## *Приклади розв'язування задач*

1. Знайдіть координати вектора $\overline{x}$ в базисі $\overline{e}'$, якщо він заданий в базисі $\overline{e}$:

$$\overline{x}=(1,4,-8);\quad \overline{e}_1'=\overline{e}_1+\overline{e}_2-3\overline{e}_3,\ \overline{e}_2'=\frac{3}{4}\overline{e}_1-\overline{e}_2,\ \overline{e}_3'=-\overline{e}_1+\overline{e}_2+\overline{e}_3.$$

*Розв'язання:*

Нехай $(\alpha,\beta,\gamma)$ – координати вектора $\overline{x}$ в базисі $\overline{e}'$. Складемо матрицю переходу від базису $\overline{e}$ до базису $\overline{e}'$:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 3/4 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тоді координати вектора $\overline{x}$ в базисі $\overline{e}'$ можна визначити з матричного рівняння:

$$\begin{pmatrix}1\\4\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3/4 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3/4 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\4\\-8\end{pmatrix}.$$

Надаємо читачеві можливість самостійно переконатися в тому, що

$$\begin{pmatrix}1 & 3/4 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3/4 & 1/4\\ 4 & 2 & 2\\ 3 & 9/4 & 7/4\end{pmatrix}.$$

Тому координати вектора $\overline{x}$ в новому базисі набувають вигляду:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3/4 & 1/4\\ 4 & 2 & 2\\ 3 & 9/4 & 7/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}.$$

2. Нехай $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)$. Перевірте, чи є лінійним перетворення $A\,\overline{x}=\left(4x_1-3x_2-2x_3;x_1^2;x_2+2x_3\right)$.

*Розв'язання:*

Нехай вектори $\overline{x}$ та $\overline{y}$ мають координати $(x_1,x_2,x_3)$ і $(y_1,y_2,y_3)$ відповідно. Перевіримо виконання властивостей лінійного перетворення для довільних векторів $\overline{x}$, $\overline{y}$:

$$A(\overline{x}+\overline{y})=$$
$$=\left(4(x_1+y_1)-3(x_2+y_2)-2(x_3+y_3);(x_1+y_1)^2;(x_2+y_2)+2(x_3+y_3)\right)=$$
$$=\left(4x_1-3x_2-2x_3+4y_1-3y_2-2y_3;x_1^2+2x_1y_1+y_1^2;x_2+2x_3+y_2+2y_3\right).$$

З іншого боку:

$$A(\overline{x})+A(\overline{y})=$$
$$=\left(4x_1-3x_2-2x_3;x_1^2;x_2+2x_3\right)+\left(4y_1-3y_2-2y_3;y_1^2;y_2+2y_3\right)=$$
$$=\left(4x_1-3x_2-2x_3+4y_1-3y_2-2y_3;x_1^2+y_1^2;x_2+2x_3+y_2+2y_3\right).$$

Оскільки в загальному випадку $(x_1 + y_1)^2 \neq x_1^2 + y_1^2$, то $A(\bar{x} + \bar{y}) \neq A(\bar{x}) + A(\bar{y})$ і дане перетворення не є лінійним.

3. Нехай $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $A\bar{x} = (x_2 - x_1; x_1; x_1 + x_3)$, $B\bar{x} = (x_2; 2x_3; x_1)$. Знайдіть $(3A^2 + B)\bar{x}$.

*Розв'язання:*

I спосіб. За умовою $A\bar{x} = (x_2 - x_1; x_1; x_1 + x_3)$, тоді

$$A^2\bar{x} = A(A\bar{x}) = A(x_2 - x_1; x_1; x_1 + x_3) =$$
$$= (x_1 - (x_2 - x_1); (x_2 - x_1); (x_2 - x_1) + (x_1 + x_3)) = (2x_1 - x_2; x_2 - x_1; x_2 + x_3).$$

Оскільки відображення $A^2\bar{x}$ є лінійним (читачеві не складе труднощів переконатися в цьому самостійно), то

$$3A^2\bar{x} = A^2(3\bar{x}) = (6x_1 - 3x_2; 3x_2 - 3x_1; 3x_2 + 3x_3).$$

Тому

$$(3A^2 + B)\bar{x} = (6x_1 - 3x_2; 3x_2 - 3x_1; 3x_2 + 3x_3) + (x_2; 2x_3; x_1) =$$
$$= (6x_1 - 2x_2; -3x_1 + 3x_2 + 2x_3; x_1 + 3x_2 + 3x_3).$$

II спосіб. Знайдемо елементи матриць лінійних перетворень $A$ і $B$. Для цього знайдемо образи базисних векторів:

$$A(\bar{e}_1) = (-1,1,1),\ A(\bar{e}_2) = (1,0,0),\ A(\bar{e}_3) = (0,0,1);$$
$$B(\bar{e}_1) = (0,0,1),\ B(\bar{e}_2) = (1,0,0),\ B(\bar{e}_3) = (0,2,0).$$

Розташуємо їх по стовпцях та отримаємо матриці перетворень $A$ і $B$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді:

$$(3A^2 + B)\bar{x} = \left( 3\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

або

$$(3A^2 + B)\bar{x} = (6x_1 - 2x_2; -3x_1 + 3x_2 + 2x_3; x_1 + 3x_2 + 3x_3).$$

4. Знайдіть матрицю оператора $A$ в базисі $e' = \{\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'\}$, де $\bar{e}_1' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{e}_2' = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$, $\bar{e}_3' = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, якщо вона задана в базисі $e = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$:

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання:*

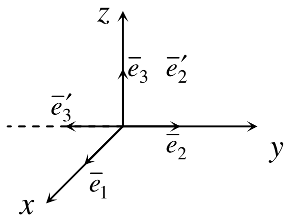
Знайдемо елементи матриці в новому базисі за формулою $A_{e'} = T^{-1} A_e T$, де $T$ – матриця переходу від базису $e$ до $e'$:

$$T=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix},\ T^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A_{e'}=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -18 & 33\\ 2 & -10 & 22\\ 1 & -4 & 8\end{pmatrix}.$$

5. Доведіть лінійність, знайдіть матрицю, область значень і ядро оператора повороту відносно осі $Ox$ на кут $\frac{\pi}{2}$ в додатному напрямку.




*Розв'язання:*

Даному операторові відповідає перетворення, яке, очевидно, є лінійним, так як при повороті образ суми векторів є сумою образів та образ добутку числа на вектор є добуток числа на образ вектора.

Для знаходження матриці оператора $A$ знайдемо образи базисних векторів:

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{e}_1)&=\bar{e}_1=(1,0,0)\\ \varphi(\bar{e}_2)&=\bar{e}_3=(0,0,1)\\ \varphi(\bar{e}_3)&=-\bar{e}_2=(0,-1,0)\end{aligned}\ \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Для знаходження ядра оператора необхідно розв'язати рівняння $A\bar{x}=\bar{0}$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0,\\ x_2=0,\\ x_3=0.\end{cases}$$

Таким чином, ядро оператора $KerA=<\bar{0}>$, а, отже, за теоремою 5.8 область значень оператора співпадає з усім тривимірним векторним простором. Базисом цього простору можна обрати хоча б базис $\{\bar{e}_1,\bar{e}_3,-\bar{e}_2\}$.

6. Знайдіть власні значення і власні вектори матриці оператора:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 2\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

*Розв'язання:*

Складемо характеристичне рівняння матриці $det(A-\lambda E)=0$:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & -2 & 2\\ 0 & 5-\lambda & 0\\ 0 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ (5-\lambda)^2(3-\lambda)=0.$$

Значить, $\lambda=3;5$ – власні значення матриці $A$.

Власні вектори $\bar{x}$, що відповідають власному значенню $\lambda$, знайдемо з рівняння $(A-\lambda E)\bar{x}=\bar{0}$. Так при $\lambda=3$ власні вектори мають вид:

$$\alpha\,(1,0,-1),\ \alpha\in R,$$

а при $\lambda=5$:

$$\beta(1,0,0)+\gamma(0,1,1),\ \beta,\gamma\in R.$$

7. З'ясуєте, чи можна привести матрицю $A_\varphi$ оператора $\varphi$ до діагонального виду шляхом переходу до нового базису. У разі позитивної відповіді знайдіть цей базис і відповідний вид матриці, якщо:

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ -1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

*Розв'язання:*

Знайдемо власні значення матриці, а також їх алгебраїчні кратності як коренів характеристичного рівняння:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0 & 3\\ -1 & -2-\lambda & 0 & -3\\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0\\ 1 & 2 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}\ \Rightarrow\ \lambda^2(2-\lambda)^2=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda_1=0, k_1=2,\\ \lambda_2=2, k_2=2.\end{array}\right.$$

Тепер знайдемо геометричну кратність власних значень, тобто кількість власних векторів, що їм відповідають.

При $\lambda_1=0$ запишемо матрицю однорідної системи $(A-0\cdot E)\bar{x}=\bar{0}$ та зведемо її до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ -1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2-3x_4,\\ x_2=x_2,\\ x_3=0,\\ x_4=x_4.\end{cases}$$

Фундаментальну систему розв'язків даної системи утворюють вектори $\bar{a}_1(-2,1,0,0)$ та $\bar{a}_2(-3,0,0,1)$ – лінійно незалежні власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda_1=0$. Отже, геометрична кратність цього кореня дорівнює двом і збігається з його алгебраїчною кратністю.

Аналогічно, при $\lambda_2=2$ отримаємо:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = -x_2. \end{cases}$$

Фундаментальну систему розв'язків цієї системи утворюють вектори $\overline{b}_1(-1,1,0,-1)$ та $\overline{b}_2(0,0,1,0)$ – лінійно незалежні власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda_2 = 2$. Отже, геометрична кратність і цього кореня дорівнює двом і також збігається з його алгебраїчною кратністю.

Як видно з приведеного розв'язання, геометрична кратність всіх власних значень збігається з їх алгебраїчною кратністю. Тому матрицю оператора можна привести до діагонального виду. При чому у базисі, що складається з власних векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{b}_1, \overline{b}_2$, матриця оператора набуває вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Лінійний оператор $\varphi$ арифметичного простору в стандартному базисі заданий матрицею $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Знайдіть підпростори, інваріантні відносно оператора $\varphi$.

*Розв'язання:*

Відомо, що інваріантними підпросторами простору $V$ є нульовий підпростір та сам простір $V$. Також ядро $Ker\varphi$ та образ $Im\varphi$ оператора $\varphi$ інваріантні відносно цього оператора.

Знайдемо інші інваріантні підпростори. Для цього визначимо власні значення матриці оператора. Складемо та розв'яжемо відповідне характеристичне рівняння:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & -2 \\ -3 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 14) = 0.$$

Над полем дійсних чисел воно має єдиний розв'язок $\lambda = 0$, це і буде єдине власне значення. Знайдемо власні вектори, що відповідають знайденому власному значенню:

$$A - 0E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = 2x_1, \\ x_3 = 3x_1. \end{cases}$$

Фундаментальну систему розв’язків утворює вектор $\overline{a}(1,2,3)$ – власний вектор, тоді $M_0 = \{\overline{x} \in V \mid \varphi(\overline{x}) = 0 \cdot \overline{x}\}$ – інваріантний підпростір, що відповідає дійсному власному значенню $\lambda = 0$. Інакше можна записати $M_0 =< \overline{(1,2,3)} >$.