# ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 2

**1. Исследовать квадратичную форму $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ на положительную определенность по критерию Сильвестра. Найти сигнатуру, канонический и нормальный вид квадратичной формы при помощи метода**

**а) Лагранжа (2 способами);**

**б) Якоби.**

*Решение.*

**а)**

**I способ.** Сделаем замену переменных $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$. Тогда квадратичная форма преобразуется к виду

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3 .$$

В соответствии со сказанным при доказательстве теоремы 3.1 сделаем новую замену переменных

$$z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = 2y_1 - 2y_3 = 2(y_1 - y_3), \qquad z_2 = y_2, \qquad z_3 = y_3,$$

получим

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 8z_2z_3 - 2z_3^2 = \frac{1}{2}z_1^2 - 2\left[(z_2 + 2z_3)^2 - 3z_3^2\right].$$

После замены переменных $z_1 = t_1$, $z_2 + 2z_3 = t_2$, $z_3 = t_3$ квадратичная форма $f$ будет приведена к каноническому виду

$$f = \frac{1}{2}t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2 .$$

**II способ.** Выполним согласованные элементарные преобразования строк и столбцов матрицы квадратичной формы и присоединенной единичной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{lll} -\mathrm{II} & & \end{array} \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 2 + \mathrm{I} \\ +2\mathrm{I} \\ \\ \\ \\ \end{array} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} & \cdot 2 + \mathrm{I} & +2\mathrm{I} \end{array} \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} & & +\mathrm{II} \end{array} \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Матрица третьего порядка, стоящая сверху, является диагональной. Значит, это матрица квадратичной формы, имеющей канонический вид. В соответствии с алгоритмом матрица третьего порядка, стоящая снизу – это искомая матрица перехода. Поэтому

$$f = -2x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2$$

и

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 3z_3, \\ x_2 = -z_1 + z_2 - z_3, \\ x_3 = \qquad\qquad z_3. \end{cases}$$

**б)** Запишем матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда угловые миноры: $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -1$, $\Delta_3 = -6$. Этим методом данную квадратичную форму привести нельзя.

**2. Проверить, будут ли формы $f$ и $g = 9t_1^2 - 2t_2^2 + 4t_3^2$ эквивалентными над полем $R$. Для эквивалентных форм найти преобразование, переводящее квадратичную форму $f$ в форму $g = 9t_1^2 - 2t_2^2 + 4t_3^2$. Форму $f$ взять из условия задачи 1.**

*Решение*. Выше был получен канонический вид для формы $f$: $f = -2x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2$. Найдем индексы инерции и сигнатуру: $r_+ = 2$, $r_- = 1$ и сигнатура $s = 2 - 1 = 1$. Для формы $g$: $r_+ = 2$, $r_- = 1$ и сигнатура $s = 2 - 1 = 1$. Итак, формы эквивалентны.

Найдем теперь преобразование, переводящее форму $f$ в форму $g$. Форма $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ приводится к нормальному виду $f = -z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ заменой

$$\begin{cases} y_1\sqrt{2} = z_1, \\ y_2 = z_2, \\ y_3\sqrt{6} = z_3, \end{cases}$$

где $y_i$, $i = \overline{1,3}$ определяются соотношениями:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 2x_3, \\ y_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} z_1\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 2x_3, \\ z_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3, \\ z_3\frac{\sqrt{6}}{6} = x_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - 2\sqrt{2}x_3, \\ z_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3, \\ z_3 = x_3\sqrt{6}. \end{cases}$$

Форму $g=9t_1^2-2t_2^2+4t_3^2$ заменой $\begin{cases}3t_1=z_1,\\ t_2\sqrt{2}=z_2,\\ 2t_3=z_3\end{cases}$ приводим к нормальному виду $g=z_1^2-z_2^2+z_3^2$.

Итак, искомое преобразование, переводящее форму $f$ в форму $g$:

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2-2\sqrt{2}x_3=3t_1,\\ \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-x_3=t_2\sqrt{2},\\ x_3\sqrt{6}=2t_3.\end{cases}$$

Или, выразив $x_i$ через $t_i$, $i=\overline{1,3}$, будем иметь:

$$\begin{cases}x_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}t_1+t_2\sqrt{2}+t_3\sqrt{6},\\ x_2=t_1\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}t_2-\frac{\sqrt{6}}{3}t_3,\\ x_3=\frac{\sqrt{6}}{3}t_3.\end{cases}$$

**3. Найти все значения $\lambda$, при которых квадратичная форма $f$ будет положительно-определенной.** $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=5x_1^2+\lambda x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$

*Решение.*

Запишем матрицу квадратичной формы $\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{pmatrix}$ найдем все угловые миноры и применим критерий Сильвестра:

$$\Delta_1=5>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}5&2\\2&\lambda\end{vmatrix}=5\lambda-4>0,\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}5&2&-1\\2&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=5\lambda^2-5\lambda-1>0.$$

Все угловые миноры должны быть положительны, получим систем у неравенств:

$$\begin{cases}5\lambda-4>0,\\ 5\lambda^2-5\lambda-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda>\frac{4}{5},\\ \frac{5-3\sqrt{5}}{10}<\lambda<\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\end{cases}\Rightarrow\frac{4}{5}<\lambda<\frac{5+3\sqrt{5}}{10}.$$

*Ответ.* $\lambda\in\left(\frac{4}{5};\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)$.

**4. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму** $f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$ **к каноническому виду.**

*Решение*. Запишем матрицу заданной квадратичной формы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=0$:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+3)=0.$$

Собственными значениями матрицы $A$ являются числа $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,\ \lambda_4=-3$. Отсюда вытекает, что квадратичная форма $f$ имеет такой канонический вид

$$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2.$$

При $\lambda=1$ система уравнений для определения координат собственных векторов имеет вид

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ -x_1-x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$$

Так как $\lambda=1$ является корнем характеристического уравнения третьей кратности, то ему соответствуют три линейно независимых собственных вектора. Это означает, что фундаментальная система решений рассматриваемой однородной системы уравнений должна состоять из трех линейно независимых решений рассматриваемой системы уравнений. Следовательно, ранг матрицы системы однородных уравнений $r=1$ и, поэтому, система уравнений эквивалентна одному из своих уравнений, например, второму уравнению, ФСР которой имеет вид:

$$x_1-x_2-x_3+x_4=0$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{a}_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\boldsymbol{a}_2$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\boldsymbol{a}_3$ | –1 | 0 | 0 | 1 |

Векторы $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ являются линейно независимыми собственными векторами матрицы $A$, которые отвечают собственному значению $\lambda=1$. Любой собственный вектор матрицы $A$, отвечающий собственному значению $\lambda=1$, является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$, так как координаты этого вектора удовлетворяют системе уравнений.

Применим процесс ортогонализации к системе векторов $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ получим ортонормированную совокупность линейно независимых собственных векторов $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3$ матрицы $A$, отвечающих собственному значению $\lambda=1$. Имеем

$$f_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$f_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|},\ g_2 = a_2 - (a_2, f_1) f_1 = a_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} f_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \|g_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$f_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|},\ g_3 = a_3 - (a_3, f_1) f_1 - (a_3, f_2) f_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \|g_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}},\ f_3 = \begin{pmatrix} -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = -3$ согласно получаем следующую систему уравнений для определения координат собственного вектора $a_4$ матрицы $A$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Матрица этой системы имеет ранг, равный трем, поэтому фундаментальная система решений состоит из одного ненулевого решения $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -1,\ x_4 = 1$. Собственный вектор $a_4$ оказывается таким: $a_4 = (1, -1, -1, 1)$.

Нормированный собственный вектор: $f_4 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу $Q$ ортогонального преобразования переменных, которое приводит квадратичную форму к каноническому виду. Для этого поместим в столбцы матрицы $Q$ координаты собственных векторов $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$, получим

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, квадратичная форма $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ при помощи ортогонального преобразования переменных

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\,y_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,y_3 + \frac{1}{2}\,y_4, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\,y_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,y_3 - \frac{1}{2}\,y_4, \\ x_3 = \qquad\qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,y_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,y_3 - \frac{1}{2}\,y_4, \\ x_3 = \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}\,y_3 + \frac{1}{2}\,y_4. \end{cases}$$

приводится к каноническому виду

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$