МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,

МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ

ЗАПОРОЖСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Методическое пособие

по дисциплине:

с/к «Вычислительные методы теории графов»

Основы алгебры структурных чисел и графы

Запорожье 2012 г.

Методическое пособие предназначена для проведения теоретических и практических занятий по дисциплине с/к «Вычислительные методы теории графов» студентам, обучающимся по программе подготовке бакалавров по специальности 6.080202 «Прикладная математика». Позволяет изучить и закрепить учебный материал для части «Основы алгебры структурных чисел и графы» специальной дисциплины «Вычислительные методы теории графов». Пособие составлено таким образом, что каждый параграф тесно связан с теорией, приведено достаточное количество примеров для усвоения темы, что позволяет применить их для проведения практических занятий при изучении данной дисциплины. Структура методического пособия позволяет также освоить данный предмет студентам заочного отделения

Печатается согласно протоколу заседания кафедры
Математического моделирования Запорожского национального
Университета № 15 от 24 апреля 2012 года

Разработал:
доцент кафедры математического моделирования,
кандидат физико-математических наук,
Курапов Сергей Всеволодович
Аспирант кафедры информационных технологий
Давидовский Максим Владимирович

АЛГЕБРА СТРУКТУРНЫХ ЧИСЕЛ И ГРАФЫ

Рассмотрим основные вопросы алгебры структурных чисел [2].

1 Определение структурного числа

Пусть $\aleph$ - подмножество абстрактного пространства $\Re$. Элементы множества $\aleph$ обозначим $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots \in \aleph$

Рассмотрим систему элементов в виде таблицы

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Будем рассматривать эту систему как совокупность столбцов α_k, т.е.

$$\text{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad a_i \neq a_j \quad (i \neq j). \qquad (2)$$

Столбцы a_k в свою очередь представляют собой неупорядоченные множества элементов a_{ik}

$$a_k = \{a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}\} \quad a_{ik} \neq a_{jk} \qquad (3)$$

Столбцы будем считать равными, если они содержат одинаковые элементы. Положим по определению, что система (1) не содержит одинаковых столбцов. Систему типа (1) будем рассматривать как элемент новой алгебры - алгебры структурных чисел. Согласно определениям абстрактной алгебры, алгебру структурных чисел можно отнести к категории операторных алгебр, т.е. ее можно характеризовать упорядоченной тройкой $<E,\Omega,e>$ [3], где E - носитель алгебры (в нашем случае семейство множеств); Ω - двухэлементное множество операторов w_1, w_2 определяющих сумму и произведение; е - результат, т.е. функция, которая выражению AwB ставит в соответствие элемент $C \in E$, являющийся результатом действия.

Введем вспомогательное понятие, которое используем при определении структурного числа.

Рассмотрим последовательность элементов z_i, необязательно различных:

$$<z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_n> \qquad (4)$$

Обозначим через $r(z_k)$ - число одинаковых элементов последовательности (4).

Структурным числом называется система элементов α_{ik} вида (1) [с учетом (2) и (3)], удовлетворяющая следующим определениям .

Определение 1. Два структурных числа считаются равными (А=В) тогда и только тогда, когда $(a \in \text{A}) \Leftrightarrow (a \in \text{B})$ или

$$\text{A} = \text{B} \Leftrightarrow \bigwedge_a (a \in \text{A} \Leftrightarrow a \in \text{B}) \qquad (5)$$

Определение 2. Суммой структурных чисел A и B называется структурное число

$$C = \{z \mid (z \in A) \wedge (z \in B),\ z \notin A \cup B\} = A\square B; \tag{6}$$

В этом случае можно написать $C = A + B$.

Выражение $A\square B$ в формуле (6) означает симметричную разность множеств A и B.

Определение 3. Произведением структурных чисел A и B называется структурное число

$$C = (a \cup b \mid a \cap b = 0,\ r(a \cup b) \in \{1,3,\ldots,\}\ a \in A,\ b \in B\}, \tag{7}$$

которое записывается в виде $C = AB$.

В соответствии с определением суммы при сложении структурных чисел опускаются столбцы, одновременно присутствующие в обоих числах A и B, а в соответствии с определением произведения при умножении структурных чисел A и B опускаются те столбцы $a \cup b$, в которых какой-либо элемент повторяется, т.е. для которых $a \cap b \neq \varnothing$, а также опускается четное число идентичных столбцов.

Можно заметить, что равенство структурных чисел представляет собой отношение эквивалентности, т.е. является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Пример 1. Равенство структурных чисел

$$\left|\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{matrix}\right|$$

Два структурных числа равны, если содержат идентичные столбцы, независимо от порядка элементов в столбцах и порядка столбцов.

Пример 2. Сложение структурных чисел

$$\left|\begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 7 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 7 & 2 & 7 & 4 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 3 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 2 & 4 \end{matrix}\right|$$

Пример 3. Умножение структурных чисел

$$\left|\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{matrix}\right| * \left|\begin{matrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 4 & 2 & 5 & 4 & 2 & 5 \end{matrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 5 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{matrix}\right|$$

Произведением двух структурных чисел A и B называется структурное число, столбцы которого представляют собой суммы (согласно понятиям теории множеств) всех возможных комбинаций столбцов A и B, за исключением наибольшего четного числа идентичных столбцов и таких столбцов, в которых какой-либо элемент повторяется (произведение других столбцов не содерит).

Из определения суммы и произведения структурных чисел следует, что эти операции всегда можно выполнить на множестве этих чисел. Из тех же определений можно сделать вывод, что сложение и умножение структурных чисел коммутативны и ассоциативны, а умножение дистрибутивно относительно сложения.

Для трех произвольных структурных чисел имеют место следующие соотношения, подобные тем, которые справедливы для элементарной алгебры:

$$A + B = B + A,$$

$$AB = BA,$$

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$A(B + C) = AB + AC. \tag{8}$$

Следует различать структурное число [$\varnothing$], содержащее один столбец, который является пустым множеством $\varnothing$, и структурное число [], не содержащее ни одного столбца.

2. Геометрическое изображение структурного числа

Попробуем дать геометрическую интерпретацию структурного числа. Следует отметить, что геометрическая интерпретация встречается также и в других случаях, например в случае комплексных чисел, которым ставится в соответствие некоторые точки плоскости.

Определение 4. Если столбцы структурного числа A взаимно однозначно соответствуют остовам графа **G** так, что каждый столбец представляет собой множество значений описывающей функции соответствующего остова, то граф **G** называется геометрическим изображением числа A и записывается в виде

$$G = ob(A). \tag{9}$$

Следовательно геометрическим изображением структурного числа A служит любой детерминированный граф, удовлетворяющий условию (9), или класс графов подобных структур. Из принятого определения следует, что геометрическое изображение структурного числа - не однозначное понятие, так как структурному числу может соответствовать много элементное семейство графов, составляющих класс с подобной структурой. Однако это в известном смысле является достоинством метода, так как становится возможным, например, в задачах синтеза электрических цепей, нахождение не одного, а множества вариантов цепи, удовлетворяющей заданным условиям.

Теорема 1. Структурное число A с одинаковым числом элементов в строках, геометрическим изображением которого служит связный граф с вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равно произведению n-1 простых однострочных сомножителей

$$A = X_1\, X_2 \ldots X_{n-1} \tag{10}$$

причем сомножители состоят из значений описывающей функции ребер, инцидентных произвольно выбранной вершине x_i ($x_i \neq x_j$, если i $\neq$ j) графа **G**.

Теорема 2. Необходимое и достаточное условие существования геометрического изображения структурного числа в виде связного графа состоят в том, чтобы структурное число A имело разложение на простые однострочные сомножители

$$A = X_1\, X_2 \ldots X_p \tag{11}$$

причем произвольный элемент a_{ij} должен встречаться самое большее в двух простых числах X_i, X_j. Доказательство этих двух элегантных теорем приведено в [2]. Из теоремы 2 следует, что структурное число, у которого число элементов в строках различно, не имеет связного геометрического изображения.

3. Дополнительное структурное число и геометрическое обратное изображение

Определение 5. Дополнительным структурным числом для данного структурного числа A называется структурное число A^d, столбцы которого представляют собой дополнения столбцов числа A до множества элементов a_{ij} из которых состоит структурное число A.

Если обозначить множество элементов a_{ij}, из которых состоит число A, через L, то столбцы C_i^d числа A^d определим как разность (в смысле понятий алгебры множеств)

$$C_1^d = L - C_1,\ C_2^d = L - C_2,\ \ldots,\ C_p^d == L - C_p \tag{12}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_p$ - столбцы числа A.

Следует отметить справедливость такого свойства

$$(A + B)^d = A^d + B^d,\ \ L = L_A \cup L_B \tag{13}$$

Способ получения дополнительного структурного числа иллюстрирует следующий пример.

Пример 4. Определить структурное число A^d по отношению к структурному числу

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 8 \\ 5 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

Множество элементов числа L таково:

L = {2, 3, 5, 6, 8, 9}.

Дополнительное структурное число равно

$$A^d = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 5 \\ 9 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

Оказывается, что для структурного числа удобно иметь дуальное геометрическое изображение, поэтому введем понятие обратного изображения геометрического структурного числа.

Определение 6. Граф **G** называется обратным изображением структурного числа A, если столбцы числа A взаимно однозначно соответствуют дополнениям остовов графа **G** так, что столбец числа A представляет собой множество значений описывающей функции соответствующего дополнения остова. Тогда напишем

$$G = \mathrm{cob}\,(A) \tag{14}$$

Нетрудно заметить, что обратное изображение дополнительного числа A^d одновременно служит изображением числа A и наоборот.

Пример 5. Граф **G** [3,13,14] представленный на рис. 1 характеризуется структурным числом A

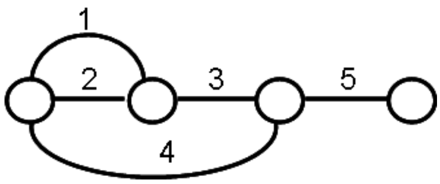

Рис. 1. Граф **G**

Дополнительное структурное число по отношению к структурному числу A

$$A^d = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Обратное геометрическое изображение структурного числа A представлено на рис. 2.

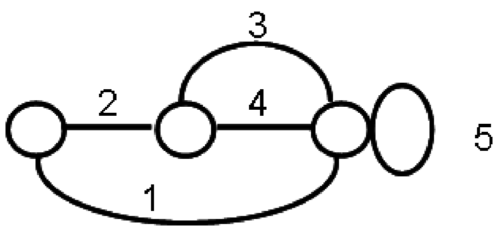

Рис. 2. Обратное геометрическое изображение структурного числа A.

4. Алебраическая производная и обратная производная структурного числа

На множестве структурных чисел можно определить различные операции; одна из них - операция алгебраической производной.

Определение 7. Алгебраической производной структурного числа называется число $\partial A / \partial a$, определенное как

$$\frac{\partial A}{\partial a} = A \Bigg|\begin{array}{l}\text{столбцы, не содержащие}\\ \text{элемент } a \text{ исключены}\end{array} \tag{15}$$

Легко доказать правильность следующих зависимостей, аналогичных «обычной» производной:

$$\frac{\partial A}{\partial a}(A_1 + A_2) = \frac{\partial A_1}{\partial a} + \frac{\partial A_2}{\partial a}$$

$$\frac{\partial A}{\partial a}(A_1 A_2) = \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_2}{\partial a} A_2 . \tag{16}$$

Алгебраическую производную обозначим как A_a , т.е.

$$\frac{\partial A}{\partial a} = A_a \tag{17}$$

Следует заметить, что для одноэлементного структурного числа

$$\frac{\partial}{\partial a}[a] = 1 . \tag{18}$$

Пример 6. Нахождение алгебраической производной структурного числа:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 4} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

По аналогии с математическим анализом нахождение производной будем называть дифференцированием.

Дифференцирование структурного числа имеет весьма простую геометрическую интерпретацию.

Свойство 1. Геометрическое изображение структурного .числа $\partial A / \partial a$ представляет собой геометрическое изображение структурного числа А с замкнутым ребром a.

Кроме алгебраической производной, сформулируем для структурных чисел еще одно понятие (в известном смысле дуальное по отношению к производной) - понятие обратной алгебраической производной.

Алгебраической обратной производной структурного числа называется структурное число σA/σa, равное

$$\frac{\sigma A}{\sigma a} = A \left| \begin{array}{l} \text{столбцы, содержащие} \\ \text{элемент } a\text{, опущены} \end{array} \right. \tag{19}$$

Для обратной алгебраической производной имеют место соотношения

$$\frac{\sigma}{\sigma a}(A_1 + A_2) = \frac{\sigma A_1}{\sigma a} + \frac{\sigma A_2}{\sigma a},$$

$$\frac{\sigma}{\sigma a}(A_1 A_2) = \frac{\sigma A_1}{\sigma a} A_2 + \frac{\sigma A_2}{\sigma a} A_1 + A_1 A_2, \tag{20}$$

справедливые для произвольных чисел A_1 и A_2.

Кроме того,

$$\frac{\sigma}{\sigma a}(A_1 A_2) = \frac{\sigma A_1}{\sigma a} \frac{\sigma A_2}{\sigma a}. \tag{21}$$

Для одноэлементного структурного числа имеем

$$\frac{\sigma}{\sigma a}[a] = 0. \tag{22}$$

Соотношение алгебраических производной и обратной производной можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial A}{\partial a}(A[a]) = \frac{\sigma A}{\sigma a}. \tag{23}$$

Алгебраическую обратную производную будем обозначать как

$$\frac{\sigma A}{\sigma a} = A^a. \tag{24}$$

Пример 7. Расчет алгебраической обратной производной:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 & 8 \end{vmatrix}, \quad \frac{\sigma A}{\sigma 1} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \quad \frac{\sigma A}{\sigma 2} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

Алгебраическая обратная производная имеет простую геометрическую интерпретацию.

Свойство 2. Геометрическое изображение структурного числа σA/σ*a* представляет собой геометрическое изображение структурного числа А, в котором ребро *a* отключено в одной вершине и замкнуто в петлю.

Обратное геометрическое изображение структурного числа σA/σ*a* представляет собой обратное изображение геометрического числа A с замкнутым числом *a*.

Отметим, что для структурного числа А всегда имеет место соотношение

$$\text{A} = \frac{\sigma A}{\sigma a} + [a]\frac{\partial A}{\partial a}, \tag{25}$$

где *a* - элемент числа А.

Пример 8. Задача перечисления всех деревьев графа [4,5,6,9].

Рассмотрим задачу перечисления всех деревьев графа **G** с применением методов алгебры структурных чисел. В качестве примера рассмотрим граф представленный на рис. 3.

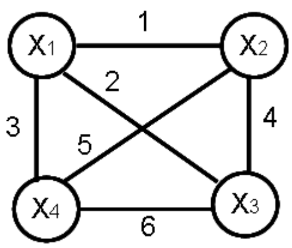

Рис. 3. Граф **G**

Представим множество базисных единичных разрезов, записанных как однострочные структурные числа, имеет вид:

$X_1 \quad \Leftrightarrow \quad [1\ 2\ 3];$

$X_2 \quad \Leftrightarrow \quad [1\ 4\ 5];$

$X_3 \quad \Leftrightarrow \quad [2\ 4\ 6];$

$X_4 \quad \Leftrightarrow \quad [3\ 5\ 6\ ].$

Предположим, что множество деревьев **T** = [1 2 3]×[1 4 5]×[2 4 6] =

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 5 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{|c|cccc|c|cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 1 & 1 & 4 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 2 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 1 & 4 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 6 & 6 & 6 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$T^{d} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 4 & 5 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 4 & 5 & 5 & 6 & 4 & 6 & 6 & 5 & 4 & 5 & 6 & 6 & 4 \end{vmatrix} =$$

если $\mathbf{T} = [1\ 2\ 3]\times[1\ 4\ 5]\times[3\ 5\ 6]=$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 5 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 1 & 1 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 6 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 6 & 3 & 6 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 1 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 6 & 3 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} =$$

если $T = [1\ 4\ 5\ ]\times[2\ 4\ 6]\times[3\ 5\ 6] =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 2 & 2 & 2 & 6 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 3 & 5 & 6 & 3 & 3 & 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

если $T = [1\ 2\ 3\ ]\times[2\ 4\ 6]\times[3\ 5\ 6] =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 3 & 5 & 6 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

таким образом:

$T = [1\ 2\ 3]\times[1\ 4\ 5]\times[2\ 4\ 6] =$

$= [1\ 2\ 3]\times[1\ 4\ 5]\times[3\ 5\ 6] =$

$= [1\ 4\ 5\ ]\times[2\ 4\ 6]\times[3\ 5\ 6] =$

$= [1\ 2\ 3\ ]\times[2\ 4\ 6]\times[3\ 5\ 6].$

Что и требовалось показать.

Множество дополнений дерева - кодеревья (или множество хорд), можно получить, рассматривая произведения однострочных структурных чисел, где каждое однострочное структурное число представляет собой базисный единичный цикл.

$T^d = [1\ 2\ 4]\times[1\ 3\ 5]\times[4\ 5\ 6] =$

Все деревья и дополнения дерева данного графа представлены на рис.4 и рис.5.

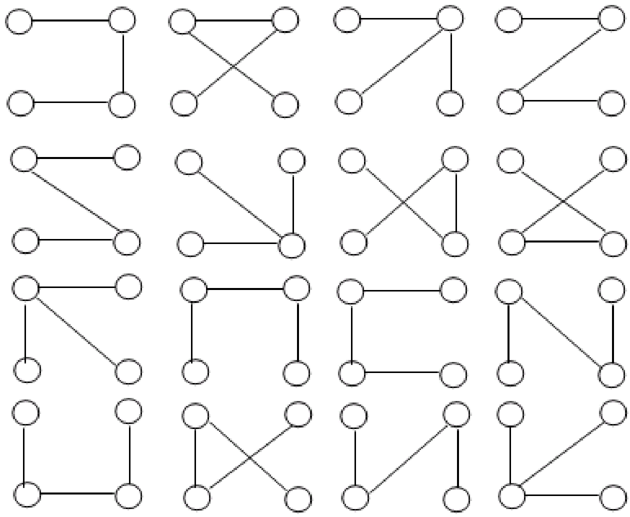

Рис. 4 Множество деревьев графа **G**

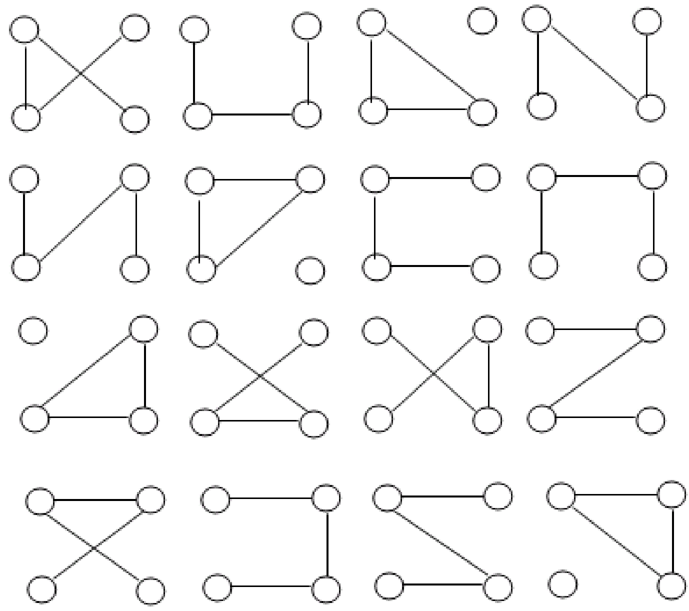

Рис. 5 Множество кодеревьев графа G

5. Матроиды и их свойства

Матроиды были введены Уитни в контексте исследований абстрактной теории линейной зависимости. Существует много эквивалентных определений матроида. Для нас наиболее удобным будет следующее определение [1,3,8,9]:

Определение 8. ***Матроид*** M – это конечное множество S и набор F таких подмножеств множества S, что выполняются следующие условия, называемые условиями независимости:

$$\varnothing \in F \tag{26}$$

$$\text{Если } Z \in F \text{ и } Y \subseteq Z, \text{ то } Y \in F \tag{27}$$

$$\text{Если } Z \text{ и } Y \text{ – члены } F \text{ и } |Z| = |Y| + 1, \text{ то}$$

$$\text{существует такое } z \in Z - Y, \text{ что } Y \cup z \in F \tag{28}$$

В выражении (28) вычитание Z – Y понимается как Z /(Z ∩ Y). Элементы множества S называются элементами матроида M. Члены набора F называются множествами матроида M. Максимальное по включению независимое множество матроида M называется базой матроида M. Множество баз матроида M обозначается B(M) или просто B.

Подмножество S, не принадлежащее набору F называется зависимым. Минимальное по включению зависимое подмножество S называется циклом матроида M. Набор циклов матроида M обозначается ζ (M) или просто ζ .

Функция ранга ρ матроида M связывает со всяким подмножеством A ⊆ S неотрицательное целое число, определяемое следующим образом:

$\rho(A) = max\{|Z| : Z \subseteq A, Z \in F\}$;

где ρ(A) – ранг подмножества A. Ранг матроида M, обозначается ρ(M) – это ранг множества S.

Пусть S - конечное подмножество векторного пространства. Семейство всех подмножеств линейно независимых векторов в подмножестве S удовлетворяет аксиомам независимости (26-28). Следовательно, эти подмножества S образуют набор независимых множеств матроида на подмножестве S. Ранг подмножества $Z \subseteq S$ в этом матроиде равен размерности векторного пространства, порожденного Z.

Пусть неориентированный граф с множеством ребер U. Определим на U два матроида. Сначала рассмотрим набор всех F всех подмножеств U, не содержащих циклов. Очевидно, что F удовлетворяет аксиомам (26-27). Нетрудно показать, что F удовлетворяет и (28). Таким образом, F является набором независимых множеств матроида M на U. Каждая база матроида M – это дерево графа G. Ранг любого подмножества $Z \subseteq U$ в этом матроиде равен рангу суграфа графа G, порожденного Z. Кроме того, каждый цикл матроида M является циклом графа G. По этой причине M называется циклическим матроидом.

Рассмотрим теперь семейство F^* всех подмножеств U, не содержащих разрезающих множеств графа G [4,14].

Можно показать, что F^* удовлетворяет всем аксиомам независимости (26-28) и поэтому является семейством независимых множеств матроида M^* на U. Любая база матроида M^* - это кодерево графа G. В этом матроиде ранг подмножества $Z \subseteq U$ равен цикломатическому числу графа G. Кроме того, каждый цикл матроида M^* является разрезающим множеством графа G. Матроид M^* называется матроидом разрезов или матроидом связей графа G.

Определенные таким образом матроиды M и M^* обладают интересным свойством, заключающимся в том, что базы одного из них являются дополнениями в U баз другого.

Здесь следует отметить, что множество баз матроида B(M) точно совпадает со структурным числом **T** порожденного умножением однострочных структурных чисел, каждое из которых характеризует независимый единичный разрез. А множество баз матроида B(M^*) точно совпадает со структурным числом $\mathbf{T}^d$ порожденного умножением однострочных структурных чисел, каждое из которых характеризует независимый единичный цикл (см. пример 5).

6. Циклический матроид и матроид разрезов

Пример 9. Рассмотрим следующий граф G. Будем обозначать ребра цифрами.

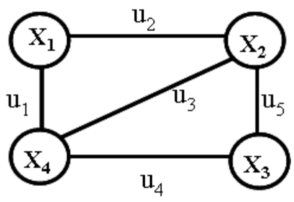

Рис. 6. Граф G.

Рассмотрим однострочные структурные числа, характеризующие единичные разрезы графа G, для удобства записи ребра будем обозначать цифрами (см. рис.6).

$x_1 = [1\ 2]$, $x_2 = [2\ 3\ 5]$, $x_3 = [4\ 5]$, $x_4 = [1\ 3\ 4]$.

Перемножим однострочные структурные числа $x_2 \times\ x_3 \times x_4$ по правилам умножения алгебра структурных чисел

$$\begin{array}{r} [2\ 3\ 5] \\ \times\ \ [4\ 5] \\ [1\ 3\ 4] \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 4 & 5 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Здесь 8 и 10 столбцы повторяются четное число раз и представляют собой цикл матроида {3,4,5}, и потому подлежат удалению.

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

В результате умножения однострочных структурных чисел $x_2 \times\ x_3 \times x_4$ по правилам умножения алгебра структурных чисел, мы получили структурное число **T** характеризующее базы циклического матроида графа G. Легко показать, что данное структурное число **T** удовлетворяет условиям (26-28) аксиомам независимости. Для проверки условия (28) рассмотрим всевозможные сочетания из 5 элементов по 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Легко убедиться, что все сочетания удовлетворяют условию (27). Проверим, удовлетворяется условие (28) или нет.

1: $Z = \{1,2,4\}$; $Y = \{1,2\}$; $z = Z - Y = \{4\}$; $z \cup Y = \{1,2,4\} \in B(M)$;
2: $Z = \{1,2,4\}$; $Y = \{1,3\}$; $z = Z - Y = \{2,4\}$; $z \cup Y = \{1,3,4\} \in B(M)$;
3: $Z = \{1,2,4\}$; $Y = \{1,4\}$; $z = Z - Y = \{2\}$; $z \cup Y = \{1,2,4\} \in B(M)$;
4: $Z = \{1,2,4\}$; $Y = \{1,5\}$; $z = Z - Y = \{2,4\}$; $z \cup Y = \{1,4,5\} \in B(M)$;
5: $Z = \{1,2,4\}$; $Y = \{2,3\}$; $z = Z - Y = \{1,4\}$; $z \cup Y = \{2,3,4\} \in B(M)$;
6: $Z = \{1,2,4\}$; $Y = \{2,4\}$; $z = Z - Y = \{1\}$; $z \cup Y = \{1,2,4\} \in B(M)$;
7: $Z = \{1,2,4\}$; $Y = \{2,5\}$; $z = Z - Y = \{1,4\}$; $z \cup Y = (\{1,2,5\} \vee \{2,4,5\}) \in B(M)$;
8: $Z = \{1,2,4\}$; $Y = \{3,4\}$; $z = Z - Y = \{1,2\}$; $z \cup Y = \{2,3,4\} \in B(M)$;

9:	$Z = \{1,2,4\}$;	$Y = \{3,5\}$;	$z = Z - Y = \{1,2,4\}$;	$z \cup Y = (\{1,3,5\} \vee \{2,3,5\}) \in B(M)$;
10:	$Z = \{1,2,4\}$;	$Y = \{4,5\}$;	$z = Z - Y = \{1,2\}$;	$z \cup Y = (\{1,4,5\} \vee \{2,4,5\}) \in B(M)$;
11:	$Z = \{1,2,5\}$;	$Y = \{1,2\}$;	$z = Z - Y = \{5\}$;	$z \cup Y = \{1,2,5\} \in B(M)$;
12:	$Z = \{1,2,5\}$;	$Y = \{1,3\}$;	$z = Z - Y = \{2,5\}$;	$z \cup Y = \{1,3,5\} \in B(M)$;
13:	$Z = \{1,2,5\}$;	$Y = \{1,4\}$;	$z = Z - Y = \{2,5\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,4\} \vee \{1,4,5\}) \in B(M)$;
14:	$Z = \{1,2,5\}$;	$Y = \{1,5\}$;	$z = Z - Y = \{2\}$;	$z \cup Y = \{1,2,5\} \in B(M)$;
15:	$Z = \{1,2,5\}$;	$Y = \{2,3\}$;	$z = Z - Y = \{1,5\}$;	$z \cup Y = \{2,3,5\} \in B(M)$;
16:	$Z = \{1,2,5\}$;	$Y = \{2,4\}$;	$z = Z - Y = \{1,5\}$;	$z \cup Y = \{2,4,5\} \in B(M)$;
17:	$Z = \{1,2,5\}$;	$Y = \{2,5\}$;	$z = Z - Y = \{1\}$;	$z \cup Y = \{1,2,5\} \in B(M)$;
18:	$Z = \{1,2,5\}$;	$Y = \{3,4\}$;	$z = Z - Y = \{1,2,5\}$;	$z \cup Y = (\{1,3,4\} \vee \{2,3,4\}) \in B(M)$;
19:	$Z = \{1,2,5\}$;	$Y = \{3,5\}$;	$z = Z - Y = \{1,2\}$;	$z \cup Y = (\{1,3,5\} \vee \{2,3,5\}) \in B(M)$;
20:	$Z = \{1,2,5\}$;	$Y = \{4,5\}$;	$z = Z - Y = \{1,2\}$;	$z \cup Y = (\{1,4,5\} \vee \{2,4,5\}) \in B(M)$;
21:	$Z = \{1,3,4\}$;	$Y = \{1,2\}$;	$z = Z - Y = \{3,4\}$;	$z \cup Y = \{1,2,4\} \in B(M)$;
22:	$Z = \{1,3,4\}$;	$Y = \{1,3\}$;	$z = Z - Y = \{4\}$;	$z \cup Y = \{1,3,4\} \in B(M)$;
23:	$Z = \{1,3,4\}$;	$Y = \{1,4\}$;	$z = Z - Y = \{3\}$;	$z \cup Y = \{1,3,4\} \in B(M)$;
24:	$Z = \{1,3,4\}$;	$Y = \{1,5\}$;	$z = Z - Y = \{3,4\}$;	$z \cup Y = (\{1,3,5\} \vee \{1,4,5\}) \in B(M)$;
25:	$Z = \{1,3,4\}$;	$Y = \{2,3\}$;	$z = Z - Y = \{1,4\}$;	$z \cup Y = \{2,3,4\} \in B(M)$;
26:	$Z = \{1,3,4\}$;	$Y = \{2,4\}$;	$z = Z - Y = \{1,3\}$;	$z \cup Y = \{2,3,4\} \vee \{1,2,4\}) \in B(M)$;
27:	$Z = \{1,3,4\}$;	$Y = \{2,5\}$;	$z = Z - Y = \{1,3,4\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,5\} \vee \{2,3,5\}) \in B(M)$;
28:	$Z = \{1,3,4\}$;	$Y = \{3,4\}$;	$z = Z - Y = \{1\}$;	$z \cup Y = \{1,3,4\} \in B(M)$;
29:	$Z = \{1,3,4\}$;	$Y = \{3,5\}$;	$z = Z - Y = \{1,4\}$;	$z \cup Y = \{1,3,5\} \in B(M)$;
30:	$Z = \{1,3,4\}$;	$Y = \{4,5\}$;	$z = Z - Y = \{1,3\}$;	$z \cup Y = \{1,4,5\} \in B(M)$;
31:	$Z = \{1,3,5\}$;	$Y = \{1,2\}$;	$z = Z - Y = \{3,5\}$;	$z \cup Y = \{1,2,5\} \in B(M)$;
32:	$Z = \{1,3,5\}$;	$Y = \{1,3\}$;	$z = Z - Y = \{5\}$;	$z \cup Y = \{1,3,5\} \in B(M)$;
33:	$Z = \{1,3,5\}$;	$Y = \{1,4\}$;	$z = Z - Y = \{3,5\}$;	$z \cup Y = (\{1,3,4\} \vee \{1,4,5\}) \in B(M)$;
34:	$Z = \{1,3,5\}$;	$Y = \{1,5\}$;	$z = Z - Y = \{3\}$;	$z \cup Y = \{1,3,5\} \in B(M)$;
35:	$Z = \{1,3,5\}$;	$Y = \{2,3\}$;	$z = Z - Y = \{1,5\}$;	$z \cup Y = \{2,3,5\} \in B(M)$;
36:	$Z = \{1,3,5\}$;	$Y = \{2,4\}$;	$z = Z - Y = \{1,3,5\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,4\} \vee \{2,3,4\} \vee$ $\vee \{2,4,5\}) \in B(M)$;
37:	$Z = \{1,3,5\}$;	$Y = \{2,5\}$;	$z = Z - Y = \{1,3\}$;	$z \cup Y = \{2,3,5\} \in B(M)$;
38:	$Z = \{1,3,5\}$;	$Y = \{3,4\}$;	$z = Z - Y = \{1,5\}$;	$z \cup Y = \{1,3,4\} \in B(M)$;
39:	$Z = \{1,3,5\}$;	$Y = \{3,5\}$;	$z = Z - Y = \{1\}$;	$z \cup Y = \{1,3,5\} \in B(M)$;
40:	$Z = \{1,3,5\}$;	$Y = \{4,5\}$;	$z = Z - Y = \{1,3\}$;	$z \cup Y = \{1,4,5\} \in B(M)$;
41:	$Z = \{1,4,5\}$;	$Y = \{1,2\}$;	$z = Z - Y = \{4,5\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,4\} \vee \{1,2,5\}) \in B(M)$;
42:	$Z = \{1,4,5\}$;	$Y = \{1,3\}$;	$z = Z - Y = \{4,5\}$;	$z \cup Y = (\{1,3,4\} \vee \{1,3,5\}) \in B(M)$;
43:	$Z = \{1,4,5\}$;	$Y = \{1,4\}$;	$z = Z - Y = \{5\}$;	$z \cup Y = \{1,4,5\} \in B(M)$;
44:	$Z = \{1,4,5\}$;	$Y = \{1,5\}$;	$z = Z - Y = \{4\}$;	$z \cup Y = \{1,4,5\} \in B(M)$;
45:	$Z = \{1,4,5\}$;	$Y = \{2,3\}$;	$z = Z - Y = \{1,4,5\}$;	$z \cup Y = (\{2,3,4\} \vee \{2,3,5\}) \in B(M)$;
46:	$Z = \{1,4,5\}$;	$Y = \{2,4\}$;	$z = Z - Y = \{1,5\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,4\} \vee \{2,4,5\}) \in B(M)$;
47:	$Z = \{1,4,5\}$;	$Y = \{2,5\}$;	$z = Z - Y = \{1,4\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,5\} \vee \{2,4,5\}) \in B(M)$;
48:	$Z = \{1,4,5\}$;	$Y = \{3,4\}$;	$z = Z - Y = \{1,5\}$;	$z \cup Y = \{1,3,4\} \in B(M)$;
49:	$Z = \{1,4,5\}$;	$Y = \{3,5\}$;	$z = Z - Y = \{1,4\}$;	$z \cup Y = \{1,3,5\} \in B(M)$;
50:	$Z = \{1,4,5\}$;	$Y = \{4,5\}$;	$z = Z - Y = \{1\}$;	$z \cup Y = \{1,4,5\} \in B(M)$;
51:	$Z = \{2,3,4\}$;	$Y = \{1,2\}$;	$z = Z - Y = \{3,4\}$;	$z \cup Y = \{1,2,4\} \in B(M)$;
52:	$Z = \{2,3,4\}$;	$Y = \{1,3\}$;	$z = Z - Y = \{2,4\}$;	$z \cup Y = \{1,3,4\} \in B(M)$;
53:	$Z = \{2,3,4\}$;	$Y = \{1,4\}$;	$z = Z - Y = \{2,3\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,4\} \vee \{1,3,4\}) \in B(M)$;
54:	$Z = \{2,3,4\}$;	$Y = \{1,5\}$;	$z = Z - Y = \{2,3,4\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,5\} \vee \{1,3,5\} \vee$ $\vee \{1,4,5\}) \in B(M)$;

55:	$Z = \{2,3,4\}$;	$Y = \{2,3\}$;	$z = Z - Y = \{4\}$;	$z \cup Y = \{2,3,4\} \in B(M)$;
56:	$Z = \{2,3,4\}$;	$Y = \{2,4\}$;	$z = Z - Y = \{3\}$;	$z \cup Y = \{2,3,4\} \in B(M)$;
57:	$Z = \{2,3,4\}$;	$Y = \{2,5\}$;	$z = Z - Y = \{3,4\}$;	$z \cup Y = (\{2,3,5\} \vee \{2,4,5\}) \in B(M)$;
58:	$Z = \{2,3,4\}$;	$Y = \{3,4\}$;	$z = Z - Y = \{2\}$;	$z \cup Y = \{2,3,4\} \in B(M)$;
59:	$Z = \{2,3,4\}$;	$Y = \{3,5\}$;	$z = Z - Y = \{2,4\}$;	$z \cup Y = \{2,3,5\} \in B(M)$;
60:	$Z = \{2,3,4\}$;	$Y = \{4,5\}$;	$z = Z - Y = \{2,3\}$;	$z \cup Y = \{2,4,5\} \in B(M)$;
61:	$Z = \{2,3,5\}$;	$Y = \{1,2\}$;	$z = Z - Y = \{3,5\}$;	$z \cup Y = \{1,2,5\} \in B(M)$;
62:	$Z = \{2,3,5\}$;	$Y = \{1,3\}$;	$z = Z - Y = \{2,5\}$;	$z \cup Y = \{1,3,5\} \in B(M)$;
63:	$Z = \{2,3,5\}$;	$Y = \{1,4\}$;	$z = Z - Y = \{2,3,5\}$;	$z \cup Y = \{1,2,4\} \vee \{1,3,4\}) \in B(M)$;
64:	$Z = \{2,3,5\}$;	$Y = \{1,5\}$;	$z = Z - Y = \{2,3\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,5\} \vee \{1,3,5\}) \in B(M)$;
65:	$Z = \{2,3,5\}$;	$Y = \{2,3\}$;	$z = Z - Y = \{5\}$;	$z \cup Y = (\{2,3,5\} \in B(M)$;
66:	$Z = \{2,3,5\}$;	$Y = \{2,4\}$;	$z = Z - Y = \{3,5\}$;	$z \cup Y = (\{2,3,4\} \vee \{2,4,5\}) \in B(M)$;
67:	$Z = \{2,3,5\}$;	$Y = \{2,5\}$;	$z = Z - Y = \{3\}$;	$z \cup Y = \{2,3,5\} \in B(M)$;
68:	$Z = \{2,3,5\}$;	$Y = \{3,4\}$;	$z = Z - Y = \{2,5\}$;	$z \cup Y = \{2,3,4\} \in B(M)$;
69:	$Z = \{2,3,5\}$;	$Y = \{3,5\}$;	$z = Z - Y = \{2\}$;	$z \cup Y = \{2,3,5\} \in B(M)$;
70:	$Z = \{2,3,5\}$;	$Y = \{4,5\}$;	$z = Z - Y = \{2,3\}$;	$z \cup Y = \{2,4,5\} \in B(M)$;
71:	$Z = \{2,4,5\}$;	$Y = \{1,2\}$;	$z = Z - Y = \{4,5\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,4\} \vee \{1,2,5\}) \in B(M)$;
72:	$Z = \{2,4,5\}$;	$Y = \{1,3\}$;	$z = Z - Y = \{2,4,5\}$;	$z \cup Y = (\{1,3,4\} \vee \{1,3,5\}) \in B(M)$;
73:	$Z = \{2,4,5\}$;	$Y = \{1,4\}$;	$z = Z - Y = \{2,5\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,4\} \vee \{1,4,5\}) \in B(M)$;
74:	$Z = \{2,4,5\}$;	$Y = \{1,5\}$;	$z = Z - Y = \{2,4\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,5\} \vee \{1,4,5\}) \in B(M)$;
75:	$Z = \{2,4,5\}$;	$Y = \{2,3\}$;	$z = Z - Y = \{4,5\}$;	$z \cup Y = (\{2,3,4\} \vee \{2,3,5\}) \in B(M)$;
76:	$Z = \{2,4,5\}$;	$Y = \{2,4\}$;	$z = Z - Y = \{5\}$;	$z \cup Y = \{2,4,5\} \in B(M)$;
77:	$Z = \{2,4,5\}$;	$Y = \{2,5\}$;	$z = Z - Y = \{4\}$;	$z \cup Y = \{2,4,5\} \in B(M)$;
78:	$Z = \{2,4,5\}$;	$Y = \{3,4\}$;	$z = Z - Y = \{2,5\}$;	$z \cup Y = \{2,3,4\} \in B(M)$;
79:	$Z = \{2,4,5\}$;	$Y = \{3,5\}$;	$z = Z - Y = \{2,4\}$;	$z \cup Y = \{2,3,5\} \in B(M)$;
80:	$Z = \{2,4,5\}$;	$Y = \{4,5\}$;	$z = Z - Y = \{2\}$;	$z \cup Y = \{2,4,5\} \in B(M)$.

Как мы видим, все 80 элементов $z \cup Y$ принадлежат множеству B(M) - баз матроида и удовлетворяют условию (28).

Проверим удовлетворяется условие (28) в случае множества ζ (M) - циклов матроида или нет.

1:	$Z = \{1,2,3\}$;	$Y = \{1,2\}$;	$z = Z - Y = \{3\}$;	$z \cup Y = \{1,2,3\} \in \zeta(M)$;
2:	$Z = \{1,2,3\}$;	$Y = \{1,3\}$;	$z = Z - Y = \{2\}$;	$z \cup Y = \{1,2,3\} \in \zeta(M)$;
3:	$Z = \{1,2,3\}$;	$Y = \{1,4\}$;	$z = Z - Y = \{2,3\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,4\} \vee \{1,3,4\}) \in B(M)$;
4:	$Z = \{1,2,3\}$;	$Y = \{1,5\}$;	$z = Z - Y = \{2,3\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,5\} \vee \{1,3,5\}) \in B(M)$;
5:	$Z = \{1,2,3\}$;	$Y = \{2,3\}$;	$z = Z - Y = \{1\}$;	$z \cup Y = \{1,2,3\} \in \zeta(M)$;
6:	$Z = \{1,2,3\}$;	$Y = \{2,4\}$;	$z = Z - Y = \{1,3\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,3\} \in \zeta(M)) \vee$ $\vee (\{2,3,4\}) \in B(M))$;
7:	$Z = \{1,2,3\}$;	$Y = \{2,5\}$;	$z = Z - Y = \{1,3\}$;	$z \cup Y = (\{1,2,3\} \in \zeta(M)) \vee$ $\vee (\{2,3,5\}) \in B(M))$;
8:	$Z = \{1,2,3\}$;	$Y = \{3,4\}$;	$z = Z - Y = \{1,2\}$;	$z \cup Y = (\{1,3,4\} \vee \{2,3,4\}) \in B(M)$;
9:	$Z = \{1,2,3\}$;	$Y = \{3,5\}$;	$z = Z - Y = \{1,2\}$;	$z \cup Y = (\{1,3,5\} \vee \{1,2,5\}) \in B(M)$;
10:	$Z = \{1,2,3\}$;	$Y = \{4,5\}$;	$z = Z - Y = \{1,2,3\}$;	$z \cup Y = ((\{1,4,5\} \vee \{2,4,5\}) \in$ $\in B(M)) \vee (\{3,4,5\} \in \zeta(M))$;

11: $Z = \{3,4,5\}$; $Y = \{1,2\}$; $z = Z - Y = \{3,4,5\}$; $z \cup Y = ((\{1,2,4\} \vee \{1,2,5\}) \in$
$\in B(M)) \vee (\{1,2,3\} \in \zeta(M))$;
12: $Z = \{3,4,5\}$; $Y = \{1,3\}$; $z = Z - Y = \{4,5\}$; $z \cup Y = (\{1,3,4\} \vee \{1,3,5\}) \in B(M)$;
13: $Z = \{3,4,5\}$; $Y = \{1,4\}$; $z = Z - Y = \{3,5\}$; $z \cup Y = (\{1,3,4\} \vee \{1,4,5\}) \in B(M)$;
14: $Z = \{3,4,5\}$; $Y = \{1,5\}$; $z = Z - Y = \{3,4\}$; $z \cup Y = (\{1,3,5\} \vee \{1,4,5\}) \in B(M)$;
15: $Z = \{3,4,5\}$; $Y = \{2,3\}$; $z = Z - Y = \{4,5\}$; $z \cup Y = (\{2,3,4\} \vee \{2,3,5\}) \in B(M)$;
16: $Z = \{3,4,5\}$; $Y = \{2,4\}$; $z = Z - Y = \{3,5\}$; $z \cup Y = (\{2,3,4\} \vee \{2,4,5\}) \in B(M)$;
17: $Z = \{3,4,5\}$; $Y = \{2,5\}$; $z = Z - Y = \{3,4\}$; $z \cup Y = (\{2,3,4\} \vee \{2,4,5\}) \in B(M)$;
18: $Z = \{3,4,5\}$; $Y = \{3,4\}$; $z = Z - Y = \{5\}$; $z \cup Y = \{3,4,5\} \in \zeta(M)$;
19: $Z = \{3,4,5\}$; $Y = \{3,5\}$; $z = Z - Y = \{4\}$; $z \cup Y = \{3,4,5\} \in \zeta(M)$;
20: $Z = \{3,4,5\}$; $Y = \{4,5\}$; $z = Z - Y = \{3\}$; $z \cup Y = \{3,4,5\} \in \zeta(M)$;

Как мы видим, здесь условие (28) не удовлетворяется.

Пример 10. Для более подробного изучения свойств циклического матроида рассмотрим следующий граф, представленный на рис. 7.

Выделим множество единичных циклов для данного графа:

$c_1 = \{1,2,5\}$, $c_2 = \{1,4,6\}$, $c_3 = \{2,3,7\}$, $c_4 = \{2,4,8\}$,

$c_5 = \{3,4,9\}$, $c_6 = \{7,8,9\}$, $c_7 = \{5,6,8\}$.

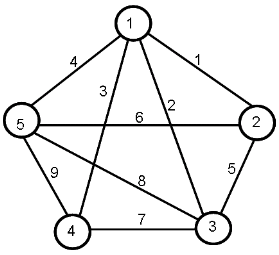

Рис. 7. Граф G

Кроме того, имеется следующая система циклов длиной четыре:

$c_9 = c_1 \oplus c_3 = \{1,2,5\} \oplus \{2,3,7\} = \{1,3,5,7\}$;

$c_{10} = c_3 \oplus c_5 = \{2,3,7\} \oplus \{3,4,9\} = \{2,4,7,9\}$;

$c_{11} = c_1 \oplus c_7 = \{1,2,5\} \oplus \{5,6,8\} = \{1,2,6,8\}$;

$c_{12} = c_2 \oplus c_5 = \{1,4,6\} \oplus \{3,4,9\} = \{1,3,6,9\}$;

$c_{13} = c_2 \oplus c_7 = \{1,4,6\} \oplus \{5,6,8\} = \{1,4,5,8\}$;

$c_{14} = c_3 \oplus c_6 = \{2,3,7\} \oplus \{7,8,9\} = \{2,3,8,9\}$;

$c_{15} = c_4 \oplus c_7 = \{2,4,8\} \oplus \{3,6,8\} = \{2,4,5,6\}$;

$c_{16} = c_6 \oplus c_7 = \{7,8,9\} \oplus \{5,6,8\} = \{5,6,7,9\}$;

$c_{17} = c_5 \oplus c_6 = \{3,4,9\} \oplus \{7,8,9\} = \{3,4,7,8\}$.

Запишем единичные разрезы как однострочные структурные числа:

$x_1 = [1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]$;

$x_2 = [1\ \ \ 5\ \ 6]$;

$x_3 = [2\ \ 5\ \ 7\ \ 8]$;

$x_4 = [3\ \ 7\ \ 9]$;

$x_5 = [4\ \ 6\ \ 8\ \ 9]$.

Произведем умножение первых четырех по правилам умножения структурных чисел

[1 2 3 4] × [1 5 6] =

1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
5	6	1	5	6	1	5	6	1	5	6

[1 2 3 4] × [1 5 6] × [2 5 7 8] =

1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	5	5	6	6	6	6	1	1	1	5	5	6	6	6	1	1	1	1	5	5	6	6	6	6
2	7	8	2	5	7	8	5	7	8	7	8	5	7	8	2	5	7	8	7	8	2	5	7	8

4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	5	5	5	6	6	6	6
2	5	7	8	2	7	8	2	5	7	8

[1 2 3 4] × [1 5 6] × [2 5 7 8] × [3 7 9] =

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	5	5	5	5
7	7	8	8	8	2	2	2	5	5	5	7	7	8	8	8	7	7	8	8	8	7	7	8	8
3	7	3	7	9	3	7	9	3	7	9	3	9	3	7	9	3	9	3	7	9	3	9	3	7

2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	6	6	6	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	5	5	6	6	6	6
8	5	5	5	7	7	8	8	8	2	2	5	5	7	8	8	2	2	7	8	8	2	2	5	5
9	3	7	9	3	9	3	7	9	7	9	7	9	9	7	9	7	9	9	7	9	7	9	7	9

3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
6	6	6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6
7	8	8	2	2	2	5	5	5	7	7	8	8	8	2	2	2	7	7	8	8	8	2	2	2
9	7	9	3	7	9	3	7	9	3	9	3	7	9	3	7	9	3	9	3	7	9	3	7	9

$$\begin{array}{cccccccc|}
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
5 & 5 & 5 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 \\
3 & 7 & 9 & 3 & 9 & 3 & 7 & 9
\end{array}$$

Таким образом, каждая база циклического матроида из множества баз циклического матроида, может быть представлена как элемент структурного числа **T**.

Очевидно также, что множество баз матроида разрезов $B(M^*)$ может быть описано структурным числом $\mathbf{T}^{d}$.

7. Матроид единичных циклов

Для любого связного графа без петель и кратных ребер линейное подпространство квазициклов имеется базис состоящий только из единичных циклов. И тогда можно ввести понятие матроида единичных циклов. Действительно, так как количество единичных циклов в графе G всегда больше или равно

$$Ç^{\tau} \geq m - n + 1 \tag{29}$$

цикломатическому числу графа. И если выбрать базис подпространства циклов состоящий из единичных циклов, то остальные единичные циклы не вошедшие в базис линейного подпространства циклов можно представить в виде линейной комбинации базисных единичных циклов и следовательно менять набор базисных единичных циклов. Причем один базисный набор будет отличаться от другого одним циклом, а это как раз и есть аксиома независимости (28).

Здесь как раз и проявляется связь матроидов с теорией линейной зависимости: аксиомы матроидов выбраны таким образом, чтобы они отражали наиболее характерные свойства независимых множеств линейного пространства, точнее говоря, независимых подмножеств, содержащихся в некотором конечном подмножестве этого пространства (вспомним, что подмножество $\{e_1,\dots,e_n\}$ линейного пространства называется независимым, если не существует набора скаляров $\lambda_1,\dots, \lambda_n$, не всех равных нулю, такого что $\lambda_1 e_1 +\dots+ \lambda_n e_n = 0$). В самом деле, очевидно, что произвольное подмножество независимого множества линейного пространства независимо. Если $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + 1$ для линейно независимых подмножеств **A**, **B** линейного пространства, то **A** порождает пространство размерности $|\mathbf{A}|$, которое может содержать не более чем $|\mathbf{A}|$ элементов множества **B**. Следовательно, существует элемент $e \in B\backslash A$, не принадлежащий этому подпространству. Множество $\mathbf{A} \cup \{e\}$ порождает подпространство размерности $|\mathbf{A}| + 1$ и, следовательно, является линейно независимым.

Пример 11. Покажем, как образуется матроид единичных циклов из множества единичных циклов графа. С этой целью рассмотрим граф, представленный на рис. 7.

Множество единичных циклов для данного графа имеет вид:

$c_1 = \{u_1,u_2,u_5\}$, $c_2 = \{u_1,u_4,u_6\}$, $c_3 = \{u_2,u_3,u_7\}$, $c_4 = \{u_2,u_4,u_8\}$,

$c_5 = \{u_3,u_4,u_9\}$, $c_6 = \{u_7,u_8,u_9\}$, $c_7 = \{u_5,u_6,u_8\}$.

Выделим в данном графе любое дерево предположим $T = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$, тогда множество хорд $H = \{u_5,u_6,u_7,u_8,u_9\}$. Как известно, цикломатическое число графа равно количеству хорд в графе.

Для каждой хорды построим однострочное структурное число характеризующие циклы, проходящие по данной хорде:

u_5: $[c_1\ c_7]$;

u_6: $[c_2\ c_7]$;

u_7: $[c_3\ c_6]$;

u_8: $[c_4\ c_6\ c_7]$;

u_9: $[c_5\ c_6]$.

Для удобства записи циклы будем обозначать их номерами. Конечно, такое обозначение может ввести путаницу, поэтому каждый раз мы будем оговаривать, что мы подразумеваем под номерами - вершины, ребра или циклы.

Перемножим однострочные структурные числа $u_5 \times u_6 \times u_7 \times u_8 \times u_9$ по правилам умножения алгебра структурных чисел

$[c_1\ c_7] \times [c_2\ c_7] \times [c_3\ c_6] \times [c_4\ c_6\ c_7] \times [c_5\ c_6] =$

$$B(C^{\tau}) = \begin{array}{l} u_5: \\ u_6: \\ u_7: \\ u_8: \\ u_9 \end{array} \left| \begin{array}{ccccccccccccccc} c_1 & c_1 & c_1 & c_1 & c_1 & c_1 & c_1 & c_1 & c_1 & c_1 & c_1 & c_7 & c_7 & c_7 & c_7 \\ c_2 & c_2 & c_2 & c_2 & c_2 & c_2 & c_2 & c_7 & c_7 & c_7 & c_7 & c_2 & c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 & c_3 & c_3 & c_6 & c_6 & c_3 & c_3 & c_3 & c_6 & c_3 & c_3 & c_3 & c_6 \\ c_4 & c_4 & c_6 & c_7 & c_7 & c_4 & c_7 & c_4 & c_4 & c_6 & c_4 & c_4 & c_4 & c_6 & c_4 \\ c_5 & c_6 & c_5 & c_5 & c_6 & c_5 & c_5 & c_5 & c_6 & c_5 & c_5 & c_5 & c_6 & c_5 & c_5 \end{array} \right|$$

Или в более привычном для нас виде:

$$= \begin{array}{l} u_5: \\ u_6: \\ u_7: \\ u_8: \\ u_9 \end{array} \left| \begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 7 & 7 & 7 & 7 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 3 & 3 & 3 & 6 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 7 & 4 & 7 & 4 & 4 & 6 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 \end{array} \right|$$

Что касается циклов матроида, то для нашего графа - это набор линейно зависимых единичных циклов

$c_1 \oplus c_2 \oplus c_4 \oplus c_7 = \{u_1,u_2,u_5\} \oplus \{u_1,u_4,u_6\} \oplus \{u_2,u_4,u_8\} \oplus \{u_5,u_6,u_8\} = \varnothing$;

$c_3 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 = \{u_2,u_3,u_7\} \oplus \{u_2,u_4,u_8\} \oplus \{u_3,u_4,u_9\} \oplus \{u_7,u_8,u_9\} = \varnothing$.

Кроме того, существует еще одна линейно зависимая система, состоящая из шести единичных циклов, характерная тем, что для данного элемента структурного числа единичных циклов, обод графа есть единичный цикл

$c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 =$

$= \{u_1,u_2,u_5\} \oplus \{u_1,u_4,u_6\} \oplus \{u_2,u_3,u_7\} \oplus \{u_3,u_4,u_9\} \oplus \{u_7,u_8,u_9\} \oplus \{u_5,u_6,u_8\} = \varnothing$.

Например, это столбцы структурного числа $B(C^{\tau})$ с номерами 3,4,5,7,10,14 не содержащие единичный цикл c_4.

8. Матроид единичных разрезов

Кроме матроида единичных циклов существует матроид единичных разрезов графа. Построение матроида единичных разрезов графа осуществляется простым способом. Здесь каждый элемент структурного числа S характеризует n-1 независимый набор единичных разрезов графа.

Пример 12. В качестве примера рассмотрим граф, представленный на рис.7. Множество единичных разрезов графа

$s_1 = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$, $s_2 = \{u_1,u_5,u_6\}$, $s_3 = \{u_2,u_5,u_7,u_8\}$, $s_4 = \{u_3,u_7,u_9\}$, $s_5 = \{u_3,u_4,u_8,u_9\}$.

Выделим в данном графе любое дерево предположим $T = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$.

Для каждой ветви дерева построим однострочное структурное число характеризующие разрезы, включающие данную ветвь дерева:

u_1: $[s_1\ s_2]$;

u_2: $[s_1\ s_3]$;

u_3: $[s_1\ s_4]$;

u_4: $[s_1\ s_5]$.

Для удобства записи разрезы будем обозначать их номерами. Перемножим однострочные структурные числа $u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4$ по правилам умножения алгебра структурных чисел

$[s_1\ s_2] \times [s_1\ s_3] \times [s_1\ s_4] \times [s_1\ s_5] =$

$$B(S) = \begin{array}{l} u_1: \\ u_2: \\ u_3: \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_2 & s_2 & s_2 \\ s_3 & s_1 & s_3 & s_3 & s_3 \\ s_4 & s_4 & s_1 & s_4 & s_4 \end{array} \right| \text{ Или в виде номеров единичных разрезов: } \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right|$$

u_4: $\begin{vmatrix} s_5 & s_5 & s_5 & s_1 & s_5 \end{vmatrix}$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

9. Жадный алгоритм решения оптимизационных задач

Рассмотрим следующую матрицу с действительными неотрицательными коэффициентами:

$$\mathbf{A}= \begin{array}{c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 7 & 5 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Займемся решением следующей оптимизационной задачи.

Пример 13. Найти такое подмножество элементов матрицы, что

(а) в каждом столбце и в каждой строке находятся не более одного выбранного элемента

(б) сумма выбранных элементов является наибольшей из возможных.

Попробуем решить эту задачу следующим образом: будем выбирать элементы последовательно, причем каждый раз будем выбирать наибольший из элементов, которые мы можем добавить, не нарушая условия (а). Будем действовать так вплоть до момента, пока добавление произвольного элемента не нарушит условия (а). Алгоритм такого типа мы будем называть *жадным*.

Для примера 12 и матрицы **A** жадный алгоритм находит подмножество

$$A= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \underline{\mathbf{7}} & 5 & 1 \\ \hline 3 & \underline{\mathbf{4}} & 3 \\ \hline 2 & 3 & \underline{\mathbf{1}} \\ \hline \end{array}$$

с суммой 12, что не является правильным решением, поскольку подмножество

$$A= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \underline{\mathbf{7}} & 5 & 1 \\ \hline 3 & 4 & \underline{\mathbf{3}} \\ \hline 2 & \underline{\mathbf{3}} & 1 \\ \hline \end{array}$$

имеет сумму 13. Следовательно, на втором шаге не следовало бы быть жадным, мы выигрываем в конечном результате, выбирая несколько меньший элемент (3 вместо 4).

Возникает вопрос: когда выгодно быть жадным, а когда нет?

Мы будем рассматривать оптимизационные задачи следующего типа.

Даны конечное множество E, семейство его подмножеств $J \subseteq \wp(E)$ и функция $w : E \to R+$, где R+ обозначает множество вещественных неотрицательных чисел. Найти подмножество S $\in$ J с наибольшей суммой $\sum_{e \in S} w(e)$.

В нашем случае *E* есть множество позиций матрицы, а *w* ставит в соответствие позиции (i,j) матрицы $[a_{ij}]$ число a_{ij}, $S \in J \Leftrightarrow$ каждый столбец и каждая строка содержит не более одной позиции из множества S.

Теперь мы можем сформулировать наш вопрос следующим образом, при каких условиях относительно семейства J жадный алгоритм правильно решает задачу для произвольной функции *w*?

Оказывается, что на этот вопрос можно найти простой ответ. А именно, достаточно, чтобы пара (*E,* J) образовывала так называемый матроид.

Теорема 3. (Радо, Эдмондс, см. [8] и [10]). Если $M = <E, J>$ есть матроид, то множество S, найденное жадным алгоритмом, является независимым множеством с наибольшим весом. Напротив, если $M = <E, J>$ не является матроидом, то существует такая функция $w : E \to R+$, что S не будет независимым множеством с наибольшим весом.

Отметим также, что при обращении упорядочения элементов жадный алгоритм выберет множество *S*, которое не только имеет наименьший вес, но и *i*-й по величине элемент (считая от наименьшего) будет не больше *i*-го по величине элемента произвольной базы.

Теперь мы можем посмотреть на работу жадного алгоритма на примере 2.13 с позиций алгебры структурных чисел.

Запишем индексы каждой строки матрицы **A** как однострочное структурное число и произведем их умножение по правилам алгебры структурных чисел, получим следующее структурное число 3-го порядка, где в нижней строке проставлена сумма соответствующих элементов матрицы A.

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A} = & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \Sigma & \begin{matrix} 12 & 13 & 9 & 10 & 7 & 7 \end{matrix} \end{array}$$

Первый элемент структурного числа имеет сумму 12. Поменяем местами 2-ую и 3-ью строки матрицы A,

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

структурное число не изменится. Но здесь первый элемент структурного числа уже имеет сумму 13.

$$\begin{array}{rc} \mathbf{A} = & \left|\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right| \\ \Sigma & \begin{array}{cccccc} 13 & 12 & 10 & 9 & 7 & 7 \end{array} \end{array}$$

Во всех других случаях оптимизации мы получим оценку сложности алгоритма в виде многочлена относительно размерности задачи, что отнюдь не является типичной ситуацией для оптимизационных задач. В большой степени эффективность жадных алгоритмов вызывается тем, что элемент, один раз, включенный в оптимальное решение, остается в нем до конца. Здесь не бывает «проверки всех возможностей» и выбора последовательности включения элементов, характерной для алгоритмов с возвратом, что обычно приводит к экспоненциальному росту числа шагов при росте размерности задачи.

10. Матроид трансверсалей

Применим методы алгебры структурных чисел для описания матроида трансверсалей. Рассмотрим следующий пример.

Пример 14. Сформировать множество баз матроида трансверсалей для двудольного графа, представленного на рис. 8.

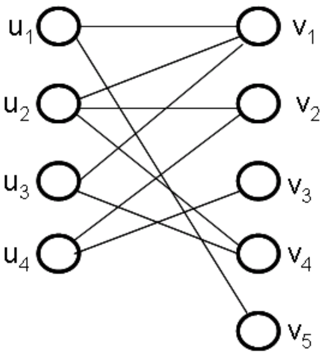

Рис. 8. Двудольный граф.

Запишем однострочные структурные числа, характеризующие единичные разрезы графа

$u_1 = [v_1\ v_5]$; $u_2 = [v_1\ v_2\ v_4]$; $u_3 = [v_1\ v_4]$; $u_4 = [v_2\ v_3]$.

Перемножим однострочные структурные числа $u_1{\times}u_2{\times}u_3{\times}u_4$ по правилам умножения алгебра структурных чисел:

$$[v_1\ v_5] \times [v_1\ v_2\ v_4] \quad = \quad \begin{array}{r} u_1: \\ u_2: \end{array} \left|\begin{array}{ccccc} v_1 & v_1 & v_5 & v_5 & v_5 \\ v_2 & v_4 & v_1 & v_2 & v_4 \end{array}\right|$$

$$[v_1\ v_5] \times [v_1\ v_2\ v_4] \times [v_1\ v_4] = \begin{array}{r} u_1: \\ u_2: \end{array} \left|\begin{array}{ccccc} v_1 & v_5 & v_5 & v_5 & v_5 \\ v_2 & v_1 & v_2 & v_2 & v_4 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{r|ccccc|} u_3: & v_4 & v_4 & v_1 & v_4 & v_1 \end{array}$$

$$[v_1\ v_5]\times[v_1\ v_2\ v_4]\times[v_1\ v_4]\times[v_2\ v_3] = \begin{array}{r|ccccccc|} u_1: & v_1 & v_5 & v_5 & v_5 & v_5 & v_5 & v_5 \\ u_2: & v_2 & v_1 & v_1 & v_2 & v_2 & v_4 & v_4 \\ u_3: & v_4 & v_4 & v_4 & v_1 & v_4 & v_1 & v_1 \\ u_4: & v_3 & v_2 & v_3 & v_3 & v_3 & v_2 & v_3 \end{array}$$

На рис. 9 представлено все элементы множества баз матроида трансверсалей для нашего примера (трансверсали выделены жирными линиями).

Таким образом, множество баз матроида трансверсалей B(M) может быть описано структурным числом.

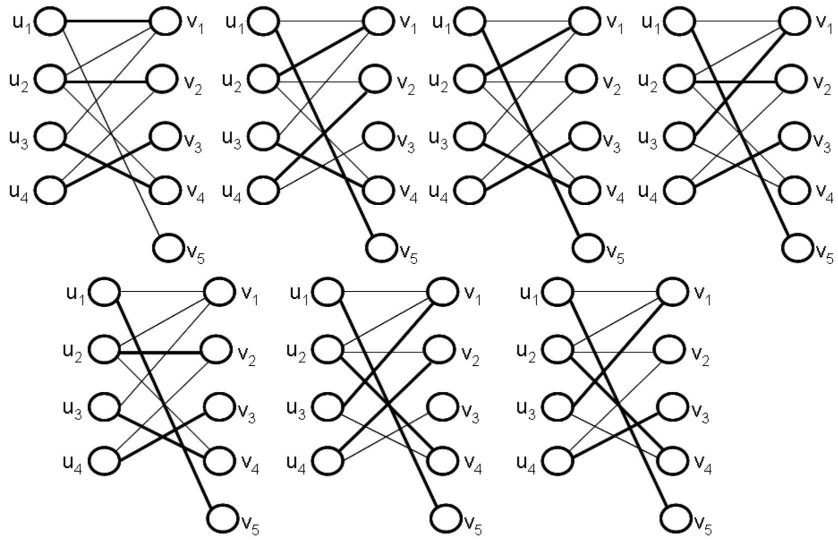

Рис. 9. Множество трансверсалей

Пример 15. Пусть задан граф G(X,U;P) с заданными весами ребер записанными в круглых скобках (см. рис. 10). Будем искать дерево с минимальной суммой его весов.

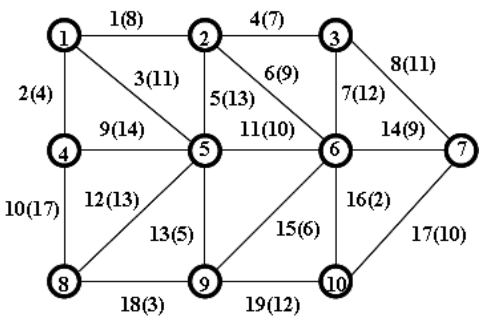

Рис. 10. Граф G с заданными весами ребер

Запишем однострочные структурные числа, характеризующие единичные разрезы в виде списка ребер упорядоченного по неубыванию весов.

s_1 = [2(4) 1(8) 3(11)];

s_2 = [4(7) 1(8) 6(9) 5(13)];

s_3 = [4(7) 8(11) 7(12)];

s_4 = [2(4) 9(14) 10(17)];

s_5 = [13(5) 11(10) 3(11) 5(13) 12(13) 9(14)];

s_6 = [16(2) 15(6) 6(9) 14(9) 11(10) 7(12)];

s_7 = [14(9) 17(10) 8(11)];

s_8 = [18(3) 12(13) 10(17)];

s_9 = [18(3) 13(5) 15(6) 19(12)];

s_{10} = [16(2) 17(10) 19(12)].

Шаг 1: На первых местах стоят четыре пары ребер, это ребро u_2 в разрезах s_1 и s_4, это ребро u_4 в разрезах s_2 и s_3, это ребро u_{16} в разрезах s_6 и s_{10}, это ребро u_{18} в разрезах s_8 и s_9. Ребро u_2 и вершины x_1 и x_4 образуют блок Б$_1$. Ребро u_4 и вершины x_2 и x_3 образуют блок Б$_2$. Ребро u_{16} и вершины x_6 и x_{10} образуют блок Б$_3$. Ребро u_{18} и вершины x_8 и x_9 образуют блок Б$_4$. Теперь одно-строчные структурные числа характеризуют не только единичные разрезы, но и вершинные разрезы (см. рис.11).

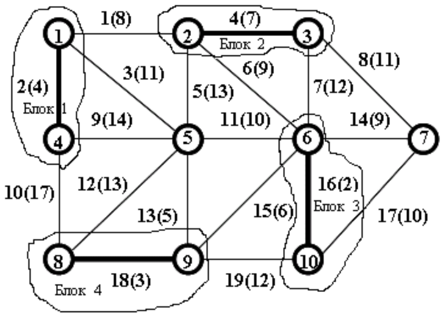

Рис. 11. Блоки графа G с минимальными весами ребер

Б$_1$ = [1(8) 3(11) 9(14) 10(17)];

Б$_2$ = [1(8) 6(9) 8(11) 7(12) 5(13)];

Б$_3$ = [15(6) 6(9) 14(9) 11(10) 17(10) 7(12) 19(12];

Б$_4$ = [13(5) 15(6) 19(12) 12(13) 10(17)];

s_5 = [13(5) 11(10) 3(11) 5(13) 12(13) 9(14)];

s_7 = [14(9) 17(10) 8(11)].

Шаг 2: Вершины x_5 и x_7 оказались не включенные в блоки. Ребро u_{13} с минимальным весом 5 принадлежащее разрезу s_5, соединено с блоком Б$_4$, поэтому оно включается в новый блок Б$_4$. Ребро u_{14} с минимальным весом 9 принадлежащее разрезу s_7,соединено с блоком Б$_3$, поэтому оно включается в новый блок Б$_3$. Формируется новая запись однострочных структурных чисел

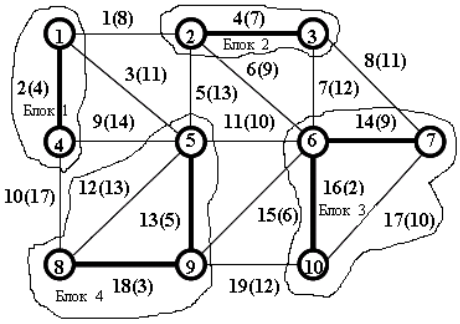

Рис. 12. Новые блоки графа G с минимальными весами ребер

$Б_1$ = [1(8) 3(11) 9(14) 10(17)];

$Б_2$ = [1(8) 6(9) 8(11) 7(12) 5(13)];

$Б_3$ = [15(6) 11(10) 3(11) 19(12) 5(13) 9(14) 10(17)];

$Б_4$ = [15(6) 6(9) 11(10) 8(11) 7(12) 19(12].

Шаг 3: Ребро u_1 с минимальным весом 8 принадлежит блоку $Б_1$ и блоку $Б_2$, соединяем их в один новый блок $Б_{1,2}$. Ребро u_{15} с минимальным весом 6 принадлежит блоку $Б_3$ и блоку $Б_4$, соединяем их в один новый блок $Б_{3,4}$. Формируется новая запись однострочных структурных чисел

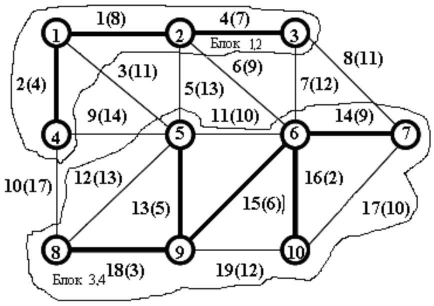

Рис. 13. Блоки графа G с минимальными весами ребер

$Б_{1,2}$ = [6(9) 3(11) 8(11) 7(12) 5(13) 9(14) 10(17)];

$Б_{3,4}$ = [6(9) 3(11) 8(11) 7(12) 5(13) 9(14) 10(17)].

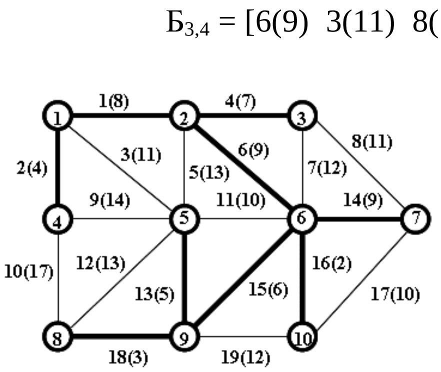

Рис. 14. Дерево графа G с минимальным суммарным весом ребер

Шаг 4: И наконец происходит объединение блоков $Б_{1,2}$ и $Б_{3,4}$ по ребру u_6. В результате получено дерево T = {1,2,4,6,13,14,15,16,18] с минимальным суммарным весом

$= 8 + 4 + 7 + 9 + 5 + 9 + 6 + 2 + 3 = 53$

Анализируя сказанное, можно сделать следующий вывод:

а) жадный алгоритм рассматривает только первые элементы однострочных структурных чисел, не производя их умножения;

б) неугодные элементы (то есть элементы стоящие не на первых местах) автоматически и последовательно исключаются из рассмотрения.

Например, в алгоритме Краскала [1] для примера 15, ребра 12(13) и 17(10) на шаге 2, ребро 11(10) и 19(12) на шаге 3, и ребра 3(11), 5(13), 7(12),8(11),9(14),10(17) на шаге 4.

11. Алгоритм «бегущая строка»

Поставим следующий вопрос: возможно ли, получить все множество баз матроида, не производя умножение структурных чисел. Рассмотрим следующий алгоритм типа «бегущая строка».

Пример 16. Предположим, что нам нужно выделить все базы матроида единичных циклов для графа представленного на рис. 7 (см. пример 10).

Множество единичных циклов для данного графа:

$c_1 = \{1,2,5\}$, $c_2 = \{1,4,6\}$, $c_3 = \{2,3,7\}$, $c_4 = \{2,4,8\}$,

$c_5 = \{3,4,9\}$, $c_6 = \{7,8,9\}$, $c_7 = \{5,6,8\}$.

В примере 10 мы рассмотрели умножение однострочных структурных чисел $u_5 \times u_6 \times u_7 \times u_8 \times u_9$ по правилам умножения алгебра структурных чисел и нашли структурное число $C = [c_1\ c_7] \times [c_2\ c_7] \times [c_3\ c_6] \times [c_4\ c_6\ c_7] \times [c_5\ c_6]$. Рассмотрим иной метод вычисления структурного числа C. Для этой цели воспользуемся способом, который мы применяли, скрыто и ранее под названием «бегущая строка».

Номера столбцов	1	2	3	4	5
Количество номеров циклов в однострочном структурном числе	2	2	2	3	2

Номера циклов в элементе структурного числа

Первоначальное положение счетчика, характерно тем, что присутствуют только первые номера в однострочных структурных числах

1	1	1	1	1	→	1	2	3	4	5	**Запись**
				+1							

В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку

Новая запись счетчика

1	1	1	1	2	→	1	2	3	4	6	**Запись**
				+1							

В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку

Новая запись счетчика

1	1	1	1	3

В 5-ой ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 5-ом однострочном структурном числе, +1 в 4-ую ячейку и все последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

1	1	1	2	1	→	1	2	3	6	5	**Запись**

В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку

+1

Новая запись счетчика

1	1	1	2	2	→	1	2	3	6	**6**

В записи есть повторяющиеся элементы, в ячейку счетчика соответствующую последнему повторяющемуся элементу +1

+1

Новая запись счетчика

1	1	1	2	3

В 5-ой ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 5-ом однострочном структурном числе, +1 в 4-ую ячейку и все последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

1	1	1	3	1	→	1	2	3	7	5	**Запись**

В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку

+1

Новая запись счетчика

1	1	1	3	2	→	1	2	3	7	6	**Запись**

В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку

+1

Новая запись счетчика

1	1	1	3	3

В 5-ой ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 5-ом однострочном структурном числе, +1 в 4-ую ячейку и все последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

1	1	1	4	1

В 4-ой ячейки счетчика число 4 больше чем количество элементов в 4-ом однострочном структурном числе, +1 в 3-ью ячейку и все последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

1	1	2	1	1	→	1	2	6	4	5	**Запись**

В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку

+1

Новая запись счетчика

1	1	2	1	2	→	1	2	6	4	**6**

В записи есть повторяющиеся элементы, в ячейку счетчика соответствующую последнему повторяющемуся элементу +1

+1

Новая запись счетчика

1	1	2	1	3

В 5-ой ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 5-ом однострочном структурном числе, +1 в 4-ую ячейку и все последующие = 1

+1

Новая запись счетчика	1	1	2	2	1	→	1	2	6	**6**		
В записи есть повторяющиеся элементы, в ячейку счетчика соответствующую последнему повторяющемуся элементу +1				**+1**								
Новая запись счетчика	1	1	2	3	1	→	1	2	6	7	5	**Запись**
В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку					**+1**							
Новая запись счетчика	1	1	2	3	2	→	1	2	6	7	**6**	
В записи есть повторяющиеся элементы, в ячейку счетчика соответствующую последнему повторяющемуся элементу +1					**+1**							
Новая запись счетчика	1	1	2	3	3							
В 5-ой ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 5-ом однострочном структурном числе, +1 в 4-ую ячейку и все последующие = 1				**+1**								
Новая запись счетчика	1	1	2	4	1							
В 4-ой ячейки счетчика число 4 больше чем количество элементов в 4-ом однострочном структурном числе, +1 в 3-ью ячейку и все последующие = 1			**+1**									
Новая запись счетчика	1	1	3	1	1							
В 3-ей ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 3-ем однострочном структурном числе, +1 в 2-ую ячейку и все последующие = 1		**+1**										
Новая запись счетчика	1	2	1	1	1	→	1	7	3	4	5	**Запись**
В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку					**+1**							
Новая запись счетчика	1	2	1	1	2	→	1	7	3	4	6	**Запись**
В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку					**+1**							
Новая запись счетчика	1	2	1	1	3							
В 5-ой ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 5-ом однострочном структурном числе, +1 в 4-ую ячейку и все последующие = 1				**+1**								
Новая запись счетчика	1	2	1	2	1	→	1	7	3	6	5	**Запись**
В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку					**+1**							
Новая запись счетчика	1	2	1	2	2	→	1	7	3	6	**6**	

В записи есть повторяющиеся элементы, в ячейку счетчика соответствующую последнему повторяющемуся элементу +1

Новая запись счетчика

				+1
1	2	1	2	3

В 5-ой ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 5-ом однострочном структурном числе, +1 в 4-ую ячейку и все последующие = 1

Новая запись счетчика

			+1							
1	2	1	3	1	→	1	7	3	**7**	

В записи есть повторяющиеся элементы, в ячейку счетчика соответствующую последнему повторяющемуся элементу +1

Новая запись счетчика

			+1	
1	2	1	4	1

В 4-ой ячейки счетчика число 4 больше чем количество элементов в 4-ом однострочном структурном числе, +1 в 3-ью ячейку и все последующие = 1

Новая запись счетчика

		+1									
1	2	2	1	1	→	1	7	6	4	5	**Запись**

В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку

Новая запись счетчика

				+1						
1	2	2	1	2	→	1	7	6	4	**6**

В записи есть повторяющиеся элементы, в ячейку счетчика соответствующую последнему повторяющемуся элементу +1

Новая запись счетчика

				+1
1	2	2	1	3

В 5-ой ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 5-ом однострочном структурном числе, +1 в 4-ую ячейку и все последующие = 1

Новая запись счетчика

			+1							
1	2	2	2	1	→	1	7	6	**6**	

В записи есть повторяющиеся элементы, в ячейку счетчика соответствующую последнему повторяющемуся элементу +1 и последующие = 1

Новая запись счетчика

			+1							
1	2	2	3	1	→	1	7	6	**7**	

В записи есть повторяющиеся элементы, в ячейку счетчика соответствующую последнему повторяющемуся элементу +1 и последующие = 1

Новая запись счетчика

			+1	
1	2	2	4	1

В 4-ой ячейки счетчика число 4 больше чем количество элементов в 4-ом однострочном структурном числе, +1 в 3-ью ячейку и все последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

1	2	3	1	1

В 3-ей ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 3-ом однострочном структурном числе, +1 в 2-ую ячейку и все последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

1	3	1	1	1

Во 2-ой ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 2-ом однострочном структурном числе, +1 в 1-ую ячейку и все последующие = 1

Новая запись счетчика

2	1	1	1	1	→	7	2	3	4	5	**Запись**

В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку

+1

Новая запись счетчика

2	1	1	1	2	→	7	2	3	4	6	**Запись**

В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку

+1

Новая запись счетчика

2	1	1	1	3

В 5-ой ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 5-ом однострочном структурном числе, +1 в 4-ую ячейку и все последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

2	1	1	2	1	→	7	2	3	6	5	**Запись**

В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку

+1

Новая запись счетчика

2	1	1	2	2	→	7	2	3	6	**<u>6</u>**

В записи есть повторяющиеся элементы, в ячейку счетчика соответствующую последнему повторяющемуся элементу +1

+1

Новая запись счетчика

2	1	1	2	3

В 5-ой ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 5-ом однострочном структурном числе, +1 в 4-ую ячейку и все последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

2	1	1	3	1	→	7	2	3	**<u>7</u>**	

В записи есть повторяющиеся элементы, в ячейку счетчика соответствующую последнему повторяющемуся элементу +1 и последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

2	1	1	4	1

В 4-ой ячейки счетчика число 4 больше чем количество элементов в 4-ом однострочном структурном числе, +1 в 3-ью ячейку и все последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

2	1	2	1	1	→	7	2	6	4	5	**Запись**

В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку

+1

Новая запись счетчика

2	1	2	1	2	→	7	2	6	4	6	**Запись**

В записи нет повторяющихся номеров +1 в последнюю ячейку

+1

Новая запись счетчика

2	1	2	1	3

В 5-ой ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 5-ом однострочном структурном числе, +1 в 4-ую ячейку и все последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

2	1	2	2	1	→	7	2	6	**6**	

В записи есть повторяющиеся элементы, в ячейку счетчика соответствующую последнему повторяющемуся элементу +1 и последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

2	1	2	3	1	→	7	2	6	**7**	

В записи есть повторяющиеся элементы, в ячейку счетчика соответствующую последнему повторяющемуся элементу +1 и последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

2	1	2	4	1

В 4-ой ячейки счетчика число 4 больше чем количество элементов в 4-ом однострочном структурном числе, +1 в 3-ью ячейку и все последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

2	1	3	1	1

В 3-ей ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 3-ом однострочном структурном числе, +1 в 2-ую ячейку и все последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

2	2	1	1	1	→	7	**7**			

В записи есть повторяющиеся элементы, в ячейку счетчика соответствующую последнему повторяющемуся элементу +1 и последующие = 1

+1

Новая запись счетчика

2	3	1	1	1

В 2-ой ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 2-ом однострочном структурном числе, +1 в 1-ую ячейку и все последующие = 1	**+1**
Новая запись счетчика	3 1 1 1 1
В 1-ой ячейки счетчика число 3 больше чем количество элементов в 1-ом однострочном структурном числе. Конец работы алгоритма.	

Записи в этом методе представляют собой элементы структурного числа С. Уникальным свойством этого алгоритма, является возможность нахождения только одного структурного элемента из множества, а именно первого столбца.

Будем называть элемент структурного числа *первым*, если он характеризуется минимальным набором номеров в соответствующих однострочных структурных числах расположенных в определенном порядке. Например, в нашем примере первый структурный элемент – это элемент структурного числа:

u_5:	1	номер записи в однострочном структурном числе	1;
u_6:	2	номер записи в однострочном структурном числе	1;
u_7:	3	номер записи в однострочном структурном числе	1;
u_8:	4	номер записи в однострочном структурном числе	1;
u_9	5	номер записи в однострочном структурном числе	1.

Вернемся, к примеру 7. Алгоритм Краскала располагает однострочные структурные числа в определенном порядке. На шаге 1 соответственно, выбранные элементы выделены:

s_1 = [**2(4)** 1(8) 3(11)];

s_3 = [**4(7)** 8(11) 7(12)];

s_{10} = [**16(2)** 17(10) 19(12)];

s_8 = [**18(3)** 12(13) 10(17)];

На шаге 2 добавляются единичные разрезы s_5 и s_7

s_5 = [**13(5)** 11(10) 3(11) 5(13) 12(13) 9(14)];

s_7 = [**14(9)** 17(10) 8(11)];

На шаге 3 добавляются единичные разрезы s_2 и s_9

s_2 = [4(7) **1(8)** 6(9) 5(13)];

s_9 = [18(3) 13(5) **15(6)** 19(12)];

И наконец, на последнем 4-ом шаге добавляется разрез s_6.

s_6 = [16(2) 15(6) **6(9)** 14(9) 11(10) 7(12)];

Как видно из приведенного, по возможности выделяются элементы в однострочных структурных числах стоящие на первых местах как имеющие минимальный вес ребер, шаг 1 и шаг 2. Однако, для разреза s_2 выбирается второй элемент 1(8), так как первый элемент уже включен в ветви дерева. Для разреза s_9 выбирается третий элемент, так как первые два имеющие меньший вес ребер уже выделены в ветви дерева. Процесс заканчивается включением в ветви дерева ребра 6(9) принадлежащего разрезу s_6. Можно также заметить, что однострочные структурные числа следует располагать в определенной последовательности, таким образом, чтобы быстрее получить первый элемент структурного числа. Это как раз с успехом и осуществляет алгоритм Краскала.

12. Задача о назначении. Венгерский алгоритм

Рассмотрим применение методов алгебры структурных чисел для решения задачи о назначении на следующем примере.

Пример 17. Рассмотрим задачу о назначении, представленную следующей матрицей стоимости [00]:

	1	2	3	4	5
1	7	2	1	9	4
2	9	6	9	5	5
3	3	8	3	1	8
4	7	9	4	2	2
5	8	4	7	4	8

Необходимо выбрать элементы матрицы так чтобы их сумма была минимальной, и при этом из каждой строки и столбца был выбран только один элемент.

Запишем однострочные структурные числа для каждой строки матрицы, расположив номера столбцов с их весами в порядке не убывания весов:

1: [3(1) 2(2) 5(4) 1(7) 4(9)];
2: [4(5) 5(5) 2(6) 1(9) 3(9)];
3: [4(1) 1(3) 3(3) 2(8) 5(8)];
4: [4(2) 5(2) 3(4) 1(7) 2(9)];
5: [2(4) 4(4) 3(7) 1(8) 5(8)].

Расставим однострочные структурные числа в последовательности не убывания весов в каждом однострочном структурном числе:

1: [3(1) 2(2) 5(4) 1(7) 4(9)];
3: [4(1) 1(3) 3(3) 2(8) 5(8)];
4: [4(2) 5(2) 3(4) 1(7) 2(9)];

5:	[2(4)	4(4)	3(7)	1(8)	5(8)];
2:	[4(5)	5(5)	2(6)	1(9)	3(9)].

Алгоритмом «бегущая строка» выделим первый элемент структурного числа.

1:	[**3(1)**	2(2)	5(4)	1(7)	4(9)];
3:	[**4(1)**	1(3)	3(3)	2(8)	5(8)];
4:	[4(2)	**5(2)**	3(4)	1(7)	2(9)];
5:	[**2(4)**	4(4)	3(7)	1(8)	5(8)];
2:	[4(5)	5(5)	2(6)	**1(9)**	3(9)].

Сумма весов выбранных элементов равна 17. Выбираем в данном элементе структурного числа элемент матрицы с максимальным весом, это 1(9) во 2-ой строке и удаляем его из рассмотрения. Алгоритмом «бегущая строка» выделим первый элемент структурного числа.

1:	[**3(1)**	2(2)	5(4)	1(7)	4(9)];
3:	[**4(1)**	1(3)	3(3)	2(8)	5(8)];
4:	[4(2)	**5(2)**	3(4)	1(7)	2(9)];
5:	[2(4)	4(4)	3(7)	**1(8)**	5(8)];
2:	[4(5)	5(5)	**2(6)**	3(9)	].

Сумма весов выбранных элементов равна 18. Выбираем в данном элементе структурного числа элемент матрицы с максимальным весом, это 1(8) в 5-ой строке и удаляем его из рассмотрения. Алгоритмом «бегущая строка» выделим первый элемент структурного числа.

1:	[**3(1)**	2(2)	5(4)	1(7)	4(9)];
3:	[**4(1)**	1(3)	3(3)	2(8)	5(8)];
4:	[4(2)	5(2)	3(4)	**1(7)**	2(9)];
5:	[**2(4)**	4(4)	3(7)	5(8)	];
2:	[4(5)	**5(5)**	2(6)	3(9)	].

Сумма весов выбранных элементов снова равна 18. Выбираем в данном элементе структурного числа элемент матрицы с максимальным весом, это 1(7) в 4-ой строке и удаляем его из рассмотрения. Алгоритмом «бегущая строка» выделим первый элемент структурного числа.

1:	[**3(1)**	2(2)	5(4)	1(7)	4(9)];
3:	[4(1)	**1(3)**	3(3)	2(8)	5(8)];
4:	[**4(2)**	5(2)	3(4)	2(9)	];
5:	[**2(4)**	4(4)	3(7)	5(8)	];
2:	[4(5)	**5(5)**	2(6)	3(9)	].

Сумма весов выбранных элементов равна 15. Выбираем в данном элементе структурного числа элемент матрицы с максимальным весом, это 5(5) во 2-ой строке и удаляем его из рассмотрения. Алгоритмом «бегущая строка» выделим первый элемент структурного числа:

1:	[**3(1)**	2(2)	5(4)	1(7)	4(9)];
3:	[4(1)	**1(3)**	3(3)	2(8)	5(8)];
4:	[4(2)	**5(2)**	3(4)	2(9)	];
5:	[**2(4)**	4(4)	3(7)	5(8)	];
2:	[**4(5)**	2(6)	3(9)	].	

Сумма весов выбранных элементов равна 15. Выбираем в данном элементе структурного числа элемент матрицы с максимальным весом, это 4(5) во 2-ой строке и удаляем его из рассмотрения. Алгоритмом «бегущая строка» выделим первый элемент структурного числа:

1:	[**3(1)**	2(2)	5(4)	1(7)	4(9)];
3:	[4(1)	**1(3)**	3(3)	2(8)	5(8)];
4:	[4(2)	**5(2)**	3(4)	2(9)	];
5:	[2(4)	**4(4)**	3(7)	5(8)	];
2:	[**2(6)**	3(9)	].		

Сумма весов выбранных элементов равна 16. Приостанавливаем работу алгоритма, так как дальнейший поиск приведет только к увеличению суммы весов. Модифицируем данный подход, после выбора первого элемента структурного числа в первый раз и определения элемент матрицы с максимальным весом, это 1(9) во 2-ой строке:

1:	[**3(1)**	2(2)	5(4)	1(7)	4(9)];
3:	[**4(1)**	1(3)	3(3)	2(8)	5(8)];
4:	[4(2)	**5(2)**	3(4)	1(7)	2(9)];
5:	[**2(4)**	4(4)	3(7)	1(8)	5(8)];
2:	[4(5)	5(5)	2(6)	**1(9)**	3(9)].

Удалим все элементы матрицы, имеющие вес 9 из рассмотрения. Алгоритмом «бегущая строка» выделим первый элемент структурного числа:

1:	[	2(2)	5(4)	1(7)	];
3:	[	1(3)	3(3)	2(8)	5(8)];
4:	[	**5(2)**	3(4)	1(7)	];
5:	[	4(4)	3(7)	**1(8)**	5(8)];
2:	[	5(5)	**2(6)**	].	

Сумма весов выбранных элементов равна 18. Выбираем в данном элементе структурного числа элемент матрицы с максимальным весом, это 1(8) в 5-ой строке и удаляем все элементы матрицы имеющие вес равный 8 из рассмотрения. Алгоритмом «бегущая строка» выделим первый элемент структурного числа.

1: [**3(1)** 2(2) 5(4) 1(7)];

3: [**4(1)** 1(3) 3(3)];

4: [4(2) 5(2) 3(4) **1(7)**];

5: [**2(4)** 4(4) 3(7)];

2: [4(5) **5(5)** 2(6)].

Сумма весов выбранных элементов равна 18. Выбираем в данном элементе структурного числа элемент матрицы с максимальным весом, это 1(7) в 4-ой строке и удаляем все элементы матрицы имеющие вес равный 7 из рассмотрения. Алгоритмом «бегущая строка» выделим первый элемент структурного числа.

1: [**3(1)** 2(2) 5(4)];

3: [4(1) **1(3)** 3(3)];

4: [**4(2)** 5(2) 3(4)];

5: [**2(4)** 4(4)];

2: [4(5) **5(5)** 2(6)].

Сумма весов выбранных элементов равна 15. Если теперь удалить из рассмотрения все элементы матрицы с весом 5 и выше, то 2-ая строка будет пустой.

Можно произвести и следующую модификацию метода. В исходной матрице выделить все минимальные элементы по столбцам, а затем по строкам:

	1	2	3	4	5
1	7	**2**	**1**	9	4
2	9	6	9	**5**	**5**
3	**3**	8	3	**1**	8
4	7	9	4	**2**	**2**
5	8	**4**	7	**4**	8

Построим однострочные структурные числа из выбранных элементов матрицы, и выберем элементы структурного числа с минимальным весом алгоритмом «бегущая строка». Если паросочетания не произойдет, то будем добавлять другие минимальные элементы до образования паросочетания.

1: [3(1) 2(2)];

3: [4(1) 1(3)];

4: [4(2) 5(2)];

5: [2(4) 4(4)];

2: [4(5) 5(5)].

В данном случае это всего два элемента структурного числа с суммарным весом равным 15 (см. рис. 15):

1:	3(1)	3(1)
3:	1(3)	1(3)
4:	4(2)	5(2)
5:	2(4)	2(4)
2:	5(5)	4(5)

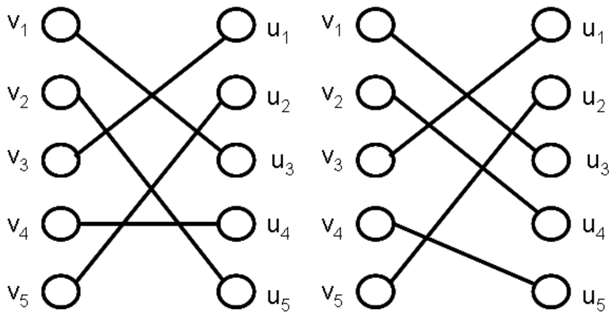

Рис. 15. Трасверсали для двух элементов структурного числа с минимальным весом

Мы рассмотрели с вами подход основанный на попытке просмотра всего множества трансверсалей как бы сверху, отсекая элементы приводящие к увеличению суммарного веса.

Рассмотрим венгерский алгоритм, который подробно описан в литературе [10], оттуда взят и пример. Основная идея этого метода заключена в том, что паросочетания строятся как бы снизу, рассматривая только перспективные проекты.

Выберем в каждом столбце нашей матрицы минимальный элемент и пометим его. Это соответствует следующему варианту паросочетаний (см. рис.16)

7	**2**	**1**	9	4
9	6	9	5	5
3	8	3	**1**	8
7	9	4	2	**2**
8	4	7	4	8

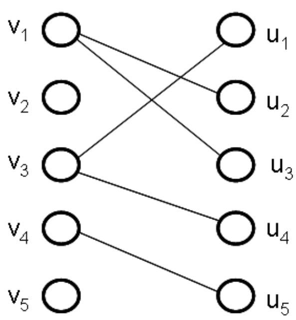

Рис. 16. Вариант паросочетания

Произведем выборку выбранных элементов матрицы так чтобы, начиная с первого столбца выбранные элементы, находились в столбцах и в строках только по одному разу. Это соответствует следующему варианту паросочетаний и выбору трасверсалей (см. рис.17)

7	**2**	**1**	9	4
9	6	9	5	5
3	8	3	**1**	8
7	9	4	2	**2**
8	4	7	4	8

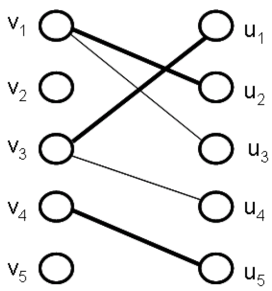

Рис. 17. Выбор трансверсалей

Строим вектор невязки и вектор соседней вершины, рассчитывая параметры α и β для строк и столбцов

		3	2	1	1	2	β
	0	7	**2**	**1**	9	4	
*	0	9	6	9	5	5	
	0	**3**	8	3	**1**	8	
	0	7	9	4	2	**2**	
*	0	8	4	7	4	8	
	α						

вектор невязки	5	2	6	3	3
вектор соседних вершин	5	5	5	5	2

В результате расчета в паросочетание добавляется новое ребро v_5u_2, появляется новый чередующийся маршрут $v_5u_2v_1u_3$ и производится новый выбор трансверсалей (см. рис. 18).

7	**2**	1	9	4
9	6	9	5	5
3	8	3	1	8
7	9	4	2	**2**
8	**4**	7	4	8

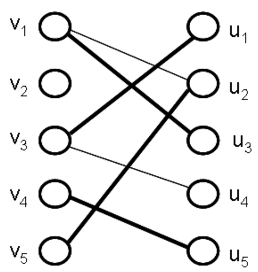

Рис. 18. Новый выбор трансверсалей

Строим вектор невязки и вектор соседней вершины, рассчитывая параметры α и β для строк и столбцов

		4	3	2	2	3	β
	˜1	7	**2**	**1**	9	4	
*	+1	9	6	9	5	5	
	˜1	**3**	8	3	**1**	8	
	˜1	7	9	4	2	**2**	
	+1	8	**4**	7	4	8	
	α						

вектор невязки	4	2	6	2	1
вектор соседних вершин	2	2	2	2	2

В результате расчета в паросочетание добавляется новое ребро v_2u_5. В данном паросочетании появляется новый маршрут $v_2u_5v_4$ который является перспективным для построения новых чередующихся маршрутов. Поэтому вновь строим вектор невязки и вектор соседней вершины, рассчитывая параметры α и β для строк и столбцов.

		4,5	3,5	2,5	2,5	3,5	β
	˜1,5	7	**2**	**1**	9	4	
*	+1,5	9	6	9	5	**5**	
	˜1,5	**3**	8	3	**1**	8	
*	˜1,5	7	9	4	2	**2**	
	+0,5	8	**4**	7	4	8	
	α						
	вектор невязки	3	1	3	1	0	
	вектор соседних вершин	2	2	4	2,4	2,4	

В результате расчета в паросочетание добавляется два новых ребра v_2u_4 и v_4u_4. В данном паросочетании появляются два новых чередующихся маршрута $v_2u_4v_4u_5$ и $v_2u_5v_4u_4$, строим новый набор трансверсалей которые и являются решениями для нашего примера (см. рис. 19).

7	**2**	1	9	4
9	6	9	**5**	**5**
3	8	3	1	8
7	9	4	2	**2**
8	**4**	7	**4**	8

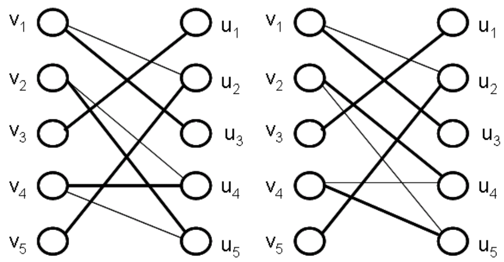

Рис. 19. Построение трансверсалей для нашего примера.

13. Задача коммивояжера.

Рассмотрим возможность применение методов алгебры структурных чисел для решения задачи коммивояжера на следующем примере.

Пример 18. Рассмотрим задачу о коммивояжере[3,7,11,12], представленную следующей матрицей стоимости:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		6	4	8	7	14
x_2	6		7	11	7	10
x_3	4	7		4	3	10
x_4	8	11	4		5	11
x_5	7	7	3	5		7
x_6	14	10	10	11	7	

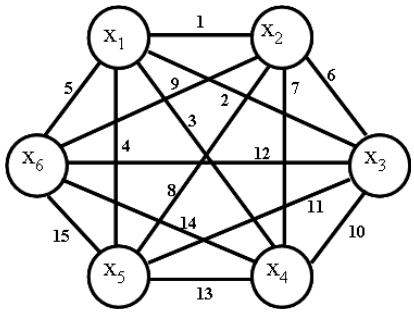

Рис. 20. Матрица стоимости и граф с правильной (в порядке следования вершин) нумерацией ребер для задачи коммивояжера.

Запишем для каждой строки однострочные структурные числа, где каждое ребро u_k характеризуется инцидентными вершинами (x_i,x_j) и весом ребра.

x_1: [x_2(6) x_3(4) x_4(8) x_5(7) x_6(14)];

x_2: [x_1(6) x_3(7) x_4(11) x_5(7) x_6(10)];

x_3: [x_1(4) x_2(7) x_4(4) x_5(3) x_6(10)];

x_4: [x_1(8) x_2(11) x_3(4) x_5(5) x_6(11)];

x_5: [x_1(7) x_2(7) x_3(3) x_4(5) x_6(7)];

x_6: [x_1(14) x_2(10) x_3(10) x_4(11) x_5(7)].

Перейдем к цифровой записи и расставим ребра в однострочных структурных числах в порядке не убывания весов:

1: [3(4) 2(6) 5(7) 4(8) 6(14)];

2: [1(6) 3(7) 5(7) 6(10) 4(11)];

3: [5(3) 1(4) 4(4) 2(7) 6(10)];

4: [3(4) 5(5) 1(8) 2(11) 6(11)];

5: [3(3) 4(5) 1(7) 2(7) 6(7)];

6: [5(7) 2(10) 3(10) 4(11) 1(14)].

Алгоритмом «бегущая строка» выделим первый элемент структурного числа: Причем при применении алгоритма следует учесть появление квазигамильтоновых циклов, соответствующие структурные элементы должны быть исключены из рассмотрения. Например, следующие структурные элементы:

1:	2	2	3	…
2:	1	3	6	…
3:	4	1	5	…
4:	5	5	2	…
5:	6	6	1	…
6:	3	4	4	…

1: [**3(4)** 2(6) 5(7) 4(8) 6(14)];

2: [**1(6)** 3(7) 5(7) 6(10) 4(11)];

3: [**5(3)** 1(4) 4(4) 2(7) 6(10)];

4: [3(4) 5(5) 1(8) 2(11) **6(11)**];

5: [3(3) **4(5)** 1(7) 2(7) 6(7)];

6: [5(7) **2(10)** 3(10) 4(11) 1(14)].

Сумма весов в выбранном элементе равна 42 (см. рис. 21). Выбираем в данном элементе структурного числа элемент матрицы с максимальным весом, предположим это ребро (x_4,x_6) и удаляем его из рассмотрения. Переупорядочим расположение однострочных структурных чисел и алгоритмом «бегущая строка» выделим первый элемент структурного числа.

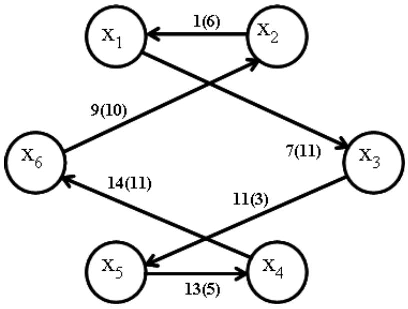

Рис. 21. Сумма весов = 46

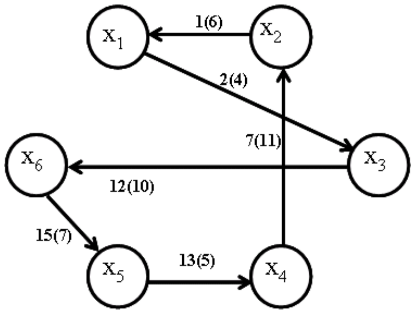

Рис. 22. Сумма весов = 45

1: [**3(4)** 2(6) 5(7) 4(8) 6(14)];

2: [**1(6)** 3(7) 5(7) 6(10) 4(11)];

6: [**5(7)** 2(10) 3(10) 1(14)];

5: [3(3) **4(5)** 1(7) 2(7) 6(7)];

4: [3(4) 5(5) 1(8) **2(11)**];

3: [5(3) 1(4) 4(4) 2(7) **6(10)**].

Сумма весов в выбранном элементе равна 45 (см. рис. 23). Выбираем в данном элементе структурного числа элемент матрицы с максимальным весом, это ребро (x_2,x_4) и удаляем его из рассмотрения. Переупорядочим расположение однострочных структурных чисел и алгоритмом «бегущая строка» выделим первый элемент структурного числа.

1: [**3(4)** 2(6) 5(7) 4(8) 6(14)];

2: [**1(6)** 3(7) 5(7) 6(10)];

4: [3(4) **5(5)** 1(8)];

3: [5(3) 1(4) **4(4)** 2(7) 6(10)];

6: [5(7) **2(10)** 3(10) 1(14)].

5: [3(3) 4(5) 1(7) 2(7) **<u>6(7)</u>**];

Сумма весов в выбранном элементе равна 36 (см. рис. 23). Выбираем в данном элементе структурного числа элемент матрицы с максимальным весом, это ребро (x_2,x_6) и удаляем его из рассмотрения. Переупорядочим расположение однострочных структурных чисел и алгоритмом «бегущая строка» выделим первый элемент структурного числа.

2: [**<u>1(6)</u>** 3(7) 5(7)];

6: [**<u>5(7)</u>** 3(10) 1(14)];

4: [**<u>3(4)</u>** 5(5) 1(8)];

1: [3(4) 2(6) 5(7) **<u>4(8)</u>** 6(14)];

3: [5(3) 1(4) 4(4) 2(7) **<u>6(10)</u>**];

5: [3(3) 4(5) 1(7) **<u>2(7)</u>** 6(7)].

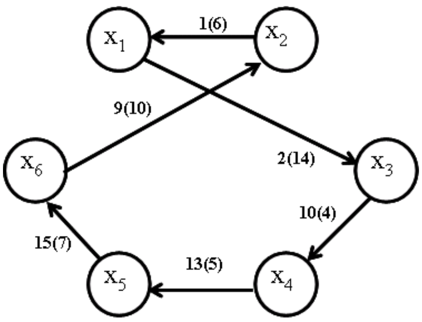

Рис. 23. Сумма весов = 36

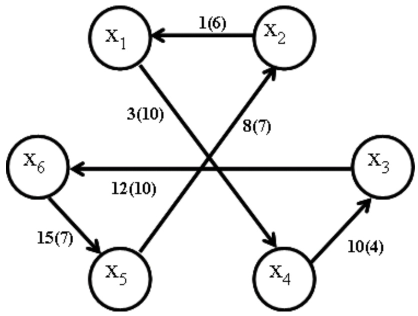

Рис. 24. Сумма весов = 44

Сумма весов в выбранном элементе равна 44 (см. рис. 24). Выбираем в данном элементе структурного числа элемент матрицы с максимальным весом, это ребро (x_3,x_6) и удаляем его из рассмотрения. Переупорядочим расположение однострочных структурных чисел и алгоритмом «бегущая строка» выделим первый элемент структурного числа.

6: [**<u>5(7)</u>** 1(14)];

2: [**<u>1(6)</u>** 3(7) 5(7)];

4: [**<u>3(4)</u>** 5(5) 1(8)];

3: [5(3) 1(4) 4(4) **<u>2(7)</u>**];

5: [3(3) **<u>4(5)</u>** 1(7) 2(7) 6(7)];

1: [3(4) 2(6) 5(7) 4(8) **<u>6(14)</u>**].

Сумма весов в выбранном элементе равна 43. Выбираем в данном элементе структурного числа элемент матрицы с максимальным весом, это ребро (x_1,x_6) и удаляем его из рассмотрения.

6: [5(7)];

2: [1(6) 3(7) 5(7)];

4: [3(4) 5(5) 1(8)];

3: [5(3) 1(4) 4(4) 2(7)];

5: [3(3) 4(5) 1(7) 2(7) 6(7)];

1: [3(4) 2(6) 5(7) 4(8)].

Дальнейший поиск структурного элемента не возможен, так как в 6-ой строке остался только один элемент – это 5-ый столбец. Кроме того, у нас единственный 6-ой столбец находится в 5-ой строке.

Но данное расположение характеризует квазигамильтонов цикл, и дальнейшие вычисления невозможны.

Таким образом, структурный элемент у которого сумма равна 36 (см. рис. 23) является решением для задачи коммивояжера.

1: [3(4) 2(6) 5(7) 4(8) 6(14)];

2: [1(6) 3(7) 5(7) 6(10) 4(11)];

3: [5(3) 1(4) 4(4) 2(7) 6(10)];

4: [3(4) 5(5) 1(8) 2(11) 6(11)];

5: [3(3) 4(5) 1(7) 2(7) 6(7)];

6: [5(7) 2(10) 3(10) 4(11) 1(14)].

Если убрать все красные, то получим следующие однострочные структурные числа:

1: [3(4) 2(6) 5(7) 4(8)];

2: [1(6) 3(7) 5(7) 6(10)];

3: [5(3) 1(4) 4(4) 2(7)];

4: [3(4) 5(5) 1(8)];

5: [3(3) 4(5) 1(7) 2(7) 6(7)];

6: [5(7) 2(10)].

Выводы

В данной работе рассмотрены вопросы алгебры структурных чисел для математического описания векторных подпространств циклов и разрезов. Показано также, что множество базисов единичных циклов и единичных разрезов графа может быть описано с помощью аппарата структурных чисел и представлено матроидом.

Для иллюстрации основных положений рассмотрены примеры.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асанов М.О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы / М.О. Асанов, В.А. Баранский, В.В. Расин Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 288 с.

2. Беллерт С. Топологический анализ и синтез линейных систем / С. Беллерт //Зарубежная радиоэлектроника.- 1963.- вып. 6.- С.93-123.

3. Емеличев В.А. Многогранники, графы и оптимизация./ В.А. Емеличев., М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. - М.: Наука, 1981

4. Емеличев В.А. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И.Сарванов, Р.И. Тышкевич - М.: Наука. ГРФМЛ.-1990. – 384 с.

5. Зыков А.А. Теория конечных графов. / А.А. Зыков - Новосибирск: ГРФМЛ.- 1963.- 542 с.

6. Зыков А.А. Основы теории графов. / А.А. Зыков – М.: Наука, ГРФМЛ, 1987. – 384 с.

7. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. / Н. Кристофидес - М.:Мир.- 1978. – 432 с.

8. Липский В. Комбинаторика для программистов: Пер. с польс. / В. Липский -М.:Мир.- 1988.- 213 с.

9. Носов В.А. Комбинаторика и теория графов / В.А. Носов - М.: МИЭМ, 1999

10. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.: Пер. с англ. / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц - М.: Мир.- 1985. – 512 с.

11. Перепелица В.А. Дискретная математика и моделирование в условиях неопределенности данных./ В.А. Перепелица, Ф.Б. Тебуева. – Издательство «АкадемияЕстествознания», 2007. – 151 с.

12. Рейнгольд Э. Комбинаторные алгоритмы, теория и практика. / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Дер - М.: Мир.- 1980. – 480 с.

13. Свами М. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. / М. Свами, К. Тхуласираман - М.: Мир.- 1984. – 455 с.

14. Харари Ф. Теория графов. - пер. с англ. Козырева В.П. / под ред. Гаврилова В.Г. / Ф. Харари – М.: Мир. – 1973. – 300 с.