ІНДИВІДУАЛЬНЕ ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 1

1. Оператор A переводить вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор

$$A\boldsymbol{x} = (4x_1 + 3x_2 + x_3;\ 3x_1 + x_2;\ x_1 + 2x_2 + x_3).$$

Визначити, чи є лінійним перетворення $A\overline{x}$? Якщо так, то знайти його ядро, образ, ранг та дефект.

Розв'язання.

Нехай $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$, тоді $A\boldsymbol{y} = (4y_1 + 3y_2 + y_3; 3y_1 + y_2; y_1 + 2y_2 + y_3)$. Будемо мати

$$A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = (4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4y_1 + 3y_2 + y_3; 3x_1 + x_2 + 3y_1 + y_2; x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 + 2y_2 + y_3),$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3),$$

$$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4y_1 + 3y_2 + y_3; 3x_1 + x_2 + 3y_1 + y_2; x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 + 2y_2 + y_3).$$

Бачимо, що $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$.

$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3),$$

$$A(\alpha\boldsymbol{x}) = (4\alpha x_1 + 3\alpha x_2 + \alpha x_3; 3\alpha x_1 + \alpha x_2; \alpha x_1 + 2\alpha x_2 + \alpha x_3) =$$
$$= (\alpha(4x_1 + 3x_2 + x_3); \alpha(3x_1 + x_2); \alpha(x_1 + 2x_2 + x_3)),$$

тобто $A(\boldsymbol{\alpha x}) = \alpha(A\boldsymbol{x})$. Обидві властивості виконані, тому оператор A являється лінійним.

Запишемо матрицю чого оператора, для чого знайдемо образи базисних векторів $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$:

$$A\boldsymbol{e}_1 = (4; 3; 1), \qquad A\boldsymbol{e}_2 = (3; 1; 2), \qquad A\boldsymbol{e}_3 = (1; 0; 1).$$

Будемо мати: $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдемо ранг матриці $\widetilde{A}$. Для цього приведемо цю матрицю до ступінчастого виду:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{III}\cdot 3 \\ \cdot 4 - \mathrm{I} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{rang} \widetilde{A} = 2$, тому $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} = 2$ і, отже, $\operatorname{defect} A = 3 - 2 = 1$.

Знайдемо вектори, які належать ядру: $\boldsymbol{x} \in \ker A \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ або в матричній формі: $\widetilde{A}X = \theta$. Таким чином, маємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 \qquad = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

або з приведеною ступінчатою матрицею

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо її загальний, а потім й фундаментальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}2x_3, \\ x_2 = -0{,}6x_3; \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3
1	–3	5

Отже, фундаментальним розв'язком буде вектор $(1;\,-3;\,5)$, тобто $\ker A = \langle (1;\,-3;\,5) \rangle$.

Знайдемо вектори, які належать образу: $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} A : \exists \boldsymbol{x} \,\big|\, \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ або в матричній формі: $\widetilde{A}X = Y$. Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь повинна мати розв'язок. Дослідимо її на сумісність. Для цього запишемо розширену матрицю цієї системи й приведемо її до ступінчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & y_1 \\ 3 & 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 2 & 1 & y_3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{III}\cdot 3 \\ \cdot 4 - \mathrm{I} \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & y_1 \\ 0 & -5 & -3 & y_2 - 3y_3 \\ 0 & 5 & 3 & 4y_3 - y_1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ +\mathrm{II} \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & y_1 \\ 0 & 5 & 3 & -y_2 + 3y_3 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - y_1 + y_2 \end{array}\right).$$

Для того, щоб ця система мала розв'язки повинні співпадати ранги матриці системи й розширеної матриці системи. Результатом цього буде однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно змінних (y_1, y_2, y_3):

$$y_3 - y_1 + y_2 = 0,$$

загальним розв'язком якої є $y_1 = y_2 + y_3$, а фундаментальний:

y_1	y_2	y_3
1	1	0
1	0	1

Отже, фундаментальним розв'язком будуть вектори: $(1;\,1;\,0)$, $(1;0;\,1)$, тобто $\operatorname{Im} A = \langle (1;\,1;\,0),\,(1;\,0;\,1) \rangle$.

2. Знайти

1) власні значення та відповідні власні вектори;

2) кореневі підпростори;

3) жорданову форму та жорданів базис лінійного оператора, який заданий у деякому базисі матрицею;

4) з'ясувати, чи можна привести матрицю до діагонального виду

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1) Знайдемо характеристичний многочлен лінійного оператора

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1-\lambda & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \lambda^2.$$

Його корені $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = 0$ належать даному полю, отже, $\operatorname{Spec} A = \{0,\,2\}$.

Знайдемо власний вектор, що відповідає знайденому власному значенню $\lambda = 2$. Для цього розв'яжемо однорідну СЛАР, записану в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приведемо матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \\ +\mathrm{I}\cdot 4 \\ +\mathrm{III} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ +\mathrm{II}\cdot 2 \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему, відповідну до отриманої матриці й знайдемо її розв’язок:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -x_4. \end{cases}$$

Таким чином, власний вектор, відповідний до власного значення $\lambda = 2$, буде мати вигляд $\bar{x}_1 = c_1(1;0;-1;1)$, де $c_1 = const \neq 0$.

Знайдемо власний вектор, що відповідає знайденому власному значенню $\lambda = 0$. Для цього розв’яжемо однорідну СЛАР, записану в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приведемо матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 3-\mathrm{I} \\ +\mathrm{IV} \\ -\mathrm{II}\cdot 4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ +\mathrm{II}\cdot 2 \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему, відповідну до отриманої матриці й знайдемо її розв’язок:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 + 3x_4 = 0; \\ -4x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_3 = 0; \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, власний вектор, відповідний до власного значення $\lambda = 0$, буде мати вигляд $\bar{x}_2 = c_2(-1;1;0;0)$, де $c_2 = const \neq 0$.

2) Алгебраїчна кратність власного значення $\lambda = 0$ дорівнює 2. Отже, для того, щоб скористатися визначенням кореневого підпростору, нам треба знайти другий степінь лінійного оператора $A - \lambda I$:

$$\left(\widetilde{A} - 0E\right)^2 = \widetilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо тепер базис ядра лінійного оператора $(A-0I)^2$. Для цього треба знайти підпростір розв'язків однорідної системи рівнянь $A^2\overline{x}=\overline{0}$. Маємо

$$\widetilde{A}^2=\begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot 1/4 \\ \\ +\mathrm{I} \\ -\mathrm{I}\end{matrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \leftrightarrow \mathrm{III} \\ \cdot 1/4 \\ \\ \end{matrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок $\begin{cases} x_1=-x_2+0{,}5x_4, \\ x_3=-x_4. \end{cases}$. Фундаментальна система розв'язків $\overline{f_1}=c_1(-1;\ 1;\ 0;\ 0)$, $c_1=\text{const}\neq 0$, $\overline{f_2}=c_2(1;\ 0;\ -2;\ 2)$, $c_2=\text{const}\neq 0$ системи рівнянь $\widetilde{A}^2\overline{x}=\overline{0}$. Отже, система векторів $\overline{f_1}, \overline{f_2}$ – базис кореневого підпростору, яке відповідає власному значенню $\lambda=0$.

Так як алгебраїчна кратність власного значення $\lambda=2$ дорівнює двом, то, аналогічно попередньому, знайдемо квадрат лінійного оператора $A-2I$ і за допомогою елементарних перетворень приведемо її до необхідної форми:

$$\left(\widetilde{A}-2E\right)^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 0 & -8 \\ -8 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{matrix} \cdot(-1/4) \\ \cdot(-1/4)\leftrightarrow \mathrm{I} \\ +2\mathrm{II} \\ +\mathrm{III} \end{matrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -8\mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок $\begin{cases} x_1=x_4, \\ x_2=0, \\ x_3=x_3. \end{cases}$ Фундаментальна система розв'язків $\overline{f_3}=c_3(0;\ 0;\ 1;\ 0)$, $\overline{f_4}=c_4(1;\ 0;\ 0;\ 1)$, $c_3, c_4=\text{const}\neq 0$ дасть базис другого кореневого підпростору.

3) Покажемо два способи знаходження жорданової форми та жорданова базису лінійного оператора.

І спосіб.

Знайдемо жорданові клітини, що відповідають власному значенню $\lambda=2$. Ранг r_1 матриці $\widetilde{A}-2E$ дорівнює 3, ранг r_2 матриці $\left(\widetilde{A}-2E\right)^2$ дорівнює $r_2=2$. Число жорданових клітин 1-го порядку, що відповідають власному значенню $\lambda=2$, дорівнює

$$N_1(2)=r_0(0)-2r_1(0)+r_2(0)=4-2\cdot 3+2=0,$$

тобто жорданова нормальна форма не містить клітин 1-го порядку, що відповідають власному значенню $\lambda=2$. Знайдемо $\left(\widetilde{A}-2E\right)^3$ та її ранг:

$$\left(\widetilde{A}-2E\right)^3=\left(\begin{pmatrix}0 & -4 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 4\\ 8 & 8 & 0 & -8\\ -8 & -8 & 0 & 8\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1\\ -4 & -4 & -1 & 3\\ 4 & 4 & 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 0 & 4\\ 12 & 4 & 0 & -12\\ -16 & -16 & 0 & 16\\ 16 & 16 & 0 & -16\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ +\mathrm{I}\cdot 3\\ -\mathrm{I}\cdot 4\\ +\mathrm{IV}\end{matrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-4 & 4 & 0 & 4\\ 0 & 16 & 0 & 0\\ 0 & -32 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ +\mathrm{II}\cdot 2\\ \\ \end{matrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-4 & 4 & 0 & 4\\ 0 & 16 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ранг останньої матриці $r_3=2$. Тоді

$$N_2(0)=r_1(0)-2r_2(0)+r_3(0)=3-2\cdot 2+2=1.$$

$r_2=r_3=2$, отже, жорданова нормальна форма матриці, що відповідає $\lambda=2$, має одну клітку порядку 2.

Знайдемо жорданові клітини, що відповідають власному значенню $\lambda=0$. Ранг r_1 матриці $\widetilde{A}-0E$ дорівнює 3, ранг r_2 матриці $\left(\widetilde{A}-0E\right)^2$ дорівнює $r_2=2$. Число жорданових клітин 1-го порядку, що відповідають власному значенню $\lambda=0$, дорівнює

$$N_1(0)=r_0(0)-2r_1(0)+r_2(0)=4-2\cdot 3+2=0,$$

тобто жорданова нормальна форма не містить клітин 1-го порядку, що відповідають власному значенню $\lambda=0$. Знайдемо $\left(\widetilde{A}-0E\right)^3$ та її ранг:

$$\left(\widetilde{A}-0E\right)^3=\widetilde{A}^3=\begin{pmatrix}8 & 8 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -8 & -8 & 0 & 4\\ 8 & 8 & 4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1\\ -4 & -4 & 1 & 3\\ 4 & 4 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 16 & 12 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -16 & -16 & -4 & 4\\ 16 & 16 & 12 & 4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ +\mathrm{I}\\ -\mathrm{I}\end{matrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}16 & 16 & 12 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4 & 4 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ранг останньої матриці $r_3=2$. Тоді

$$N_2(0)=r_1(0)-2r_2(0)+r_3(0)=3-2\cdot 2+2=1.$$

$r_2=r_3=2$, отже, жорданова нормальна форма матриці, що відповідає $\lambda=0$, має одну клітку порядку 2.

Тепер вже неважко побудувати й саму матрицю, що має жорданову нормальну форму:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Для знаходження жорданова базису, в якому матриця лінійного оператора має жорданову форму, треба знайти матрицу перехода T, розв'язавши відносно T матричне рівняння: $J=T^{-1}\widetilde{A}T$, тобто $TJ-AT=\theta$. Нехай

$$T=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$TJ=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_{11} & x_{11}+2x_{12} & 0 & x_{13} \\ 2x_{21} & x_{21}+2x_{22} & 0 & x_{23} \\ 2x_{31} & x_{31}+2x_{32} & 0 & x_{33} \\ 2x_{41} & x_{41}+2x_{42} & 0 & x_{43} \end{pmatrix},$$

$$AT=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{matrix} 3x_{11}+3x_{21}+x_{31} & 3x_{12}+3x_{22}+x_{32} \\ x_{11}+x_{21}-x_{41} & x_{12}+x_{22}-x_{42} \\ -4x_{11}-4x_{21}+x_{31}+3x_{41} & -4x_{12}-4x_{22}+x_{32}+3x_{42} \\ 4x_{11}+4x_{21}+x_{31}-x_{41} & 4x_{12}+4x_{22}+x_{32}-x_{42} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} 3x_{13}+3x_{23}+x_{33} & 3x_{14}+3x_{24}+x_{34} \\ x_{13}+x_{23}-x_{43} & x_{14}+x_{24}-x_{44} \\ -4x_{13}-4x_{23}+x_{33}+3x_{43} & -4x_{14}-4x_{24}+x_{34}+3x_{44} \\ 4x_{13}+4x_{23}+x_{33}-x_{43} & 4x_{14}+4x_{24}+x_{34}-x_{44} \end{matrix}\right),$$

$$TJ-AT=\left(\begin{matrix} -x_{11}-3x_{21}-x_{31} & x_{11}-x_{12}-3x_{22}-x_{32} \\ -x_{11}+x_{21}+x_{41} & x_{21}-x_{12}+x_{22}+x_{42} \\ 4x_{11}+4x_{21}+x_{31}-3x_{41} & x_{31}+4x_{12}+4x_{22}+x_{32}-3x_{42} \\ -4x_{11}-4x_{21}-x_{31}+3x_{41} & x_{41}-4x_{12}-4x_{22}-x_{32}+3x_{42} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} -3x_{13}-3x_{23}-x_{33} & x_{13}-3x_{14}-3x_{24}-x_{34} \\ -x_{13}-x_{23}+x_{43} & x_{23}-x_{14}-x_{24}+x_{44} \\ 4x_{13}+4x_{23}-x_{33}-3x_{43} & x_{33}+4x_{14}+4x_{24}-x_{34}-3x_{44} \\ -4x_{13}-4x_{23}-x_{33}+x_{43} & x_{43}-4x_{14}-4x_{24}-x_{34}+x_{44} \end{matrix}\right).$$

Отримаємо однорідну систему рівнянь. Матрицю цієї системи треба привести до ступінчастого вигляду, потім знайти загальний та один частинний розв'язок. Будемо мати: $x_{44}=4$, $x_{41}=1$, $x_{42}=1$, $x_{43}=0$, $x_{34}=-4$, $x_{33}=0$, $x_{32}=0$, $x_{31}=-1$, $x_{24}=1$, $x_{23}=-2$, $x_{21}=0$, $x_{22}=0$, $x_{14}=1$, $x_{13}=2$, $x_{12}=1$, $x_{11}=1$. Отже, матриця переходу до жорданова базису матиме вигляд:

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

II спосіб.

Знайдемо вектори жорданова базису для власного значення $\lambda = 2$. В якості повної системи візьмемо базис $\boldsymbol{e}_1 = \overline{f_3} = (0;\, 0;\, 1;\, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{f_4} = (1;\, 0;\, 0;\, 1)$ кореневого підпростору, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$. Тоді

$$(A-2I)\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(A-2I)\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далі

$$(A-2I)^2\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 0 & -8 \\ -8 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(A-2I)^2\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 0 & -8 \\ -8 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо ланцюжки векторів

$$S_1 : (A-2I)\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_1;$$
$$S_2 : (A-2I)\boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_2.$$

Тепер впорядкуємо ланцюжки по довжині, а для зручності запишемо їх по рядкам в матрицю й приведемо крайню ліву матрицю до ступінчастої форми:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{-\mathrm{I}} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Після викреслювання нульового вектора отримаємо

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & & & & \end{array}\right)_{-\mathrm{I}} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{array}\right).$$

Ліва матриця приведена до ступінчастої форми, отже, система, яка складається з перших векторів ланцюжків, лінійно незалежна. Отже, й вся система векторів лінійно незалежна. Отримали жорданів базис $\boldsymbol{u}_1 = (1;\, 0;\, -1;\, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0;\, 0;\, 1;\, 0)$.

Знайдемо тепер вектори жорданова базису для власного значення $\lambda = 0$. В якості повної системи візьмемо базис $\boldsymbol{e}_1 = \overline{f_1} = (-1;\, 1;\, 0;\, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{f_2} = (1;\, 0;\, -2;\, 2)$ кореневого підпростору, який відповідає власному значенню $\lambda = 0$. Тоді

$$(A-0I)\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}3&3&1&0\\1&1&0&-1\\-4&-4&1&3\\4&4&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$(A-0I)\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}3&3&1&0\\1&1&0&-1\\-4&-4&1&3\\4&4&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Далі

$$(A-0I)^2\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}8&8&4&0\\0&0&0&0\\-8&-8&0&4\\8&8&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Нами побудовані ланцюжки векторів:

$$S_1:\boldsymbol{e}_1;$$
$$S_2:(A-0I)\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2.$$

Тепер впорядкуємо ланцюжки по довжині, а для зручності запишемо їх по рядкам в матрицю й приведемо крайню ліву матрицю до ступінчастої форми:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&0&1&0&-2&2\\-1&1&0&0&&&&\end{array}\right)_{+\mathrm{I}}\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&0&1&0&-2&2\\0&0&0&0&&&&\end{array}\right).$$

Ліва матриця приведена до ступінчастої форми, отже, система, яка складається з перших векторів ланцюжків, лінійно незалежна. Отже, й вся система векторів лінійно незалежна. Отримали жорданів базис $\boldsymbol{u}_3=(1;\,-1;\,0;\,0)$, $\boldsymbol{u}_4=(1;\,0;\,-2;\,2)$.

Кожному ланцюжку довжини h відповідає клітина порядку h в жордановій нормальній формі. Наш базис складається з двох ланцюжків, кожний довжиною 2. Отже, матриця оператора в цьому базисі має дві клітини, обидві порядку 2:

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Так як всі обчислення проводилися в цьому базисі, в якому дана матриця оператора, то в цьому ж базисі дано вектори жорданова базису $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$. Тоді за означенням матриця переходу від першого базису до другого має вид

$$T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{u}}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&-1&0\\-1&1&0&-2\\1&0&0&2\end{pmatrix}.$$

4) З'ясуємо, чи можна привести матрицю до діагонального виду. Характеристичний многочлен матриці: $\chi_A(\lambda)=\lambda^2(\lambda-2)^2$, тобто маємо розклад цього многочлена на лінійні множники. Робимо висновок, що матриця $\widetilde{A}$ може мати

діагональну форму. Для кожного власного значення $\lambda = 0$ і $\lambda = 2$, кратність яких дорівнює 2, знайдемо дефект матриці $\widetilde{A} - \lambda_i E$: $\operatorname{defect}\left(\widetilde{A} - 0E\right) = 1$, $\operatorname{defect}\left(\widetilde{A} - 2E\right) = 1$. Для кожного такого власного значення отриманий дефект не співпадає з алгебраїчною кратністю λ_i в $\chi_A(\lambda)$, тому матрицю $\widetilde{A}$ не можна привести до діагонального виду.

3. Дано підпростір $L = \langle \boldsymbol{f}_1 = (1;\ 2;\ 0;\ 2);\ \boldsymbol{f}_2 = (-1,\ 2,\ 4,\ 2) \rangle$. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$. Визначити ортогональну проекцію $\boldsymbol{y}$ й ортогональну складову $\boldsymbol{z}$ вектора $\boldsymbol{x} = (-2,\ 3,\ -1,\ -4)$ відносно підпростору L. Задачу розв'язати двома способами.

Розв'язання.

І спосіб.

Спочатку побудуємо ортонормований базис даного підпростору. Координати векторів $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ не пропорційні, отже, вектори $\boldsymbol{f}_1$ і $\boldsymbol{f}_2$ утворюють базис підпростору L. Застосуємо до цього базису процес ортогоналізації Грамма-Шмідта.

По $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ побудуємо ортогональний базис $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$:

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1 = (1,\ 2,\ 0,\ 2); \qquad (\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_1) = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 2^2 = 9;$$

$$(\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{g}_1) = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 7;$$

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \frac{(\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{g}_1)}{(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_1)} \boldsymbol{g}_1 = (-1,\ 2,\ 4,\ 2) - \frac{7}{9}(1;\ 2;\ 0;\ 2) =$$

$$= \frac{1}{9}\left[9(-1;\ 2;\ 4;\ 2) - 7(1;\ 2;\ 0;\ 2)\right] = \frac{1}{9}(-16;\ 4;\ 36;\ 4)$$

$$\text{або } \boldsymbol{g}_2 = (-4;\ 1;\ 9;\ 1).$$

Як видно, $\boldsymbol{g}_1 \perp \boldsymbol{g}_2$, так як $(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2) = 0$.

Побудуємо тепер ортонормований базис підпростору L:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{g}_1}{\|\boldsymbol{g}_1\|} = \frac{\boldsymbol{g}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{g}_1;\ \boldsymbol{g}_1)}} = \frac{1}{3}(1;\ 2;\ 0;\ 2) = \left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 0;\ \frac{2}{3}\right);$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|} = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{g}_2;\ \boldsymbol{g}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{99}}(-4;\ 1;\ 9;\ 1) = \left(-\frac{4}{\sqrt{99}};\ \frac{1}{\sqrt{99}};\ \frac{9}{\sqrt{99}};\ \frac{1}{\sqrt{99}}\right).$$

Знайдемо скалярні добутки даного вектора $\boldsymbol{x}$ і векторів знайденого базису:

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_1) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4}{3},$$

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_2) = -2 \cdot \frac{-4}{\sqrt{99}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{99}} - 1 \cdot \frac{9}{\sqrt{99}} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{99}} = -\frac{2}{\sqrt{99}}.$$

Ортогональна проекція $\boldsymbol{y}$ вектора $\boldsymbol{x}$ на підпростір L й ортогональна складова $\boldsymbol{z}$ вектора $\boldsymbol{x}$ відносно підпростору L будуть такі:

$$\boldsymbol{y} = \text{пр}_L \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 0;\ \frac{2}{3}\right) -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{99}}\left(-\frac{4}{\sqrt{99}};\ \frac{1}{\sqrt{99}};\ \frac{9}{\sqrt{99}};\ \frac{1}{\sqrt{99}}\right) = \left(-\frac{4}{9};\ -\frac{8}{9};\ 0;\ -\frac{8}{9}\right) -$$

$$-\left(-\frac{8}{99};\ \frac{2}{99};\ \frac{18}{99};\ \frac{2}{99}\right) = \frac{1}{99}(-36;\ -90;\ -18;\ -90) = \frac{1}{11}(-4;\ -10;\ -2;\ -10);$$

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(-2;\ 3;\ -1;\ -4)+\frac{1}{11}(-4;\ -10;\ -2;\ -10)=$$
$$=\frac{1}{11}(-18;\ 43;\ -9;\ -34).$$

ІІ спосіб.

Як було вказано в першому способі дані вектори $\boldsymbol{f}_1$ і $\boldsymbol{f}_2$ є лінійно незалежними, отже утворюють базис.

Так як за означенням $\boldsymbol{y}$, який представляє ортогональну проекцію $\boldsymbol{x}$ на підпростір L, належить L, то його можна виразити через базисні вектори цього підпростору, тобто $\boldsymbol{y}=\alpha_1\boldsymbol{f}_1+\alpha_2\boldsymbol{f}_2$. Таким чином, отримаємо

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{f}_1+\alpha_2\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{z}.$$

Помножимо останню рівність скалярно на $\boldsymbol{f}_1$:

$$(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f}_1)=(\alpha_1\boldsymbol{f}_1+\alpha_2\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{z};\ \boldsymbol{f}_1)=\alpha_1(\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_1)+\alpha_2(\boldsymbol{f}_2;\ \boldsymbol{f}_1)+(\boldsymbol{z};\ \boldsymbol{f}_1)=$$
$$=\alpha_1(\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_1)+\alpha_2(\boldsymbol{f}_2;\ \boldsymbol{f}_1),\ \text{так як}\ \boldsymbol{z}\in L^{\perp}.$$

Аналогічно,

$$(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f}_2)=(\alpha_1\boldsymbol{f}_1+\alpha_2\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{z};\ \boldsymbol{f}_2)=\alpha_1(\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_2)+\alpha_2(\boldsymbol{f}_2;\ \boldsymbol{f}_2).$$

Обчислив відповідні скалярні добутки:

$$(\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_1)=9,\ (\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_2)=7,\ (\boldsymbol{f}_2;\ \boldsymbol{f}_2)=25,\ (\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f}_1)=-4,\ (\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f}_2)=-4,$$

отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 9\alpha_1+7\alpha_2=-4, \\ 7\alpha_1+25\alpha_2=-4. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо: $\alpha_1=-\frac{9}{22}$, $\alpha_2=-\frac{1}{22}$, а, отже

$$\boldsymbol{y}=-\frac{9}{22}\boldsymbol{f}_1-\frac{1}{22}\boldsymbol{f}_2=\frac{1}{11}(-4;\ -10;\ -2;\ -10).$$

З рівності $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$ будемо мати:

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(-2;\ 3;\ -1;\ -4)-\frac{1}{11}(-4;\ -10;\ -2;\ -10)=\frac{1}{11}(-18;\ 43;\ -9;\ -34).$$

4. В просторі R^3 з матрицею Грамма $G=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -10 \\ 4 & -10 & 23 \end{pmatrix}$ знайти кут між векторами $\boldsymbol{x}=(1;\ 2;\ 3)$ і $\boldsymbol{y}=(1;\ 0;\ -5)$.

Розв'язання.

Косинус кута між ненульовими векторами $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ обчислюється по формулі:

$$\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}.$$

Знайдемо скалярний добуток $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -10 \\ 4 & -10 & 23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}=-256.$$

Обчислимо норми векторів $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ по формулах $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ й $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}$:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -10 \\ 4 & -10 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 128 \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{128} = 8\sqrt{2};$$

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -10 \\ 4 & -10 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = 536 \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{536} = 2\sqrt{134}.$$

Отже, $\cos\varphi = \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|} = \dfrac{-256}{8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{134}} = -\dfrac{8\sqrt{67}}{67}$, тоді $\varphi \approx \pi - \arccos\dfrac{8\sqrt{67}}{67}$.