## *Приклади розв'язування задач*

**1.** Застосовуючи процес ортогоналізації, побудуйте ортогональний базис підпростору, натягнутого на дану систему векторів: $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$.

*Розв'язання:*

Складемо матрицю з координат векторів та зведемо її до ступінчатого виду методом елементарних перетворень рядків:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\1&1&-5&3\\3&2&8&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&-1&-7&4\\0&-4&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&-1&-7&4\\0&-2&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&-1&-7&4\\0&0&15&-10\end{pmatrix}.$$

$Rang A = 3$, $n$ – кількість векторів, $3=r=n \Rightarrow$ вектори лінійно незалежні.

Нехай $\overline{f}_1=\overline{e}_1=\overline{(1,2,2,-1)}$, тоді $\overline{f}_2=\overline{e}_2+{}_2\lambda_1\overline{f}_1$.

$${}_2\lambda_1=-\frac{(\overline{e}_2,\overline{f}_1)}{(\overline{f}_1,\overline{f}_1)}=-\frac{1+2-10-3}{10}=1,$$

$$\overline{f}_2=\overline{(2,3,-3,2)},$$

$$\overline{f}_3=\overline{e}_3+{}_3\lambda_1\overline{f}_1+{}_3\lambda_2\overline{f}_2,$$

$${}_3\lambda_1=-\frac{(\overline{e}_3,\overline{f}_1)}{(\overline{f}_1,\overline{f}_1)}=-\frac{3+4+16+7}{10}=-3,$$

$${}_3\lambda_2=-\frac{(\overline{e}_3,\overline{f}_2)}{(\overline{f}_2,\overline{f}_2)}=-\frac{6+6-24-14}{4+9+9+1}=-26,$$

$$\overline{f}_3=\overline{(3,2,8,7)}-3\overline{(1,2,2,-1)}+\overline{(2,3,-3,2)}=\overline{(2,-1,-1,-2)}.$$

Перевіримо ортогональність знайдених векторів:

$$(\overline{f}_1,\overline{f}_2)=2+6-6-2=0;$$

$$(\overline{f}_1,\overline{f}_3)=2-2-2+2=0;$$

$$(\overline{f}_2,\overline{f}_3)=4-3+3-4=0.$$

Нормуємо вектори: $|\overline{f}_1|=\sqrt{10}$; $|\overline{f}_2|=\sqrt{26}$; $|\overline{f}_3|=\sqrt{10}$. Тоді покладемо:

$$g=\frac{f}{|f|};$$

$$\overline{g}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}}\right);$$

$$\overline{g}_2=\left(\frac{2}{\sqrt{26}},\frac{3}{\sqrt{26}},-\frac{3}{\sqrt{26}},\frac{2}{\sqrt{26}}\right);$$

$$\overline{g}_3=\left(\frac{2}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)-$$

– шуканий ортонормований базис.

**2.** Знайдіть ортогональну проекцію $\overline{y}$ і ортогональну складову $\overline{z}$ вектора $\overline{x} = \left(\overline{4,-1,-3,4}\right)$ на лінійний простір $L = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3 \rangle$, де $\overline{a}_1(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\overline{a}_2(1,\ 2,\ 2,\ -1)$, $\overline{a}_3(1,\ 0,\ 0,\ 3)$.

*Розв'язання:*

Перевіримо задані вектори на лінійну залежність. Для цього знайдемо ранг матриці, складеної з координат векторів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так як ранг матриці дорівнює 2, то $L = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle$.

Будемо шукати ортогональну проекцію вектора $\overline{x}$ на $L$ у вигляді: $\overline{y} = y_1 \overline{a}_1 + y_2 \overline{a}_2$. Так як $\overline{z}$ – ортогональна складова, то $\overline{x} = \overline{y} + \overline{z} = y_1 \overline{a}_1 + y_2 \overline{a}_2 + \overline{z}$. Оскільки $\overline{x} \perp L$, то:

$$\left(\overline{x}, \overline{a}_1\right) = y_1 \left(\overline{a}_1, \overline{a}_1\right) + y_2 \left(\overline{a}_2, \overline{a}_2\right) + \left(\overline{z}, \overline{a}_1\right) \Rightarrow 4 = 4y_1 + 4y_2,$$

$$\left(\overline{x}, \overline{a}_2\right) = y_1 \left(\overline{a}_1, \overline{a}_2\right) + y_2 \left(\overline{a}_2, \overline{a}_2\right) + \left(\overline{z}, \overline{a}_2\right) \Rightarrow -8 = 4y_1 + 10y_2.$$

Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y_1 + y_2 = 1, \\ 2y_1 + 5y_2 = -4 \end{cases}$ за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 2 = 3,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 4 = 9,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6.$$

$$y_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3,\ y_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2.$$

Тоді $\overline{y} = 3\left(\overline{1,1,1,1}\right) - 2\left(\overline{1,\ 2,2,-1}\right) = \left(\overline{1,-1,-1,5}\right)$, $\overline{z} = \overline{x} - \overline{y}$, $\overline{z}(3, 0, -2, -1)$.

**3.** Знайдіть базис ортогонального доповнення $L^*$ підпростору $L$, натягнутого на вектори $\overline{a}_1(1,\ 0,\ 2,\ 1)$, $\overline{a}_2(2,\ 1,\ 2,\ 3)$, $\overline{a}_3(0,\ 1,\ -2,\ 1)$.

*Розв'язання:*

Складемо матрицю з векторів для перевірки їх лінійної незалежності:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так як $rang\, A = 2$, то вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ лінійно залежні, незалежними будуть вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2$.

Нехай $\overline{y}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ належить ортогональному доповненню $L^*$ підпростору $L$. Тоді він ортогональний до векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2$, тобто $\left(\overline{y}, \overline{a}_1\right) = 0$ і $\left(\overline{y}, \overline{a}_2\right) = 0$. За цих умов складемо та розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -0{,}5x_3 - x_4, \\ x_2 = -x_3 - x_4. \end{cases}$$

Складемо таблицю для визначення ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|
| –1 | –2 | 2 | 0 |
| –2 | –1 | 0 | 1 |

Звідси $\overline{y}_1\left(-1,-2,2,0\right)$ і $\overline{y}_2\left(-2,-1,0,1\right)$, тобто $L^* = \left\langle \overline{y}_1, \overline{y}_2 \right\rangle$.

**4.** Доведіть, що скалярний добуток може бути заданий формулою $\left(\overline{a},\overline{b}\right)= a_1 b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + 6a_2b_2$.

*Розв'язання:*

Для доведення необхідно перевірити аксіоми скалярного добутку. Значення скалярного добутку є дійсним числом. Тоді

1. $\left(\overline{a},\overline{a}\right)=a_1a_1 + 2a_1a_2 + 2a_2a_1 + 6a_2a_2 = a_1^2 + 4a_1a_2 + 6a_2^2 = \left(a_1 + 2a_2\right)^2 + 2a_2^2 \geq 0$;

$$\left(\overline{a},\overline{a}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0, \\ 2a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0}.$$

2. $\left(\overline{b},\overline{a}\right)=b_1a_1 + 2b_1a_2 + 2b_2a_1 + 6b_2a_2 = a_1b_1 + 2a_2b_1 + 2a_1b_2 + 6a_2b_2 = \left(\overline{a},\overline{b}\right)$.

3. $\left(\lambda\overline{a},\overline{b}\right)=\lambda a_1 b_1 + 2\lambda a_1 b_2 + 2\lambda a_2b_1 + 6\lambda a_2b_2 = \lambda\left(a_1b_1 + 2a_1b_2 + a_2b_1 + 6a_2b_2\right)=\lambda\left(\overline{a},\overline{b}\right)$.

4. $\left(\overline{a}+\overline{b},\overline{c}\right)=\left(a_1 + b_1\right)c_1 + 2\left(a_1, b_1\right)c_2 + 2\left(a_2 + b_2\right)c_1 + 6\left(a_2 + b_2\right)c_2 =$

$$=\underbrace{a_1c_1 + 2a_1c_2 + 2a_2c_1 + 6a_2c_2}_{\left(\overline{a},\overline{c}\right)} + \underbrace{b_1c_1 + 2b_1c_2 + 2b_2c_1 + 6b_2c_2}_{\left(\overline{b},\overline{c}\right)} = \left(\overline{a},\overline{c}\right) + \left(\overline{b},\overline{c}\right).$$

Так як всі аксіоми виконуються, то $\left(\overline{a},\overline{b}\right)= a_1 b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + 6a_2b_2$ визначає скалярний добуток.

**5.** Нехай дано два вектори $\overline{x}\left(-1, 4\right)$, $\overline{y}\left(2, 5\right)$. Знайдіть довжини векторів $\overline{x}, \overline{y}$ та $cos\left(\overline{x},\overline{y}\right)$, якщо:

1. $\left(\overline{x},\overline{y}\right)= x_1y_1 + x_2y_2$; 2. $\left(\overline{x},\overline{y}\right)= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 6x_2y_2$.

*Розв'язання:*

1. Скалярний добуток $\left(\overline{x},\overline{y}\right)= -1\cdot 2 - 4\cdot 5 = 18$. Довжина вектора визначається за формулою $\left|\overline{x}\right|=\sqrt{\left(\overline{x},\overline{x}\right)}$. Тоді $\left|\overline{x}\right|=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$, $\left|\overline{y}\right|=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$. Знайдемо $\cos\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\dfrac{\left(\overline{x},\overline{y}\right)}{\left|\overline{x}\right|\ \left|\overline{y}\right|}$: $\cos\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\dfrac{18}{\sqrt{17}\ \sqrt{29}}$.

2. $\left(\overline{x},\overline{y}\right)=-1\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot 5 + 2\cdot 4\cdot 2 + 6\cdot 4\cdot 5 = 124$,

$\left(\overline{x},\overline{x}\right)=-1\cdot(-1) + 2\cdot(-1)\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot(-1) + 6\cdot 4\cdot 4 = 81$, $\left|\overline{x}\right|=\sqrt{81}=9$;

$\left(\overline{y},\overline{y}\right)=2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 5 + 2\cdot 5\cdot 2 + 6\cdot 5\cdot 5 = 194$, $\left|\overline{y}\right|=\sqrt{194}$.

Обчислимо $\cos\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\dfrac{\left(\overline{x},\overline{y}\right)}{\left|\overline{x}\right|\ \left|\overline{y}\right|} \Rightarrow \cos\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\dfrac{124}{9\sqrt{194}}$.

**6.** Знайдіть норму вектора $\left(3,1,2,1\right)$.

*Розв'язання:*

Для того, щоб нормувати вектор, потрібно знайти його довжину , а потім застосувати формулу $\overline{g}=\overline{f}/|\overline{f}|$. Отже, $|\overline{f}|=\sqrt{9+1+4+1}=\sqrt{15}$, $\overline{g}=\left(\frac{3}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{2}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$.

### *Тест для самоконтролю*

**1.** Нерівність Коші – Буняковського

**А.** $(\overline{x},\overline{y})^2 \le \|\overline{x}\|^2\,\|\overline{y}\|^2$ **Б.** $(\overline{x},\overline{y})^2 \ge \|\overline{x}\|^2\,\|\overline{y}\|^2$ **В.** $(\overline{x},\overline{y}) \le \|\overline{x}\|^2\,\|\overline{y}\|^2$ **Г.** $(\overline{x},\overline{y})^2 \le \|\overline{x}\|\,\|\overline{y}\|$

**2.** Знайдіть координати вектора $\overline{x}(1,2,1,1)$ у базисі $\overline{e}_1(1,1,1,1), \overline{e}_2(1,1,-1,-1), \overline{e}_3(1,-1,1,-1), \overline{e}_4(1,-1,-1,1)$

**А.** $\left(\frac{5}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$ **Б.** $\left(\frac{3}{4},\frac{6}{4},\frac{1}{4},-\frac{5}{4}\right)$ **В.** $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$ **Г.** $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},-\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right)$

**3.** Скалярний добуток двох векторів визначається за формулою:

**А.** $(\overline{x},\overline{y})=\overline{x}+\overline{y}$ **Б.** $(\overline{x},\overline{y})=x_1y_1-$ $-x_2y_2-...-x_ny_n$ **В.** $(\overline{x},\overline{y})=x_1y_1+$ $+x_2y_2+...+x_n\,y_n$ **Г.** $(\overline{x},\overline{y})=-x_1y_1+$ $+x_2y_2-...+x_n\,y_n$

**4.** Знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{x}(2,1,-1,1)$ і $\overline{y}(3,-1,-2,1)$

**А.** 5 **Б.** 8 **В.** 9 **Г.** 7

**5.** Обчисліть скалярний добуток векторів $\overline{x}(2,1)$, $\overline{y}(-3,-1)$ за формулою $(\overline{x},\overline{y})=2x_1y_1+6x_1y_2+6x_2y_1+25x_2y_2$

**А.** 28 **Б.** $-37$ **В.** –57 **Г.** 15

**6.** Кут між двома векторами визначається за формулою:

**А.** $sin\theta=\frac{(\overline{x},\overline{y})}{\|\overline{x}\|\|\overline{y}\|}$ **Б.** $cos\theta=\frac{(\overline{x},\overline{y})^2}{\|\overline{x}\|\|\overline{y}\|}$ **В.** $sin\theta=\frac{(\overline{x},\overline{y})^2}{\|\overline{x}\|\|\overline{y}\|}$ **Г.** $cos\theta=\frac{(\overline{x},\overline{y})}{\|\overline{x}\|\|\overline{y}\|}$

**7.** Знайдіть кут між векторами $\overline{x}(2,1,3,2)$ і $\overline{y}(1,2,-2,1)$

**А.** $180^\circ$ **Б.** $45^\circ$ **В.** $60^\circ$ **Г.** $90^\circ$

**8.** Вектор називається нормованим, якщо його довжина дорівнює:

**А.** 3 **Б.** 1 **В.** 2 **Г.** $\sqrt{2}$

**9.** Знайдіть нормований вектор ортогональний до векторів $\overline{a}(1,1,1,1)$, $\overline{b}(1,-1,-1,1)$, $\overline{c}(2,1,1,3)$

**А.** $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ **Б.** $\left(0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ **В.** $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ **Г.** $-\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

**10.** Нормувати можна:

**А.** будь-який вектор $\overline{x}$ **Б.** лише нульовий вектор $\overline{x}$ **В.** будь-який ненульовий вектор $\overline{x}$ **Г.** вектор $\overline{x}$ взагалі не можна нормувати

**11.** Знайдіть ортогональну нормовану фундаментальну систему розв’язків системи рівнянь $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

**А.** $\frac{1}{3}(1, 0, 2, -1)$; **Б.** $\frac{1}{6}(1, 0, 3, -1)$; **В.** $\frac{1}{6}(1, 0, 2, -1)$; **Г.** $\frac{1}{6}(1, 0, 1, -1)$;

$\frac{1}{\sqrt{498}}(1, 1, 8, 17)$ $\frac{1}{\sqrt{48}}(1, 12, 8, 7)$ $\frac{1}{\sqrt{498}}(1, 12, 8, 17)$ $\frac{1}{\sqrt{498}}(1, 2, 8, 1)$

**12.** Знайдіть $\cos(\bar{x}, \bar{y})$, де $\bar{x}(t) = 1$, $\bar{y}(t) = \sin t$, якщо $(\bar{x}, \bar{y}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{x}(t)\bar{y}(t)\,dt$.

**А.** $-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ **Б.** $-\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ **В.** $-\frac{2}{\pi}$ **Г.** $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

**13.** Визначте косинус внутрішнього кута $A$ трикутника $ABC$, заданого координатами вершин: $A(1,2,1,2)$, $B(3,1,-1,0)$, $C(1,1,0,1)$.

**А.** $\cos A = 34$ **Б.** $\cos A = \frac{5}{\sqrt{39}}$ **В.** $\cos A = \frac{1}{\sqrt{39}}$ **Г.** $\cos A = \frac{7}{\sqrt{29}}$

**14.** Ортогональною проекцією вектору $\bar{x}(1, 2, 3)$ евклідового простору $V$, натягнутого на систему векторів $\bar{a}_1(1,1,1)$, $\bar{a}_2(1,-1,1)$, $\bar{a}_3(2, 0, 2)$ буде:

**А.** $\bar{y}(2, -2, 2)$ **Б.** $\bar{y}(1, -1, 1)$ **В.** $\bar{y}(1,1,1)$ **Г.** $\bar{y}(1, -2, 2)$

**15.** Всякий евклідовий простір можна вважати нормованим, якщо кожному вектору $\bar{x}$ простору поставити у відповідність число:

**А.** $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{y})}$ **Б.** $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ **В.** $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{y}, \bar{x})}$ **Г.** $\|\bar{x}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$

*Відповіді:* 1. А 2. А 3. В 4. Б 5. В 6. Г 7. Г 8. Б 9. А 10. В 11. В 12. В 13. Б 14. В 15. Б.