ІНДИВІДУАЛЬНЕ ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 2

1. Знайдіть лінійну залежність векторів $\overline{a}(24;\ 2;\ 1)$, $\overline{b}(2;\ -19;\ 5)$, $\overline{c}(-1;\ 3;\ -22)$, $\overline{d}(50;\ -54;\ -110)$.

Розв'язання.

Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ лінійно залежні, тому один з них є лінійною комбінацією інших векторів, наприклад, $\overline{d} = x_1\overline{a} + x_2\overline{b} + x_3\overline{c}$. Підставивши координати векторів, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 24x_1 + 2x_2 - x_3 = 50, \\ 2x_1 - 19x_2 + 3x_3 = -54, \\ x_1 + 5x_2 - 22x_3 = -110. \end{cases}$$

Приведемо розширену матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 50 \\ 2 & -19 & 3 & -54 \\ 1 & 5 & -22 & -110 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -\mathrm{III}\cdot 2 \\ \cdot 24 - \mathrm{I} \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 50 \\ 0 & -29 & 47 & 166 \\ 0 & 118 & -527 & -2690 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot 29 + \mathrm{II}\cdot 118 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 50 \\ 0 & -29 & 47 & 166 \\ 0 & 0 & -9737 & -58422 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1/9737) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 50 \\ 0 & -29 & 47 & 166 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right).$$

Будемо мати, що $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}\widetilde{A} = 3 = n = 3 \Rightarrow$ система сумісна і має єдиний розв'язок. Запишемо систему, що відповідає отриманій ступінчастій матриці і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} 24x_1 + 2x_2 - x_3 = 50, \\ \quad -29x_2 + 47x_3 = 166, \\ \qquad x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{50 - 2\cdot 4 + 6}{24} = \dfrac{48}{24} = 2, \\ x_2 = \dfrac{166 - 47\cdot 6}{-29} = \dfrac{-116}{-29} = 4, \\ x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 6. \end{cases}$$

Отже, лінійна залежність векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ має вигляд: $\overline{d} = 2\overline{a} + 4\overline{b} + 6\overline{c}$.

2. Дано вектори $\overline{a} = -68\overline{m} + 6\overline{n}$ **і** $\overline{b} = 2\overline{m} - 102\overline{n}$, **де** $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 5$, $\angle(\overline{m}, \overline{n}) = \dfrac{\pi}{2}$. **Знайти:**

1) $(-\overline{a} + 2\overline{b})\cdot(2\overline{a} + 8\overline{b})$;

2) $\cos\left(\overline{a} \,\widehat{,}\, \overline{b}\right)$ **(відповідь округліть до тисячних);**

3) $\left|\left[-\overline{a} + 2\overline{b}, 2\overline{a} + 8\overline{b}\right]\right|$;

4) площу трикутника, побудованого на векторах $\overline{a}$ **і** $\overline{b}$.

Розв'язання.

1) Знайдемо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$: $\overline{a} = -68\overline{m} + 6\overline{n}$, $\overline{b} = 2\overline{m} - 102\overline{n}$. Потім

$$-\overline{a} + 2\overline{b} = 68\overline{m} - 6\overline{n} + 2(2\overline{m} - 102\overline{n}) = 68\overline{m} - 6\overline{n} + 4\overline{m} - 204\overline{n} = 72\overline{m} - 210\overline{n},$$

$$2\overline{a}+8\overline{b}=2\left(-68\overline{m}+6\overline{n}\right)+8\left(2\overline{m}-102\overline{n}\right)=-136\overline{m}+12\overline{n}+16\overline{m}-816\overline{n}=-120\overline{m}-804\overline{n},$$

$$\left(-\overline{a}+2\overline{b}\right)\cdot\left(2\overline{a}+8\overline{b}\right)=\left(72\overline{m}-210\overline{n}\right)\cdot\left(-120\overline{m}-804\overline{n}\right)=$$

$$=-72\overline{m}\cdot 120\overline{m}-72\overline{n}\cdot 804\overline{m}+210\overline{m}\cdot 120\overline{n}+210\overline{n}\cdot 804\overline{n}=$$

$$=-8640\overline{m}\cdot\overline{m}-57888\overline{n}\cdot\overline{m}+25200\overline{m}\cdot\overline{n}+168840\overline{n}\cdot\overline{n}=$$

$$=-8640\overline{m}\cdot\overline{m}-32688\overline{m}\cdot\overline{n}+168840\overline{n}\cdot\overline{n}=$$

$$=-8640\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{m}\right|-32688\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|\cdot\cos\left(\overline{m}\,\hat{,}\,\overline{n}\right)+168840\left|\overline{n}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|=$$

$$=-8640\cdot 3^2-32688\cdot 3\cdot 5\cdot\cos\frac{\pi}{2}+168840\cdot 5^2=-8640\cdot 3^2+168840\cdot 5^2=4143240.$$

2) Запишемо формулу для обчислення:

$$\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}.$$

Обчислимо необхідні величини:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left(-68\overline{m}+6\overline{n}\right)\cdot\left(2\overline{m}-102\overline{n}\right)=2\left(-34\overline{m}+3\overline{n}\right)\cdot 2\left(\overline{m}-51\overline{n}\right)=$$

$$=4\left(-34\overline{m}+3\overline{n}\right)\cdot\left(\overline{m}-51\overline{n}\right)=4\left(-34\overline{m}\cdot\overline{m}+3\overline{n}\cdot\overline{m}+34\overline{m}\cdot 51\overline{n}-3\overline{n}\cdot 51\overline{n}\right)=$$

$$=4\left(-34\overline{m}\cdot\overline{m}+1737\overline{m}\cdot\overline{n}-153\overline{n}\cdot\overline{n}\right)=$$

$$=4\left(-34\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{m}\right|+1737\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|\cdot\cos\left(\overline{m}\,\hat{,}\,\overline{n}\right)-153\left|\overline{n}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|\right)=$$

$$=4\left(-34\cdot 3^2+1737\cdot 3\cdot 5\cdot\cos\frac{\pi}{2}-153\cdot 5^2\right)=4\left(-34\cdot 3^2-153\cdot 5^2\right)=-4\cdot 4131=-16524,$$

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{\left(-68\overline{m}+6\overline{n}\right)^2}=\sqrt{4\left(-34\overline{m}+3\overline{n}\right)^2}=$$

$$=2\sqrt{(-34)^2\overline{m}\cdot\overline{m}-204\overline{m}\cdot\overline{n}+9\overline{n}\cdot\overline{n}}=$$

$$=2\sqrt{1156\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{m}\right|-204\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|\cdot\cos\left(\overline{m}\,\hat{,}\,\overline{n}\right)+9\left|\overline{n}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|}=$$

$$=2\sqrt{1156\cdot 3^2-204\cdot 3\cdot 5\cdot\cos\frac{\pi}{2}+9\cdot 5^2}=2\sqrt{1156\cdot 3^2+9\cdot 5^2}=2\sqrt{10629},$$

$$\left|\overline{b}\right|=\sqrt{\left(2\overline{m}-102\overline{n}\right)^2}=\sqrt{4\left(\overline{m}-51\overline{n}\right)^2}=$$

$$=2\sqrt{\overline{m}\cdot\overline{m}-102\overline{m}\cdot\overline{n}+51^2\overline{n}\cdot\overline{n}}=$$

$$=2\sqrt{\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{m}\right|-102\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|\cdot\cos\left(\overline{m}\,\hat{,}\,\overline{n}\right)+2601\left|\overline{n}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|}=$$

$$=2\sqrt{3^2-102\cdot 3\cdot 5\cdot\cos\frac{\pi}{2}+2601\cdot 5^2}=2\sqrt{3^2+2601\cdot 5^2}=2\sqrt{65034}.$$

Підставимо в формулу, отримаємо

$$\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)=\frac{-16524}{2\sqrt{10629}\cdot 2\sqrt{65034}}=\frac{-4131}{\sqrt{10629}\cdot\sqrt{65034}}\approx -0{,}157.$$

3) Скористаємося знайденими в пункті 1) векторами, будемо мати:

$$\left|\left[-\overline{a}+2\overline{b},2\overline{a}+8\overline{b}\right]\right|=\left|\left[72\overline{m}-210\overline{n},\,-120\overline{m}-804\overline{n}\right]\right|=$$

$$=\left|-72\cdot 120\left[\overline{m}\cdot\overline{m}\right]+210\cdot 120\left[\overline{n}\cdot\overline{m}\right]-72\cdot 804\left[\overline{m}\cdot\overline{n}\right]+210\cdot 804\left[\overline{n}\cdot\overline{n}\right]\right|=\left|-72\left(1154\left[\overline{m}\cdot\overline{n}\right]\right)\right|=$$

$$=83088\left|\left[\overline{m}\cdot\overline{n}\right]\right|=83088\cdot\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|\cdot\sin\left(\overline{m},\overset{\wedge}{}\overline{n}\right)=83088\cdot 3\cdot 5\cdot\sin\frac{\pi}{2}=$$

$$=83088\cdot 3\cdot 5=1246320.$$

4) Запишемо формулу площі трикутника, підставимо вихідні дані, будемо мати:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{a},\,\overline{b}\right]\right|=\frac{1}{2}\left|\left[-68\overline{m}+6\overline{n},\,2\overline{m}-102\overline{n}\right]\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left[4(-34\overline{m}+3\overline{n},\,\overline{m}-51\overline{n})\right]\right|=2\left|\left[-34\overline{m}+3\overline{n},\,\overline{m}-51\overline{n}\right]\right|=$$

$$=2\left|-34[\overline{m}\cdot\overline{m}]+3[\overline{n}\cdot\overline{m}]+1734[\overline{m}\cdot\overline{n}]-153[\overline{n}\cdot\overline{n}]\right|=2\left|1731[\overline{m}\cdot\overline{n}]\right|=$$

$$=3462\left|\left[\overline{m}\cdot\overline{n}\right]\right|=3462\cdot\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|\cdot\sin\left(\overline{m},\overset{\wedge}{}\overline{n}\right)=3462\cdot 3\cdot 5\cdot\sin\frac{\pi}{2}=$$

$$=3462\cdot 3\cdot 5=51930 \text{ (кв. од.)}$$

3. По координатах $A(-12;34;-24)$, $B(-2;-3;-1)$, $C(2;3;-4)$ для вказаних векторів знайти:

1) скалярний добуток векторів $\overline{a}=-2\overline{AB}+6\overline{BC}$ і $\overline{b}=2\overline{AC}-\overline{CB}$;

2) модуль векторного добутку векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (відповідь округліть до десятих);

3) координати точки *M*, яка ділить напрямлений відрізок *AB* у відношенні $N:2p$;

4) перевірити, чи ортогональні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

5) перевірити, чи колінеарні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

6) перевірити, компланарні вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}=(0,1,2)$;

7) сила $\overline{F}=\overline{a}$ прикладена до точки *A*. Обчислити роботу сили $\overline{F}$ у випадку, коли точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується в точку *B*, й модуль моменту сили $\overline{F}$ відносно точки *B* (відповідь округліть до одиниць);

8) обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках *A*, *B*, *C* и $D(0,0,34)$ (відповідь округліть до одиниць).

Розв'язання.

1) Знайдемо координати необхідних векторів:

$$\overline{AB}(-2+12;\,-3-34;\,-1+24)=(10;\,-37;\,23),\ -2\overline{AB}=-2(10;\,-37;\,23)=(-20;\,74;\,-46),$$

$$\overline{BC}(2+2;\,3+3;\,-4+1)=(4;\,6;\,-3),\ 6\overline{BC}=6(4;\,6;\,-3)=(24;\,36;\,-18),$$

$$\overline{a}=-2\overline{AB}+6\overline{BC}=(-20;\,74;\,-46)+(24;\,36;\,-18)=(4;\,110;\,-64);$$

$$\overline{AC}(2+12;\,3-34;\,-4+24)=(14;\,-31;\,20),\ 2\overline{AC}=2(14;\,-31;\,20)=(28;\,-62;\,40),$$

$$\overline{CB}(-2-2;\,-3-3;\,-1+4)=(-4;\,-6;\,3),$$

$$\overline{b}=2\overline{AC}-\overline{CB}=(28;\,-62;\,40)-(-4;\,-6;\,3)=(32;\,-56;\,37).$$

Тепер знайдемо скалярний добуток:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(4;\,110;\,-64)\cdot(32;\,-56;\,37)=4\cdot 32+110\cdot(-56)-64\cdot 37=128-6160-2368=-8400.$$

2) Спочатку знайдемо векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & 110 & -64\\ 32 & -56 & 37\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}110 & -64\\ -56 & 37\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}4 & -64\\ 32 & 37\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}4 & 110\\ 32 & -56\end{vmatrix}=$$

$$=486\bar{i}-2196\bar{j}-3744\bar{k}.$$

Тепер знайдемо модуль векторного добутку векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$$\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|=\sqrt{486^2+(-2196)^2+(-3744)^2}\approx 4367{,}6.$$

3) Скористаємося формулою ділення відрізка в даному відношенні в координатній формі:

$$x_M=\frac{x_A+\frac{34}{4}x_B}{1+\frac{34}{4}}=\frac{-12+\frac{17}{2}\cdot(-2)}{1+\frac{17}{2}}=\frac{-24-34}{2+17}=-\frac{58}{19},$$

$$y_M=\frac{y_A+\frac{34}{4}y_B}{1+\frac{34}{4}}=\frac{34+\frac{17}{2}\cdot(-3)}{1+\frac{17}{2}}=\frac{68-57}{2+17}=\frac{11}{19},$$

$$z_M=\frac{z_A+\frac{34}{4}z_B}{1+\frac{34}{4}}=\frac{-24+\frac{17}{2}\cdot(-1)}{1+\frac{17}{2}}=\frac{-48-17}{2+17}=-\frac{65}{19}.$$

Отже, $M\left(-\frac{58}{19},\frac{11}{19},-\frac{65}{19}\right)$.

4) Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ортогональні, якщо $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$. Враховуючи результат обчислень пункту 1), отримаємо $\bar{a}\cdot\bar{b}=-8400\neq 0$. Отже вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ не є ортогональними.

5) Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні, якщо $[\bar{a},\bar{b}]=\bar{0}$. Враховуючи результат обчислень пункту 1), отримаємо $[\bar{a},\bar{b}]=486\bar{i}-2196\bar{j}-3744\bar{k}\neq\bar{0}$. Отже вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ не є колінеарними.

6) Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}=(0{,}1{,}2)$ компланарні, якщо $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$. Обчислимо мішаний добуток:

$$\begin{vmatrix}4 & 110 & -64\\ 32 & -56 & 37\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-9684\neq 0,$$

отже, вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}=(0{,}1{,}2)$ не є компланарними.

7) Якщо вектор $\bar{F}=\bar{a}$ зображує силу, прикладену до якої-небудь точки *A*, а вектор $\bar{a}$ йде з деякої точки *A* в точку *B*, то робота цієї сили визначається формулою $A=\bar{F}\cdot\overline{BA}$.

Знайдемо координати необхідних векторів:

$$\bar{a}=(4;\,110;\,-64),\quad \overline{BA}=(-10;\,37;\,-23).$$

Тоді

$$A=\bar{F}\cdot\overline{BA}=\bar{a}\cdot\overline{BA}=4\cdot(-10)+110\cdot 37+(-64)\cdot(-23)=5502.$$

Якщо вектор $\bar{F}=\bar{a}$ зображує силу, прикладену до якої-небудь точки *A*, а вектор переміщення йде з деякої точки B в точку A, то вектор $\overline{M}_B = \overline{BA} \times \overline{a}$ являє собою момент сили F відносно точки B.

Обчислимо координати моменту сили відносно точки B, використовуючи координати векторів $\overline{a} = (4;\, 110;\, -64)$, $\overline{BA} = (-10;\, 37;\, -23)$:

$$\overline{M}_B = \overline{BA} \times \overline{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 110 & -64 \\ -10 & 37 & -23 \end{vmatrix} = -162\bar{i} + 732\bar{j} + 1248\bar{k} .$$

Модуль моменту сили $\overline{F} = \overline{a}$ відносно точки B буде дорівнювати:

$$\left| \overline{M}_B \right| = \left| \overline{BA} \times \overline{a} \right| = \sqrt{(-162)^2 + 732^2 + 1248^2} \approx 1456 .$$

8) Для обчислення об'єму трикутної піраміди знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять з вершини A: $\overline{AB}(10;\, -37;\, 23)$, $\overline{AC}(14;\, -31;\, 20)$, $\overline{AD}(12;\, -34;\, 58)$. Знайдемо мішаний добуток цих векторів:

$$\left(\overline{AB},\, \overline{AC},\, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} 10 & -37 & 23 \\ 14 & -31 & 20 \\ 12 & -34 & 58 \end{vmatrix} = -7592 .$$

Оскільки об'єм піраміди дорівнює $\dfrac{1}{6}$ частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, то $V \approx 1265$ (куб. од.).

4. Дано координати вершин ΔABC: $A(34;\, -24)$, $B(-3;\, -1)$, $C(3;\, -4)$. Знайти:

1) рівняння і довжину сторони AC (відповідь округліть до десятих);

2) рівняння медіани m_C;

3) рівняння висоти h_B, опущеної з вершини B;

4) довжину висоти h_B (відповідь округліть до десятих);

5) точку перетину медіани m_C і висоти h_B;

6) кут між стороною AC і медіаною m_C (у градусах, відповідь округліть до одиниць);

7) рівняння прямої, що проходить через вершину B паралельно стороні AC.

Розв'язання.

1) Складемо рівняння сторони AC як рівняння прямої за двома точками:

$$AC\colon\ \frac{x-34}{3-34} = \frac{y+24}{-4+24},$$

$$\frac{x-34}{-31} = \frac{y+24}{20},$$

$$20(x-34) = -31(y+24),$$

$$20x - 680 = -31y - 744,$$

$$20x + 31y + 64 = 0 \text{ – загальне рівняння сторони } AC .$$

Довжину сторони AC знайдемо як відстань між двома точками:

$$AC = \sqrt{(3-34)^2 + (-4+24)^2} = \sqrt{(-31)^2 + 20^2} \approx 36{,}9 \text{ (од.)}.$$

2) Медіана m_C ділить сторону AB навпіл, тому координати точки M – середини AB будуть: $M\left(\frac{34-3}{2},\frac{-24-1}{2}\right)$, $M\left(\frac{31}{2},-\frac{25}{2}\right)$. Тепер складемо рівняння медіани як рівняння прямої за двома точками:

$$m_C:\ \frac{x-3}{\frac{31}{2}-3}=\frac{y+4}{-\frac{25}{2}+4},$$

$$\frac{x-3}{\frac{25}{2}}=\frac{y+4}{-\frac{17}{2}},$$

$$\frac{x-3}{25}=\frac{y+4}{-17},$$

$$-17(x-3)=25(y+4),$$

$$-17x+51=25y+100,$$

$-17x-25y-49=0$ або $17x+25y+49=0$ – загальне рівняння медіани m_C.

3) Висота h_B – це перпендикуляр до сторони AC, тому її нормальний вектор колінеарний до напрямного вектора прямої AC, тобто $\overline{n}_h(-31,20)$. Складемо рівняння висоти h_B за точкою та нормальним вектором:

$$-31(x+3)+20(y+1)=0,$$

$$-31x-93+20y+20=0,$$

$-31x+20y-73=0$ або $31x-20y+73=0$ – загальне рівняння висоти h_B.

4) Довжину висоти h_B знайдемо як вершини B від сторони AC, тобто за формулою відстані від точки до прямої. Будемо мати:

$$d=\frac{|20\cdot(-3)+31\cdot(-1)+64|}{\sqrt{20^2+31^2}}=\frac{27}{\sqrt{400+961}}=\frac{27}{\sqrt{1361}}=0{,}7 \text{ (од.)}.$$

5) Точку перетину медіани m_C і висоти h_B знайдемо як розв'язок системи рівнянь цих прямих:

$$\begin{cases}17x+25y+49=0,\\ 31x-20y+73=0\end{cases} \text{ або } \begin{cases}17x+25y=-49,\\ 31x-20y=-73.\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}17 & 25\\ 31 & -20\end{vmatrix}=-1115, \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}-49 & 25\\ -73 & -20\end{vmatrix}=2805, \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}17 & -49\\ 31 & -73\end{vmatrix}=278;$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{2805}{-1115}=-\frac{561}{223}, \qquad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{278}{-1115}=-\frac{278}{1115}.$$

Отже, точка перетину має вигляд $\left(-\frac{561}{223};-\frac{278}{1115}\right)$.

6) Знайдемо кут між стороною AC і медіаною m_C за формулою:

$$\cos\left(\widehat{AC,m_C}\right)=\cos\left(\widehat{\overline{n}_{AC},\overline{n}_{m_C}}\right)=\frac{\overline{n}_{AC}\cdot\overline{n}_{m_C}}{|\overline{n}_{AC}|\cdot|\overline{n}_{m_C}|}.$$

Підставимо відповідні значення, отримаємо:

$$\cos\left(\widehat{AC, m_C}\right)=\frac{20\cdot 17+31\cdot 25}{\sqrt{20^2+31^2}\cdot\sqrt{17^2+25^2}}=\frac{1115}{\sqrt{1361}\cdot\sqrt{914}}\approx 0{,}9997,\quad \angle(AC, m_C)\approx 1^\circ.$$

7) Шукана пряма паралельна до сторони AC, тому її нормальний вектор колінеарний до нормального вектора прямої AC, тобто $\overline{n}_h(20,31)$. Складемо рівняння прямої за точкою B та нормальним вектором:

$$20(x+3)+31(y+1)=0,$$
$$20x+60+31y+31=0,$$
$$20x+31y+91=0 \text{ – загальне рівняння шуканої прямої.}$$

5. Дано чотири точки: $D(0;\ 0;\ 2)$, $A(34;\ -24;\ 1)$, $B(-3;\ -2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ -4)$. Знайти:

1) рівняння ребер AB, AD, BD;
2) рівняння граней ABC, ABD;
3) рівняння висоти H_D, опущеної з точки D на площину ABC;
4) довжину висоти H_D (відповідь округліть до десятих);
5) косинус кута між ребрами AB і AD (відповідь округліть до тисячних);
6) синус кута між ребром AD і гранню ABC (відповідь округліть до тисячних);
7) косинус кута між гранями ABC і ABD (відповідь округліть до тисячних);
8) рівняння прямої, що проходить через точку C перпендикулярно площині ABD;
9) рівняння площини, що проходить через точку C перпендикулярно прямій BD.

Розв'язання.

1) Складемо рівняння ребер як рівняння прямої за двома точками:

$$AB:\ \frac{x-34}{-3-34}=\frac{y+24}{-2+24}=\frac{z-1}{1-1},$$
$$\frac{x-34}{-37}=\frac{y+24}{22}=\frac{z-1}{0};$$
$$AD:\ \frac{x-34}{0-34}=\frac{y+24}{0+24}=\frac{z-1}{2-1},$$
$$\frac{x-34}{-34}=\frac{y+24}{24}=\frac{z-1}{1};$$
$$BD:\ \frac{x+3}{0+3}=\frac{y+2}{0+2}=\frac{z-1}{2-1},$$
$$\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

2) Складемо рівняння грані ABC за трьома точками:

$$\begin{vmatrix} x-34 & y+24 & z-1 \\ -3-34 & -2+24 & 1-1 \\ 2-34 & 3+24 & -4-1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-34 & y+24 & z-1 \\ -37 & 22 & 0 \\ -32 & 27 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-34 & y+24 & z-1 \\ -37 & 22 & 0 \\ -32 & 27 & -5 \end{vmatrix} = (x-34)\begin{vmatrix} 22 & 0 \\ 27 & -5 \end{vmatrix} - (y+24)\begin{vmatrix} -37 & 0 \\ -32 & -5 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -37 & 22 \\ -32 & 27 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-34)\cdot(-110) - (y+24)\cdot 185 + (z-1)\cdot(-295) =$$

$$= -110x + 3740 - 185y - 4440 - 295z + 295 = -110x - 185y - 295z - 405,$$

$$-110x - 185y - 295z - 405 = 0,$$

$$22x + 37y + 59z + 81 = 0 \text{ – рівняння грані } ABC.$$

Аналогічно зробимо для грані ABD:

$$\begin{vmatrix} x-34 & y+24 & z-1 \\ -3-34 & -2+24 & 1-1 \\ 0-34 & 0+24 & 2-1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-34 & y+24 & z-1 \\ -37 & 22 & 0 \\ -34 & 24 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-34 & y+24 & z-1 \\ -37 & 22 & 0 \\ -34 & 24 & 1 \end{vmatrix} = (x-34)\begin{vmatrix} 22 & 0 \\ 24 & 1 \end{vmatrix} - (y+24)\begin{vmatrix} -37 & 0 \\ -34 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -37 & 22 \\ -34 & 24 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-34)\cdot 22 - (y+24)\cdot(-37) + (z-1)\cdot(-140) =$$

$$= 22x - 748 + 37y + 888 - 140z + 140 = 22x + 37y - 140z + 280,$$

$$22x + 37y - 140z + 280 = 0 \text{ – рівняння грані } ABD.$$

3) Висота піраміди H_D, опущена з вершини D, це перпендикуляр до грані ABC, тому її напрямний вектор колінеарний до нормального вектора грані ABC, тобто $\bar{a}_{H_D}(22,37,59)$. Складемо рівняння висоти H_D за точкою D та напрямним вектором $\bar{a}_{H_D}(22,37,59)$:

$$H_D:\ \frac{x-0}{22} = \frac{y-0}{37} = \frac{z-2}{59},$$

$$\frac{x}{22} = \frac{y}{37} = \frac{z-2}{59} \text{ – канонічне рівняння висоти піраміди } H_D.$$

4) Довжину висоти H_D знайдемо як відстань вершини D від грані ABC за формулою відстані від точки до площини. Будемо мати:

$$d = \frac{|22\cdot 0 + 37\cdot 0 + 59\cdot 2 + 81|}{\sqrt{22^2 + 37^2 + 59^2}} = \frac{199}{\sqrt{484 + 1369 + 3481}} = \frac{199}{\sqrt{5334}} \approx 2{,}7 \text{ (од.).}$$

5) Знайдемо косинус кут між ребрами AB і AD за формулою:

$$\cos\left(AB, \hat{\ } AD\right) = \cos\left(\bar{a}_{AB}, \hat{\ } \bar{a}_{AD}\right) = \frac{|\bar{a}_{AB}\cdot\bar{a}_{AD}|}{|\bar{a}_{AB}|\cdot|\bar{a}_{AD}|} =$$

$$= \frac{\left|-37\cdot(-34)+22\cdot 24+0\cdot 1\right|}{\sqrt{(-37)^2+22^2+0^2}\cdot\sqrt{(-34)^2+24^2+1^2}} = \frac{1786}{\sqrt{1853}\cdot\sqrt{1733}} \approx 0{,}997.$$

6) Знайдемо синус кута між ребром AD і гранню ABC за формулою:

$$\sin\left(AD,^{\wedge}\ ABC\right) = \sin\left(\overline{a}_{AD},^{\wedge}\ \overline{n}_{ABC}\right) = \frac{\left|\overline{a}_{AD}\cdot\overline{n}_{ABC}\right|}{\left|\overline{a}_{AD}\right|\cdot\left|\overline{n}_{ABC}\right|} =$$

$$= \frac{\left|-34\cdot 22+24\cdot 37+1\cdot 59\right|}{\sqrt{(-34)^2+24^2+1^2}\cdot\sqrt{22^2+37^2+59^2}} = \frac{199}{\sqrt{1733}\cdot\sqrt{5334}} \approx 0{,}065.$$

7) Знайдемо косинус кут між гранями ABC і ABD за формулою:

$$\cos\left(ABC,^{\wedge}\ ABD\right) = \cos\left(\overline{n}_{ABC},^{\wedge}\ \overline{n}_{ABD}\right) = \frac{\left|\overline{n}_{ABC}\cdot\overline{n}_{ABD}\right|}{\left|\overline{n}_{ABC}\right|\cdot\left|\overline{n}_{ABD}\right|} =$$

$$= \frac{\left|22\cdot 22+37\cdot 37+59\cdot(-140)\right|}{\sqrt{22^2+37^2+59^2}\cdot\sqrt{22^2+37^2+(-140)^2}} = \frac{6407}{\sqrt{5334}\cdot\sqrt{21453}} \approx 0{,}599.$$

8) Шукана пряма перпендикулярна площині ABD, тому її напрямний вектор колінеарний до нормального вектора площини ABD, тобто $\overline{n}_{ABD}(22,37,-140)$. Складемо рівняння прямої за точкою C та напрямним вектором:

$$\frac{x-2}{22} = \frac{y-3}{37} = \frac{z+4}{-140}$$ – канонічне рівняння шуканої прямої.

9) Шукана площина перпендикулярна прямій BD, тому її нормальний вектор колінеарний до напрямного вектора прямої BD, тобто $\overline{a}_{BD}(3,2,1)$. Складемо рівняння площини за точкою C та нормальним вектором:

$$3\cdot(x-2)+2\cdot(y-3)+1\cdot(z+4)=0,$$

$$3x-6+2y-6+z+4=0,$$

$$3x+2y+z-8=0$$ – загальне рівняння шуканої площини.