ІНДИВІДУАЛЬНЕ ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 1

1. Обчислити визначник Δ: а) розклавши його по елементах i-го рядка; б) розклавши його по елементах j-го стовпця; в) отримавши попередньо нулі в i-му рядку; г) привівши його до трикутного вигляду.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}, \ i = 3, \ j = 2.$$

Розв'язання.

а) Застосуємо теорему про розклад визначника по елементах рядка:

$$\Delta = \begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 1\cdot 6 - 2\cdot(-1)\cdot 64 + 1\cdot 1\cdot(-38) + 4\cdot(-1)\cdot(-30) = 222.$$

б) Застосуємо теорему про розклад визначника по елементах стовпця:

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} & \uparrow & & \end{matrix} \end{array} = -2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot(-1)\cdot(-28) + 3\cdot 1\cdot 42 - 2\cdot(-1)\cdot 64 + 1\cdot 1\cdot 24 = 222.$$

в) Застосуємо властивості визначників, а потім теорему про розклад визначника по елементах рядка, отримаємо:

$$\Delta = \begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} -\mathrm{III}\cdot 2 & +\mathrm{I} & & -\mathrm{III}\cdot 4 \end{matrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} -9 & -3 & 4 & -15 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} -9 & -3 & -15 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 1\cdot 222 = 222.$$

г) Застосуємо властивості визначників, отримаємо:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1&-2&4&1\\2&3&0&6\\2&-2&1&4\\3&1&-2&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\+\mathrm{I}\cdot2\\-\mathrm{II}\\+\mathrm{I}\cdot3\end{matrix}=\begin{vmatrix}-1&-2&4&1\\0&-1&8&8\\0&-5&1&-2\\0&-5&10&2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\\\-\mathrm{II}\cdot5\\-\mathrm{III}\end{matrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-1&-2&4&1\\0&-1&8&8\\0&0&-39&-42\\0&0&9&4\end{vmatrix}\begin{matrix}\\\\\\\cdot13+\mathrm{III}\cdot3\end{matrix}=\frac{1}{13}\begin{vmatrix}-1&-2&4&1\\0&-1&8&8\\0&0&-39&-42\\0&0&0&-74\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{13}\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-39)\cdot(-74)=222\,.$$

2. Дано дві матриці A і B:

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\3&5&1\\4&7&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-8&5\\3&0&2\end{pmatrix}.$$

Знайти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) $\left(AB+3BA-\det(A)\cdot A^{-1}\right)^t$.

Розв'язання.

а) $AB=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-8&5\\3&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-1&0\\3&5&1\\4&7&5\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot3+0\cdot3+2\cdot4&-1\cdot(-1)+0\cdot5+2\cdot7&-1\cdot0+0\cdot1+2\cdot5\\1\cdot3+(-8)\cdot3+5\cdot4&1\cdot(-1)+(-8)\cdot5+5\cdot7&1\cdot0+(-8)\cdot1+5\cdot5\\3\cdot3+0\cdot3+2\cdot4&3\cdot(-1)+0\cdot5+2\cdot7&3\cdot0+0\cdot1+2\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&15&10\\-1&-6&17\\17&11&10\end{pmatrix}.$$

б) $BA=\begin{pmatrix}3&-1&0\\3&5&1\\4&7&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-8&5\\3&0&2\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot(-1)+(-1)\cdot1+0\cdot3&3\cdot0+(-1)\cdot(-8)+0\cdot0&3\cdot2+(-1)\cdot5+0\cdot2\\3\cdot(-1)+5\cdot1+1\cdot3&3\cdot0+5\cdot(-8)+1\cdot0&3\cdot2+5\cdot5+1\cdot2\\4\cdot(-1)+7\cdot1+5\cdot3&4\cdot0+7\cdot(-8)+5\cdot0&4\cdot2+7\cdot5+5\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&8&1\\5&-40&33\\18&-56&53\end{pmatrix}.$$

в) Знайдемо обернену матрицю, тобто A^{-1}.

Обчислимо визначник матриці A:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}-1&0&2\\1&-8&5\\3&0&2\end{vmatrix}=64$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-8&5\\0&2\end{vmatrix}=-16,\ A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&5\\3&2\end{vmatrix}=13,\ A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&-8\\3&0\end{vmatrix}=24,$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=0,\ A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-8,\ A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}0 & 2\\ -8 & 5\end{vmatrix}=16,\ A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=7,\ A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -8\end{vmatrix}=8.$$

Будемо мати: $A^{-1}=\dfrac{1}{64}\begin{pmatrix}-16 & 0 & 16\\ 13 & -8 & 7\\ 24 & 0 & 8\end{pmatrix}.$

г) $\left(AB+3BA-\det(A)\cdot A^{-1}\right)^t=$

$$=\left[\begin{pmatrix}5 & 15 & 10\\ -1 & -6 & 17\\ 17 & 11 & 10\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-4 & 8 & 1\\ 5 & -40 & 33\\ 18 & -56 & 53\end{pmatrix}-64\cdot\frac{1}{64}\begin{pmatrix}-16 & 0 & 16\\ 13 & -8 & 7\\ 24 & 0 & 8\end{pmatrix}\right]^t=$$

$$=\left[\begin{pmatrix}5 & 15 & 10\\ -1 & -6 & 17\\ 17 & 11 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12 & 24 & 3\\ 15 & -120 & 99\\ 54 & -168 & 159\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-16 & 0 & 16\\ 13 & -8 & 7\\ 24 & 0 & 8\end{pmatrix}\right]^t=$$

$$=\begin{pmatrix}9 & 39 & -3\\ 1 & -118 & 109\\ 47 & -157 & 161\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}9 & 1 & 47\\ 39 & -118 & -157\\ -3 & 109 & 161\end{pmatrix}.$$

3. Перевірити на сумісність систему рівнянь й у випадку сумісності розв'язати її: а) методом Гаусса; б) по формулах Крамера; в) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);

$$\begin{cases}24x_1+2x_2-x_3=25,\\ 2x_1-19x_2+3x_3=-27,\\ x_1+5x_2-22x_3=-55.\end{cases}$$

Розв'язання.

а) Приведемо розширену матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}24 & 2 & -1 & 25\\ 2 & -19 & 3 & -27\\ 1 & 5 & -22 & -55\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ -\mathrm{III}\cdot 2\\ \cdot 24-\mathrm{I}\end{array}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}24 & 2 & -1 & 25\\ 0 & -29 & 47 & 83\\ 0 & 118 & -527 & -1345\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \cdot 29-\mathrm{II}\cdot 118\end{array}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}24 & 2 & -1 & 25\\ 0 & -29 & 47 & 83\\ 0 & 0 & -9737 & -29211\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \cdot(-1/9737)\end{array}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}24 & 2 & -1 & 25\\ 0 & -29 & 47 & 83\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right).$$

Будемо мати, що $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}\widetilde{A}=3=n=3\Rightarrow$ система сумісна і має єдиний розв'язок. Запишемо систему, що відповідає отриманій ступінчастій матриці і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} 24x_1+2x_2-x_3=25, \\ \quad -29x_2+47x_3=83, \\ \qquad x_3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{25-2\cdot 2+3}{24}=\dfrac{24}{24}=1, \\ x_2=\dfrac{83-47\cdot 3}{-29}=\dfrac{-58}{-29}=2, \\ x_3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=3. \end{cases}$$

б) Розв'яжемо систему за формулами Крамера. Для цього обчислимо визначники:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 24 & 2 & -1 \\ 2 & -19 & 3 \\ 1 & 5 & -22 \end{vmatrix}=9737,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 25 & 2 & -1 \\ -27 & -19 & 3 \\ -55 & 5 & -22 \end{vmatrix}=9737,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 24 & 25 & -1 \\ 2 & -27 & 3 \\ 1 & -55 & -22 \end{vmatrix}=19474,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 24 & 2 & 25 \\ 2 & -19 & -27 \\ 1 & 5 & -55 \end{vmatrix}=29211.$$

Будемо мати: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{9737}{9737}=1$, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{19474}{9737}=2$, $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{29211}{9737}=3$.

в) Розв'яжемо систему засобами матричного числення. Для цього перепишемо систему в матричному вигляді: $AX=B$, де $A=\begin{pmatrix} 24 & 2 & -1 \\ 2 & -19 & 3 \\ 1 & 5 & -22 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 25 \\ -27 \\ -55 \end{pmatrix}$.

Розв'язок буде: $X=A^{-1}B$. Знайдемо обернену матрицю, тобто A^{-1}, за допомогою елементарних перетворень:

Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -19 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -22 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -\mathrm{III}\cdot 2 \\ \cdot 24-\mathrm{I} \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -29 & 47 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 118 & -527 & 1 & 0 & 24 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot 29+\mathrm{II}\cdot 2 \\ \\ \cdot 29-\mathrm{II}\cdot 118 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 696 & 0 & 65 & 29 & 2 & -4 \\ 0 & -29 & 47 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9737 & -29 & 118 & 460 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot 749+\mathrm{III}\cdot 5 \\ \cdot 9737+\mathrm{III}\cdot 47 \\ \cdot(-1) \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 521304 & 0 & 0 & 21576 & 2088 & -696 \\ 0 & -282373 & 0 & -1363 & 15283 & 2146 \\ 0 & 0 & 9737 & 29 & -118 & -460 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot 13/696 \\ \cdot(-1/29) \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 9737 & 0 & 0 & 403 & 39 & -13 \\ 0 & 9737 & 0 & 47 & -527 & -74 \\ 0 & 0 & 9737 & 29 & -118 & -460 \end{array}\right).$$

Будемо мати: $A^{-1}=\dfrac{1}{9737}\begin{pmatrix} 403 & 39 & -13 \\ 47 & -527 & -74 \\ 29 & -118 & -460 \end{pmatrix}$. Підставимо та отримаємо:

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{9737}\begin{pmatrix} 403 & 39 & -13 \\ 47 & -527 & -75 \\ 29 & -118 & -460 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 25 \\ -27 \\ -55 \end{pmatrix}=\frac{1}{9737}\begin{pmatrix} 10075-1053+715 \\ 1175+14229+4070 \\ 725+3186+25300 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9737}\begin{pmatrix} 9737 \\ 19474 \\ 29211 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (знайти загальний розв’язок і ФСР):

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=0. \end{cases}$$

Розв’язання.

Приведемо матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 3-\mathrm{I}\cdot 2 \\ -\mathrm{II}\cdot 2 \end{matrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & 7 & -11 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{II} \end{matrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будемо мати, що $\mathrm{rang}A=2<n=3\Rightarrow$ система сумісна і має безліч розв’язків, $n-r=3-2=1$ – кількість розв’язків ФСР. Запишемо систему, що відповідає отриманій ступінчастій матриці і розв’яжемо її:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=0, \\ -7x_2+11x_3=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=-\dfrac{5}{7}x_3, \\ x_2=\dfrac{11}{7}x_3 \end{cases}$$ – загальний розв’язок;

$$\begin{cases} x_1=-5, \\ x_2=11, \\ x_3=7 \end{cases}$$ – фундаментальна система розв’язків.