) =$$

$$= g(x) - (h(x) - g(x)(x+1))\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) = g(x)\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3\right) - h(x)\left(-\frac{1}{2}x + 3\right).$$

Оскільки $h\left(\sqrt[3]{7}\right) = 0$, то:

$$33 = g\left(\sqrt[3]{7}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt[3]{49} + \frac{5}{2}\sqrt[3]{7} + 3\right),$$

$$\frac{1}{g\left(\sqrt[3]{7}\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} + 3} = \frac{-\sqrt[3]{49} + 5\sqrt[3]{7} + 6}{66}.$$

13. Побудувавши систему Штурма, відокремте корені многочлена $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$.

Розв'язання:

Визначимо границі дійсних коренів многочлена. Для цього побудуємо допоміжні многочлени: $f_1(x)=-f(x)=x^4+x^3-4x^2-4x+1$, $f_2(x)=x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x}+1\right)=x^4+4x^3-4x^2-x+1$, $f_3(x)=$ $=x^4 f\left(-\frac{1}{x}\right)=x^4-4x^3-4x^2+x+1$. Знайдемо верхні межі їх коренів за схемою Горнера:

$f(x)$:

	1	−1	−4	4	1
3	1	2	2	10	1

$f_1(x)$:

	1	1	−4	−4	1
2	1	3	2	0	1

$f_2(x)$:

	1	4	−4	−1	1
1	1	5	1	0	1

$f_3(x)$:

	1	−4	−4	1	1
5	1	1	1	6	31

Отже, 3 – верхня границя додатних коренів; –2 – нижня границі від'ємних коренів, $\frac{1}{1}=1$ – нижня границя додатних коренів, $-\frac{1}{5}$ – верхня границя від'ємних коренів (можна взяти нуль).

Отже, всі дійсні корені належать проміжкам: $(-2;0)\cup(1;3)$.

Побудуємо систему поліномів Штурма. Покладемо:

$$f_0(x)=f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1,\ f_1(x)=f'(x)=4x^3-3x^2-8x+4,$$
$$f_2(x)=-(f_0(x),f_1(x))=7x^2-8x-4,\ f_3(x)=-(f_1(x),f_2(x))=4x-5,$$
$$f_4(x)=-(f_2(x),f_3(x))=1.$$

Визначимо знаки отриманих функцій на $\pm\infty$ та в точці 0:

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	Кількість змін знаку
$-\infty$	+	−	+	−	+	4
0	+	+	−	−	+	2
∞	+	+	+	+	+	0

Таким чином, на інтервалі $(-\infty;0)$ лежить 4–2=2 корені та на інтервалі $(0;\infty)$: 2–0=2 корені. Відокремимо корені поліному. Для цього побудуємо ще одну таблицю:

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	Кількість змін знаку
–2	+	−	+	−	+	4
–1	−	+	+	−	+	3
0	+	+	−	−	+	2
1	+	−	−	−	+	2
3/2	−	−	−	+	+	1
2	+	+	+	+	+	0

Як видно з таблиці, корені належать інтервалам: $(-2;-1)$, $(-1;0)$, $(1;3/2)$ та $(3/2;2)$ (дробове значення $3/2$ було взяте у зв'язку з тим, що інтервалу $(1;2)$ належать два корені).