## *Приклади розв'язування задач*

**1.** Знайдіть канонічний вид кососиметричної форми:

$$g(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1 + x_1y_4 - x_4y_1 + \\ + x_2y_3 - x_3y_2 + x_2y_4 - x_4y_2 + x_3y_4 - x_4y_3.$$

*Розв'язання:*

Нагадаємо, що *канонічним видом кососиметричної форми* є наступний вигляд:

$$g(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + \dots.$$

Приведемо дану форму до необхідного вигляду. Для цього згрупуємо доданки, що містять $x_1, y_1$, і винесемо їх за дужки:

$$g(x,y) = x_1(y_2 + y_3 + y_4) - y_1(x_2 + x_3 + x_4) + x_2y_3 - x_3y_2 + \\ + x_2y_4 - x_4y_2 + x_3y_4 - x_4y_3. \qquad (6.2)$$

Покладемо:

$$\begin{cases} x_1' = x_1, \\ x_2' = x_2 + x_3 + x_4, \\ x_3' = x_3, \\ x_4' = x_4; \end{cases} \begin{cases} y_1' = y_1, \\ y_2' = y_2 + y_3 + y_4, \\ y_3' = y_3, \\ y_4' = y_4. \end{cases}$$

Звідси:

$$\begin{cases} x_1 = x_1', \\ x_2 = x_2' - x_3' - x_4', \\ x_3 = x_3', \\ x_4 = x_4'; \end{cases} \begin{cases} y_1 = y_1', \\ y_2 = y_2' - y_3' - y_4', \\ y_3 = y_3', \\ y_4 = y_4'. \end{cases} \qquad (6.3)$$

Підставимо (6.3) у (6.2) і зберемо доданки, що містять $x_2', y_2'$:

$$g(x',y') = y_2'(x_1' - x_3' - x_4') - x_2'(y_1' - y_3' - y_4') - x_4'y_3' + x_3'y_4'. \qquad (6.4)$$

Введемо ще одну заміну змінних:

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' - x_3' - x_4', \\ x_2'' = x_2', \\ x_3'' = x_3', \\ x_4'' = x_4'; \end{cases} \begin{cases} y_1'' = y_1' - y_3' - y_4', \\ y_2'' = y_2', \\ y_3'' = y_3', \\ y_4'' = y_4''. \end{cases}$$

Виразимо з останніх співвідношень $x_i'$, $y_i'$, $i = \overline{1,4}$, через $x_i''$, $y_i''$:

$$\begin{cases} x_1' = x_1'' + x_3'' + x_4'', \\ x_2' = x_2'', \\ x_3' = x_3'', \\ x_4' = x_4''; \end{cases} \begin{cases} y_1' = y_1'' + y_3'' + y_4'', \\ y_2' = y_2'', \\ y_3' = y_3'', \\ y_4' = y_4''. \end{cases} \qquad (6.5)$$

Підставимо вирази (6.5) у (6.4). Тим самим отримаємо канонічний вид кососиметричної форми:

$$g(x'',y'') = y_2''x_1'' - x_2''y_1'' + x_3''y_4'' - x_4''y_3''.$$

**2.** Знайдіть значення, при якому квадратична форма додатно визначена:

$$g(\bar{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

*Розв'язання:*

Для відповіді на це питання скористаємося критерієм Сильвестра. Складемо матрицю квадратичної форми:

$$A_g = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Обчислимо значення її головних мінорів:

$$\Delta_1 = |\,5\,| = 5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2.$$

Очевидно, що при $\lambda > 2$ форма буде додатно визначена.

**3.** Приведіть квадратичну форму до канонічного виду методом Лагранжа:

$$f(\bar{x}) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

*Розв'язання:*

Оскільки $a_{11} \neq 0$, то звернемо увагу на доданки, що містять $x_1$ (підкреслені):

$$f(\bar{x}) = \underline{x_1^2} - 3x_2^2 - 2x_3^2 \underline{+ 2x_1x_2} \underline{+ 2x_1x_3} - 6x_2x_3.$$

Введемо заміну:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases} \tag{6.6}$$

Внаслідок цього квадратична форма набере вигляду:

$$f = (y_1 - y_2 - y_3)^2 - 3y_2^2 - 2y_3^2 + 2(y_1 - y_2 - y_3)y_2 + 2(y_1 - y_2 - y_3)y_3 -$$
$$- 6y_2y_3 = y_1^2 \underline{- 2y_2^2} - 3y_3^2 \underline{- 8y_2y_3}.$$

Підкреслимо доданки з $y_2$ та застосуємо ще одне перетворення змінних:

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = -2y_2 - 4y_3, \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = -\dfrac{1}{2}(z_2 + 4z_3), \\ y_3 = z_3. \end{cases} \tag{6.7}$$

Останнє дає можливість записати дану квадратичну форму в канонічному виді:

$$f = z_1^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 (z_2 + 4z_3)^2 - 3z_3^2 - 8\left(-\frac{1}{2}\right)(z_2 + 4z_3)z_3 =$$
$$= z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 + 5z_3^2.$$

Для отримання лінійного перетворення, що приводить вихідну квадратичну форму до знайденого канонічного виду, необхідно підставити формули (6.7) у (6.6). Отже,

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + \frac{1}{2} z_2 + z_3, \\ x_2 = -\frac{1}{2} z_2 - 2z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

**4.** Приведіть квадратичну форму до канонічного виду методом ортогональних перетворень:

$$f(\bar{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

*Розв'язання:*

Складемо матрицю Грама даної квадратичної форми:

$$A_f = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо її власні значення (вони будуть коефіцієнтами при квадратах змінних в шуканому канонічному виді):

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 4-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ -(\lambda+1)(\lambda-5)^2 = 0 \ \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 5.$$

Звідси $f(\bar{y}) = -y_1^2 + 5y_2^2 + 5y_3^2$ – шуканий канонічний вид даної квадратичної форми.

Для знаходження перетворення, що приводить дану квадратичну форму до канонічного виду, знайдемо власні вектори, що відповідають знайденим власним значенням.

При $\lambda_1 = -1$:

$$A_f + E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = -2x_2. \end{cases}$$

Власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = -1$: $\bar{e}_1 = (-1;1;-2)$.

При $\lambda_2 = 5$:

$$A_f - 5E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

Власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda_2 = 5$ кратності 2: $\bar{e}' = (1;1;0)$, $\bar{e}_3 = (-2;0;1)$.

Легко перевірити, що $(\overline{e}_1', \overline{e}_2') = (\overline{e}_1', \overline{e}_3') = 0$, а $(\overline{e}_2', \overline{e}_3') \neq 0$. Знайдемо координати вектора $\overline{e}_3'' = \alpha \overline{e}_2' + \beta \overline{e}_3'$ з умов: $(\overline{e}_1', \overline{e}_3'') = (\overline{e}_2', \overline{e}_3'') = 0$. Помножимо скалярно рівність $\overline{e}_3'' = \alpha \overline{e}_2' + \beta \overline{e}_3'$ на вектор $\overline{e}_2'$. Отримаємо, що $\alpha = -\beta \dfrac{(\overline{e}_2', \overline{e}_3')}{(\overline{e}_2', \overline{e}_2')} = \beta$. Покладемо $\alpha = \beta = 1$ і одержимо координати вектора $\overline{e}_3'' = (-1,1,1)$.

Нормуємо знайдені вектори:

$$\overline{e}_1' = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \quad \overline{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right), \quad \overline{e}_3'' = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Оскільки вони вже попарно ортогональні, то складемо матрицю переходу:

$$Q_{E \to E'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

А, отже, лінійне перетворення, що приводить дану квадратичну форму до канонічного виду, можна записати у вигляді системи:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3, \\ x_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3. \end{cases}$$

**5.** Приведіть квадратичну форму до канонічного виду методом Якобі:

$$f(\overline{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

*Розв'язання:*

Складемо матрицю Грама і знайдемо її головні мінори:

$$A_f = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = |4| = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -25.$$

Тоді $f(\overline{y}) = y_1^2 + \dfrac{15}{4} y_2^2 - \dfrac{5}{3} y_3^2$ – шуканий канонічний вид.

**6.** Зведіть пару квадратичних форм

$$f(\overline{x}) = -2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 4x_2x_4 + 6x_3x_4,$$

$$g(\overline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_2 + +2x_1x_3 +$$
$$+ 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + +4x_2x_4 + 6x_3x_4.$$
до канонічного виду одним лінійним перетворенням.

*Розв'язання:*

Перевіримо за критерієм Сільвестра, яка з наведених квадратичних форм додатно визначена. Для цього запишемо їх матриці:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Не важко з'ясувати, що $\Delta_1^F = 0$, а $\Delta_1^G = 1 > 0$, $\Delta_2^G = 1 > 0$, $\Delta_3^G = 1 > 0$, $\Delta_4^G = 1 > 0$. Отже, додатно визначеною виявилася форма $g$.

Застосуємо метод Лагранжа до додатно визначеної форми $g$. Лінійним перетворенням

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3 - y_4, \\ x_4 = y_4 \end{cases} \tag{6.8}$$

форма $g$ зведеться до вигляду: $g'(\overline{y}) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$. Застосувавши таке саме перетворення до форми $f$, отримаємо $f'(\overline{y}) = -2y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_1y_4 + 2y_2y_3 + 2y_2y_4 - 2y_3y_4$.

До квадратичної форми $f'$ застосуємо метод ортогональних перетворень. Запишемо матрицю цієї форми та знайдемо її власні значення і відповідні їм власні вектори:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$\lambda^4 - 6\lambda^2 + 8\lambda - 3 = 0$; $\lambda_1 = -3$ кратності 1, $\lambda_2 = 1$ кратності 3.

При $\lambda_1 = -3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = 0;$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} IV \\ \\ \\ I \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +I \\ -I \\ -3I \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 1/4 \\ \cdot 1/4 \\ +II-III \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} -II+III \\ +III \\ \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} z_1 = -z_4, \\ z_2 = -z_4, \\ z_3 = z_4, \\ z_4 = z_4. \end{matrix}$$

Отже, власному значенню $\lambda_1 = -3$ відповідає власний вектор $\bar{z}^1 = (1,1,-1,-1)$.

При $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = 0;$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ -I \\ +I \\ +I \end{matrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -z_2 + z_3 + z_4, \\ z_2 = z_2, \\ z_3 = z_3, \\ z_4 = z_4. \end{cases}$$

Фундаментальну систему розв'язків даної системи утворюють вектори: $\bar{z}^2 = (-1,1,0,0)$, $\bar{z}^3 = (1,0,1,0)$, $\bar{z}^4 = (1,0,0,1)$. Нескладно переконатись, що всі вектори попарно ортогональні, окрім $\bar{z}^3$ та $\bar{z}^4$: $(\bar{z}^3;\bar{z}^4) = 1$. Знайдемо новий вектор $\bar{z}'^4$ за умови, що $(\bar{z}^1;\bar{z}'^4) = 0$, $(\bar{z}^2;\bar{z}'^4) = 0$, $(\bar{z}^3;\bar{z}'^4) = 0$. Його координати $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ мають задовольняти системі рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +I \\ -I \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +2III \\ \cdot(-1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ III \\ II \end{matrix} \to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -5 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}-II\\ +III\\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}z_1 = 3z_3,\\ z_2 = 3z_3,\\ z_3 = z_3,\\ z_4 = 5z_3.\end{cases}$$

Таким чином, $\bar{z}'^4 = (3,3,1,5)$.

Нормуємо отримані вектори

$$\bar{q}_1 = \frac{\bar{z}^1}{\left|\bar{z}^1\right|} = \frac{(1,1,-1,-1)}{\sqrt{4}} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right);$$

$$\bar{q}_2 = \frac{\bar{z}^2}{\left|\bar{z}^2\right|} = \frac{(-1,1,0,0)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right);$$

$$\bar{q}_3 = \frac{\bar{z}^3}{\left|\bar{z}^3\right|} = \frac{(1,0,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right);$$

$$\bar{q}_4 = \frac{\bar{z}'^4}{\left|\bar{z}'^4\right|} = \frac{(3,3,1,5)}{\sqrt{44}} = \left(\frac{3}{2\sqrt{11}},\frac{3}{2\sqrt{11}},\frac{1}{2\sqrt{11}},\frac{5}{2\sqrt{11}}\right)$$

та запишемо їх по стовпцях матриці ортогонального перетворення $Q$:

$$Q = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2\sqrt{11}}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{2\sqrt{11}}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{11}}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2\sqrt{11}}\end{pmatrix}.$$

Тобто перетворенням змінних

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2\sqrt{11}}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{2\sqrt{11}}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{11}}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2\sqrt{11}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_3 + \frac{3}{2\sqrt{11}}z_4, \\ y_2 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 + \frac{3}{2\sqrt{11}}z_4, \\ y_3 = -\frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_3 + \frac{1}{2\sqrt{11}}z_4, \\ y_4 = -\frac{1}{2}z_1 + \frac{5}{2\sqrt{11}}z_4. \end{cases} \tag{6.9}$$

квадратична форма $f'(\overline{y})$ зводиться до $f''(\overline{z}) = -3z_1 + z_2 + z_3 + z_4$. При цьому ж перетворенні квадратична форма $g'(\overline{y}) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$ не зміниться, бо її матриця підлягає перетворенню $Q^t GQ = Q^t EQ = E$.

Підставимо (6.9) в (6.8) та отримаємо сумарне перетворення

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_3 + \frac{3}{2\sqrt{11}}z_4 - \left(\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 + \frac{3}{2\sqrt{11}}z_4\right), \\ x_2 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 + \frac{3}{2\sqrt{11}}z_4 - \left(-\frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_3 + \frac{1}{2\sqrt{11}}z_4\right), \\ x_3 = -\frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_3 + \frac{1}{2\sqrt{11}}z_4 - \left(-\frac{1}{2}z_1 + \frac{5}{2\sqrt{11}}z_4\right), \\ x_4 = -\frac{1}{2}z_1 + \frac{5}{2\sqrt{11}}z_4 \end{cases}$$

або в скороченому вигляді

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{\sqrt{2}}z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_3, \\ x_2 = 2z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_3 + \frac{1}{\sqrt{11}}z_4, \\ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}z_3 - \frac{2}{\sqrt{11}}z_4, \\ x_4 = -\frac{1}{2}z_1 + \frac{5}{2\sqrt{11}}z_4, \end{cases}$$

що приводить форми $f$ та $g$ до канонічного виду: $f''(\overline{z}) = -3z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$, $g''(\overline{z}) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$.