

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЧЕРНІГІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

БІОМЕТРІЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з дисципліни

для студентів денної форми навчання

за освітнім ступенем бакалавр

зі спеціальностей 205 «Лісове господарство», 201 «Агронія»

Обговорено і рекомендовано на засіданні
кафедри аграрних технологій та лісового господарства
Протокол №3 від 30 жовтня 2020 року

Чернігів НУ «Чернігівська політехніка» – 2020

Біометрія. Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з дисципліни для студентів денної форми навчання за освітнім ступенем бакалавр зі спеціальностей 205 «Лісове господарство», 201 «Агрономія» Чернігів: / Укладач : К. М. Кудряшова, Г.І. Рябуха, Л.А. Шевченко . – Чернігів НУ «Чернігівська політехніка», 2020. – 32с.

Укладач: Катерина Миколаївна Кудряшова, доцент кафедри аграрних технологій та лісового господарства, к.е.н.
Рябуха Галина Ігорівна, доцент кафедри туризму, к.е.н.
Шевченко Любов Анатоліївна, доцент кафедри аграрних технологій та лісового господарства, к.с.-г.н.

Відповідальний за випуск: Михайло Михайлович Селінний, завідувач кафедри аграрних технологій та лісового господарства, к.е.н., доцент

Рецензент: Корма Олександр Михайлович, доцент кафедри аграрних технологій та лісового господарства, к.б.н.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
1 Лабораторна робота №1. Групування результатів спостереження, графіки розподілу.....	6
2 Лабораторна робота №2. Визначення середньої арифметичної і біометричних показників ряду розподілу.....	12
3 Лабораторна робота №3. Помилки репрезентативності.....	16
4 Лабораторна робота №4. Визначення числових показників кореляції і їх достовірності.....	18
5 Лабораторна робота №5. Регресійний аналіз. Визначення коефіцієнтів регресії.....	21
6 Лабораторна робота №6. Дисперсійний аналіз однофакторних рівномірних і нерівномірних комплексів малих груп.....	24
7 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ РОБІТ.....	28
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	29
ДОДАТКИ.....	30

ВСТУП

Біометрія – галузь знань про статистичний аналіз масових явищ в біології, тобто таких явищ, у масі яких виявляються закономірності, що не виявляються на одиночних випадках спостережень. Предметом біометрії є будь-який біологічний об'єкт, якщо спостереження, що проводяться над ним, отримують кількісне вираження.

Біометрія як відносно самостійна наукова дисципліна склалася в другій половині XIX ст. Вона в своєму історичному розвитку пройшла довгий і складний шлях – від чисто словесного опису біологічних об'єктів до їх вимірів, від статистичних зведень і таблиць до статистичного аналізу масових явищ. У історії біометрії можна відзначити декілька періодів або етапів.

Перший період, описовий, бере свій початок в XVII столітті. В цей час відбувається перехід від словесного опису і елементарного кількісного обліку біологічних об'єктів до їх числових характеристик. Виміри розглядаються як метод наукового пізнання живої природи. Актуальним для цього часу став афоризм Галілея (1564–1642): „Вимірйой все вимірйоване і зроби не вимірйоване вимірйованим”.

Другий період, що розпочався в першій половині XIX ст., ознаменований роботами А. Кетле. В цей час закладаються основи біометрії як науки, метою якої є не опис явищ, а їх аналіз, направлений на відкриття статистичних закономірностей, які діють у сфері масових явищ. Біометрію розглядають одночасно і як науку, і як метод наукового пізнання.

Третій період, формалістичний, характеризується виникненням і розвитком англійської біометричної школи на чолі з Ф. Гальтоном и К. Пірсоном. У цей час створюють математичний апарат біометрії і роблять спроби застосувати його до вивчення проблеми спадковості і мінливості організмів.

Четвертий період, раціоналістичний, розпочинається з 1902 р. класичними дослідженнями В. Йогансена, який показав, що в області біологічних досліджень перше місце повинне належати біологічному експерименту, а не математиці. Математичні методи повинні застосовуватися як допоміжний апарат при обробці експериментальних даних.

П'ятий період в розвитку біометрії відкривають класичні роботи В. Госсетома (Стьюдента) і Р. Фішера. У цей час створюються основи теорії малої вибірки, теорії планування експериментів, вводяться у вміст біометрії нові терміни і поняття. Всі ці новини пов'язані з революцією в біології, з ломкою застарілих принципів і понять в області дослідницької роботи, з

посиленням процесу математизації біології. Відбувається все більш помітна спеціалізація біометрії, використання її методів в самих різних областях біології, медицини, антропології та інших суміжних науках.

Сучасна біометрія – це розділ біології, змістом якого є планування спостережень і статистична обробка їхніх результатів. Характерною рисою біометрії є також те, що її методи застосовують при аналізі не окремих фактів, а їхніх сукупностей, тобто явищ масового характеру, у сфері яких виявляються закономірності, не властиві одиничним спостереженням. Біометрія необхідна і при вивченні спадковості і повторюваності господарсько важливих ознак, вимірі зв'язків між ними й у багатьох інших випадках.

На сучасному етапі біометрія ґрунтується не тільки на таких математичних дисциплінах, як теорія імовірності і математична статистика, але і на інформатиці і програмуванні на ПК. Це наближає біометрію до комп'ютерних дисциплін. Використання спеціальних комп'ютерних програм знайомить здобувачів вищої освіти з визначеними видами стандартного програмного забезпечення і підвищує якість навчання.

Головною метою методичних вказівок є систематизація та закріплення теоретичних знань, одержаних здобувачами вищої освіти на лекціях з дисципліни «Біометрія», а також уміння практично використовувати ці знання для вирішення реальних задач при математичній обробці польових або лабораторних даних за допомогою обчислювальної техніки.

Методичні вказівки розроблені для забезпечення навчальної дисципліни «Біометрія». Обсяг викладання дисципліни за навчальним планом становить 120 годин.

Лабораторна робота №1
**ТЕМА: «ГРУПУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ СПОСТЕРЕЖЕННЯ,
ГРАФІКИ РОЗПОДІЛУ»**

Мета роботи: навчитись систематизувати результати спостереження, будувати варіаційний ряд, визначати розмах варіації, моду, медіану та величину класового інтервалу, відобразити графічно варіаційний ряд.

Ключові слова: *варіанта, частота, варіаційний ряд, розмах варіації, інтервал, мода, медіана, класовий інтервал.*

Вступні пояснення.

Для обчислення статистичних показників числових сукупностей досить часто використовують ряд розподілу – *варіаційний ряд*.

Варіаційний ряд – це двомірний ряд чисел, що складається з варіант і відповідних їм частотам, розміщений у порядку зростання або спадання.

Варіанта – це окреме значення ознаки, яке вона приймає в ряду розподілу.

Частотами називають чисельності окремих варіант або кожної групи варіаційного ряду. Частоти можуть бути виражені як в абсолютних величинах, тобто числом будь-яких одиниць, так і у відносних величинах у вигляді часток і процентів до підсумку.

Показники різноманітності ознаки.

Розмах варіації (R) – різниця між найбільшим та найменшим числових значень із сукупності (див. формулу 1.1).

$$R = x_{\max} - x_{\min}, \quad (1.1)$$

де x_{\max} – найбільше значення вибірки;

x_{\min} – найменше значення вибірки.

При складанні варіаційного ряду всі значення ознаки розбиваються на рівні інтервали – *класи*.

Оптимальне *число класів* (груп) визначається за формулою Стерджеса:

$$m = 1 + 3,322 \lg n, \quad (1.2)$$

де m – число інтервалів;*

n – обсяг сукупності.

* Величину m округлюють у більшу сторону до найближчого цілого числа.

Величина класів (h) або величина класового інтервалу дорівнює розмаху варіації, поділеного на неокруглене число класів. Величина класів встановлюється за формулою:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m}, \quad (1.3)$$

Отримане дробове число при діленні округлюють до найближчого цілого числа. Наприклад, якщо отримано число 21,4, то за величину класового проміжку h потрібно взяти 22.

Межі класів. Кінець кожного класу повинен бути менше початку наступного на величину, рівну прийнятій точності вимірювання (ξ).

$$W_{s(1)} = x_{\max} + 0.5 \cdot k - \xi \qquad W_{n(1)} = x_{\max} - 0.5 \cdot k \quad (1.4)$$

Мода – значення випадкової величини, що трапляється найчастіше в сукупності спостережень.

Медіана (\tilde{x}) – середнє значення, що відокремлює більшу половину і меншу половину вибірки, визначається за формулою 1.5 для непарної кількості варіант і 1.6 для парної кількості варіант:

$$\tilde{x} = X_{\frac{n+1}{2}}, \quad (1.5)$$

$$\tilde{x} = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}. \quad (1.6)$$

Показники розподілу ознаки у MS Excel розраховуються за функціями, які наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Функції в MS Excel

Показник	MS Excel
Найменше значення	МИН
Найбільше значення	МАКС
Обсяг сукупності	СЧЁТ
Мода	МОДА
Медіана	МЕДИАНА

Вставка функцій / у вікні *Майстер функцій* в полі *Категорія* клацніть *Статистичні*, у полі *Функція* за допомогою смуги прокрутки перегорніть список назви функцій, знайдіть і оберіть необхідну функцію / клацніть і ОК (див. рисунок 1.1).

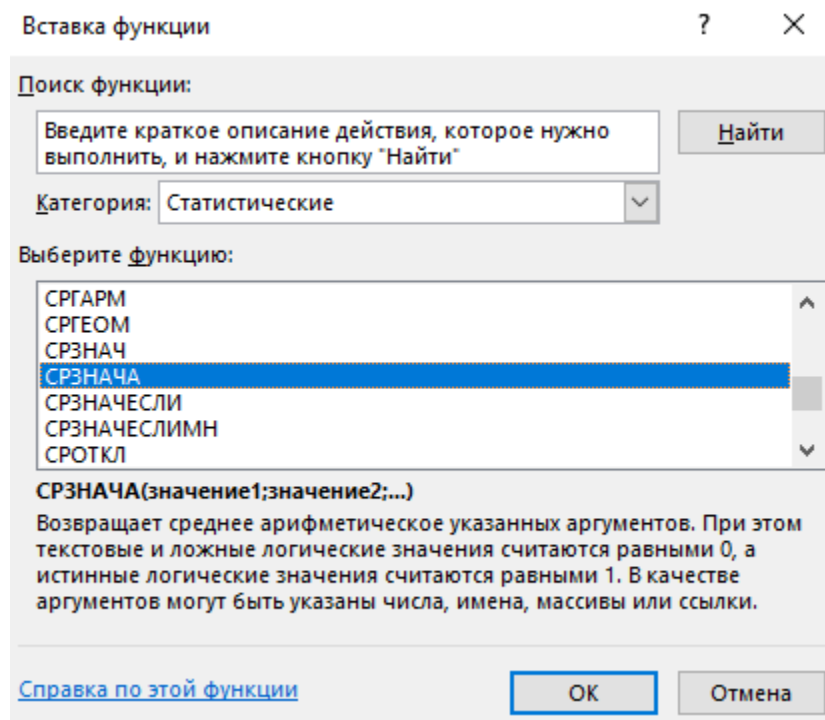


Рисунок 1.1 – Статистичні функції у MS Excel

Наприклад, щоб визначити обсяг сукупності (n) використовують функцію **СЧЁТ** (див. рисунок 1.2).

	A	B	C
1	x		
2	1		
3	2		
4	5		
5	9		
6	10		
7	12		
8	n		=СЧЁТ(A2:A7)

Рисунок 1.2 – Визначення обсягу сукупності (n)

У MS Excel графічне зображення варіаційного ряду здійснюється за допомогою засобів **Аналіз даних**. Для цього необхідно виконати наступні дії:

1. Підключити надбудову *Пакет аналізу MS Excel: Сервіс / Надбудови /* у вікні *Надбудови* встановить прапорець *Пакет аналізу* та *ОК* (див. рис. 1.3).

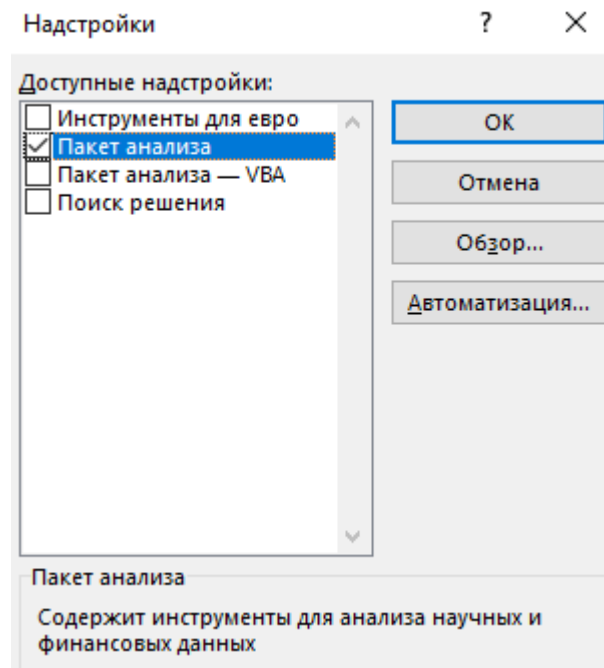


Рисунок 1.3 – Підключення Пакету аналізу

2. Побудувати гістограму за даними: *Аналіз даних / Гістограма* і *ОК* / у вікні *Гістограма* в розділі *Вхідні дані* в поле *Вхідний інтервал* введіть посилання на діапазон комірок (наприклад *A2:A12*) і встановить прапорець *Мітки* / в розділі *параметри виводу* включити перемикач *Вихідний інтервал* і вкажіть будь-яку вільну комірку робочого листа (наприклад *A19*) / встановить прапорець *Інтегральний відсоток* і *Вивід графіка* і *ОК* (див. рис. 1.4 і 1.5).

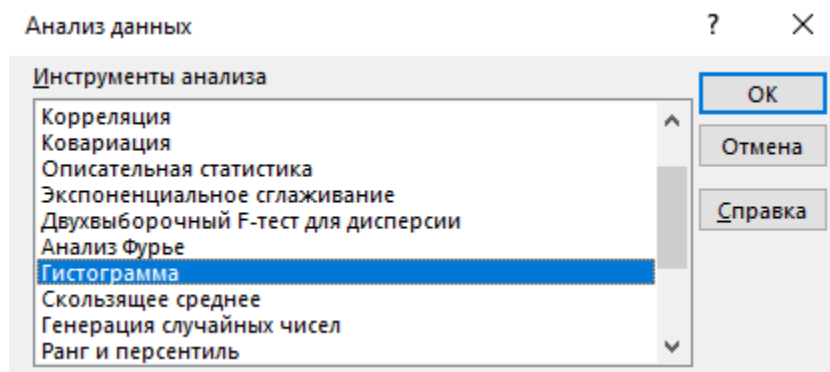


Рисунок 1.4 – Побудова гістограми

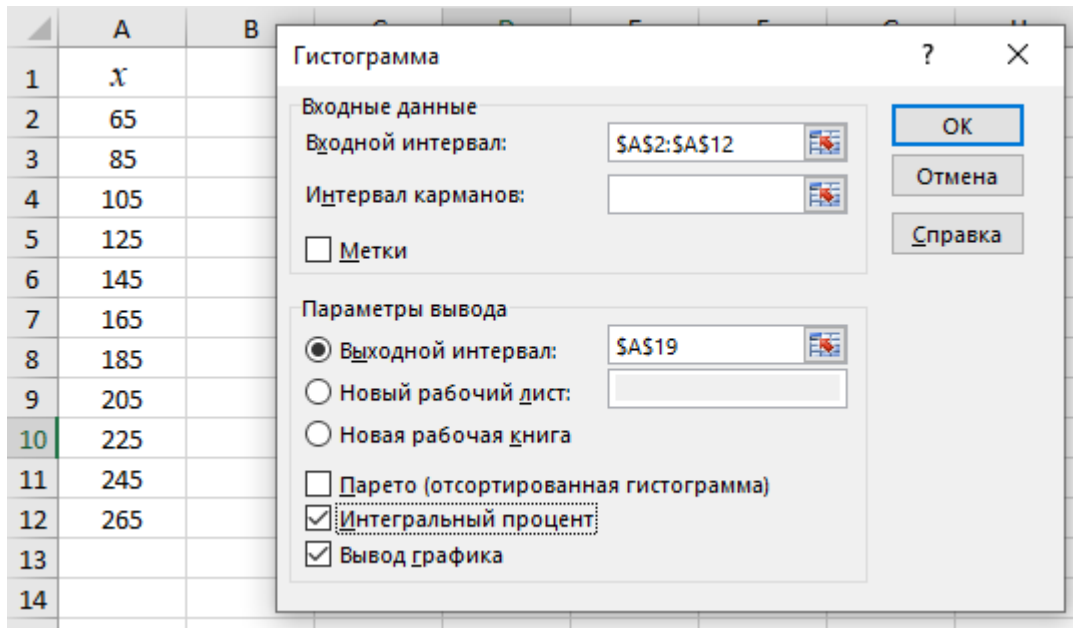


Рисунок 1.5 – Побудова гістограми

Завдання для виконання.

Завдання 1. При вивченні маси тіла диких кабанів були отримані дані, які наведені в таблиці 1.2. Необхідно визначити об'єкт дослідження, ознаку, статистичний ряд; побудувати варіаційний ряд; розрахувати розмах варіації, величину класового інтервалу, медіану.

Таблиця 1.2

Вихідні дані

Маса, кг (x)	95	99	105	97	110	90	150	120	108	96
------------------	----	----	-----	----	-----	----	-----	-----	-----	----

Завдання 2. При вивченні особливостей будови крон дерев в журнал занесені такі дані щодо розмірів площ їх горизонтальних проєкцій (в m^2):

- 1) 3, 4, 2, 8, 6, 4, 3, 2, 4, 5.
- 2) 2, 7, 4, 7, 5, 5, 7, 2, 4, 5.
- 3) 2, 5, 6, 5, 2, 3, 4, 8, 3, 6.
- 4) 2, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 4, 3, 8.

На основі чотирьох вибірок побудуйте інтервальний варіаційний ряд, розрахуйте ліміти варіації, розмах варіації, моду і медіану.

Завдання 3. Виміряли висоту рослин травостою на лучному газоні через тиждень після скошування. Отримали наступні результати: 22; 23; 22; 22; 17; 23; 20; 20; 21; 25; 27; 24; 22; 21; 16; 23; 18; 21; 24; 18; 21; 22; 25; 23; 21; 20; 25; 18; 21; 21; 24; 25; 19; 18; 22; 25; 27; 19; 17; 18; 22; 23; 24; 19; 26; 21; 25; 25; 23; 27. Побудуйте варіаційний ряд. Розрахуйте ліміти варіації, розмах варіації,

величину класового інтервалу, моду і медіану. Також відобразити варіаційний ряд у вигляді варіаційної кривої.

Контрольні питання для самоперевірки

1. Що таке ознака?
2. Що таке варіаційний ряд?
3. З яких елементів складається варіаційний ряд?
4. Назвіть показники різноманітності ознаки.

Лабораторна робота №2
ТЕМА «ВИЗНАЧЕННЯ СЕРЕДНЬОЇ АРИФМЕТИЧНОЇ І
БІОМЕТРИЧНИХ ПОКАЗНИКІВ РЯДУ РОЗПОДІЛУ»

Мета роботи: навчитись визначати середні величини і біометричні показники ряду розподілу.

Ключові слова: середня арифметична, дисперсія, стандартне відхилення.

Вступні пояснення. Для повної характеристики однорідної статистичної сукупності використовуються узагальнюючі кількісні характеристики – статистичні показники.

Статистичні показники – це логічно-обґрунтовані кількісні характеристики, які описують ряди розподілу і дають змогу порівнювати їх між собою. До статистичних показників ряду розподілу чисельності відносяться: середні параметричні величини (арифметична, квадратична, кубічна, геометрична, гармонічна) і непараметричні – структурні (медіана та мода). Середні величини, як показники центральної тенденції, характеризують центр ряду розподілу.

Середня арифметична (\bar{x}) – це величина, яка є центром розподілу, навколо якої групуються всі варіанти статистичної сукупності і розраховується за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.1)$$

де x – це варіанти, що входять до складу даної сукупності;

n – це загальне число варіант, або обсяг вибіркової сукупності.

Дисперсія (σ^2) – показник варіації, який вказує на характер розсіювання числових значень ознак розподілу чисельності, а також описує мінливість варіант відносно середнього значення і розраховується за формулами 2.2 (зважена) і 2.3 (незважена):

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f}, \quad (2.2)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}. \quad (2.3)$$

Стандартне відхилення – показник, який характеризує ступінь розсіювання варіант навколо середнього значення, описує криву нормального розподілу і дає уявлення про найбільш ймовірну середню помилку окремого спостереження даної сукупності.

Середнє квадратичне відхилення (σ) зважене і незважене розраховується відповідно за формулами 2.4 і 2.5:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f}}, \quad (2.4)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}. \quad (2.5)$$

Коефіцієнт варіації – це відносна величина, яка вказує на ступінь мінливості ознаки варіаційного ряду і розраховується за формулою:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}, \quad (2.6)$$

- при $V < 10\%$ – варіація незначна;
- при $V = 10-20\%$ – варіація середня;
- при $V > 20\%$ – варіація значна.

Дисперсія і стандартне відхилення виражаються в абсолютних величинах досліджуваної ознаки і можуть бути використані для порівняння ступеня мінливості тільки однорідних вибірок (вибірок, варіанти яких мають однакові одиниці вимірювання).

Коефіцієнт варіації виражається у відносних величинах (%) і може бути використаний для порівняння ступеня мінливості як однорідних так і неоднорідних вибірок.

Показники варіації у MS Excel розраховуються за функціями, які наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Функції в MS Excel

Показник	MS Excel
Середнє арифметичне	СРЗНАЧ
Середньоквадратичне відхилення	СТАНДОТКЛОН
Дисперсія	ДИСПА
Округлення значення ознаки	ОКРУГЛ
Корінь квадратний	КОРЕНЬ

Завдання для виконання.

Завдання 1. Заміряти довжину листків дубу звичайного, записати в зошит. З отриманих замірів скласти ранжирований варіаційний ряд. Охарактеризуйте як варіює досліджувана ознака. Визначити середню арифметичну, дисперсію, стандартне відхилення, коефіцієнт варіації.

Завдання 2. Визначали висоту саджанців сосни європейської (в дм), отримали наступні показники:

Таблиця 2.2

Вихідні дані

<i>Висота саджанців сосни, x_i</i>	65	85	105	125	145	165	185	205	225	245	265
<i>Число випадків, f_i</i>	6	0	4	8	17	27	30	10	10	5	2

Визначити середню арифметичну висоту саджанців сосни, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.

Завдання 3. Об'єми стовбурів 10 дорослих дерев клена звичайного мають такі значення (m^3): 1,2; 4,0; 2,4; 3,6; 0,8; 4,2; 4,6; 3,2; 3,6; 1,4. Визначити середній об'єм стовбура, використовуючи формули визначення простої середньої арифметичної, квадратичної і кубічної середніх. Результати проаналізуйте.

Завдання 4. Виміряно 10 діаметрів дерев, які мають значення (см): 8, 12, 18, 16, 8, 14, 12, 12, 14, 16. Визначити середній діаметр дерева за способом розрахунку простої середньої арифметичної і середньої квадратичної. Порівняти отримані дані.

Завдання 5. Вимірювали довжину листків дубу. Результати вимірювань розподілилися наступним чином:

Таблиця 2.3

Вихідні дані

<i>Довжина листка (x_i), см</i>	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<i>Число випадків (f_i)</i>	15	38	55	90	115	153	131	135	114	82	42	15	15

Визначити середню арифметичну довжину листків дубу, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.

Завдання 6. У сільському господарстві у звітному році урожайність зернових склала 28,2 ц/га, а у базовому – 30 ц/г. Планом на звітний рік передбачалось збільшення урожайності на 4%. Визначити виконання господарського плану з підвищення урожайності.

Контрольні питання для самоперевірки

1. Дайте визначення терміну «статистичні показники».
2. Які показники відносяться до середніх параметричних величин?
3. Які показники відносяться до середніх непараметричних величин?
4. Назвіть основні види середніх, які використовуються в лісовому господарстві.

Лабораторна робота №3
ТЕМА «ПОМИЛКИ РЕПРЕЗЕНТАТИВНОСТІ»

Мета роботи: отримати навички визначення достовірності емпіричних показників.

Ключові слова: помилка репрезентативності, середня квадратична помилка, «правило потрійної помилки»

Вступні пояснення. Розходження між величиною середньої арифметичної (\bar{x}) вибірки і величиною середньої арифметичної генеральної сукупності (M) називають *помилкою репрезентативності*, тобто помилкою, що допускається не в самому процесі вимірювальної роботи, а в результаті випадкового відбору варіант із генеральної сукупності при утворенні вибірки.

Величина статистичної помилки окремо взятої варіанти дорівнює квадратичному відхиленню, так як будь-який набутий емпіричний розподіл, що відповідає нормальному закону, практично укладається у межах трьох сігм, тобто $\bar{x} \pm 3\sigma$. Тому, помилку репрезентативності називають *середньою квадратичною помилкою*, або середньою помилкою (m). Таким чином, середня квадратична помилка окремо взятої варіанти виражається у вигляді $m\bar{x} = \pm\sigma$.

Вибіркова середня (\bar{x}) відхиляється від свого математичного очікування чи середньої арифметичної (M) генеральної (теоретично розрахованої) сукупності менше в \sqrt{n} разів порівняно з окремими варіантами даного розподілу. Звідси:

$$m_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (4.1)$$

Оскільки весь варіаційний ряд випадкової величини, що підпадає нормальному розподілу, практично укладається в межах між $\bar{x} - 3\sigma$ і $\bar{x} + \sigma$, то можна відзначити, що генеральна середня (M) таких розподілів не виходить за межі потрійного значення середньої помилки середньої арифметичної будь-якої вибірки, взятої із даної генеральної сукупності, тобто вона знаходиться в межах від $\bar{x} - 3m\bar{x}$ до $\bar{x} + 3m\bar{x}$ або в межах $\bar{x} \pm 3m\bar{x}$. Тому потрійне значення середньої квадратичної помилки називається *точною помилкою середньої арифметичної вибіркової сукупності*. А вираз $\bar{x} \pm 3m\bar{x}$ містить в собі так звані «правила потрійної помилки».

При визначенні помилки середньої арифметичної на малих вибірках використовують число “ступеня свободи” ($n - 1$) і формула приймає наступний вигляд:

$$m_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}. \quad (4.2)$$

Середня помилка середнього квадратичного відхилення вираховується по формулі 4.3:

$$m_\sigma = \frac{\sigma}{2n}. \quad (4.3)$$

Середня помилка коефіцієнта варіації (C) визначається по наступній формулі 4.4:

$$m_C = \frac{C}{\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \left(\frac{C}{100}\right)^2}. \quad (4.4)$$

Завдання для виконання.

Завдання 1. Визначати помилки репрезентативності для експериментальних даних завдань лабораторної роботи №2.

Контрольні питання для самоперевірки

1. Що називають помилкою репрезентативності?
2. Що таке середня квадратична помилка і як вона розраховується?

Лабораторна робота №4
ТЕМА «ВИЗНАЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ПОКАЗНИКІВ КОРЕЛЯЦІЇ І
ЇХ ДОСТОВІРНОСТІ»

Мета роботи: навчитись визначати числові показники кореляції, освоїти застосування стандартних функцій MS Excel для вирішення завдань аналізу зв'язків.

Ключові слова: зв'язок, кореляція, коефіцієнт кореляції, кореляційне відношення.

Вступні пояснення. Більшість криволінійних зв'язків, які зустрічаються в агрономії та лісовому господарстві, близькі до прямолінійних і їх зручніше аналізувати з використанням коефіцієнта кореляції.

Між морфологічними елементами живих організмів існує певний взаємозв'язок, який полягає в тому, що із збільшенням або зменшенням розміру одного елемента (x) відповідно збільшуються або зменшуються розміри іншого елемента (y).

Кореляційний зв'язок розрізняють:

- за формою: прямолінійний або криволінійний;
- за напрямом: прямий (додатній) або зворотній (від'ємний);
- за тісністю: дуже тісний, тісний, значний, помірний, слабкий.

Коефіцієнт кореляції (r) – числовий показник простої лінійної кореляції, який описує напрям і тісноту зв'язку між досліджуваними величинами, вимірює зв'язок лише при лінійній формі залежності, а його абсолютне значення знаходиться в межах від -1 до $+1$. При значенні $r = 0$ – зв'язок відсутній; при $+1$ – пряма кореляційна залежність; а при -1 – зворотня.

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\sqrt{(\sum (x - \bar{x})^2) \cdot (\sum (y - \bar{y})^2)}} \quad (4.1)$$

Якщо зв'язку дати оцінку 1, то віддалення від 1 (0,9; 0,8; 0,7;...0,1; 0) буде характеризувати тісноту відповідного кореляційного зв'язку. Показник $r > 0,9$ свідчить про дуже тісний зв'язок, $r = 0,7-0,9$ – тісний зв'язок; $r = 0,5-0,7$ – значний зв'язок; $r = 0,3-0,5$ характеризує помірний зв'язок, а $r < 0,3$ – слабкий зв'язок.

Макет рекомендованої допоміжної таблиці для розрахунків коефіцієнта кореляції наведено в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Макет таблиці

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
-----	-----	---------------	---------------	-------------------	-------------------

Помилка коефіцієнта кореляції розраховується за формулою 4.2:

$$S_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} \quad (4.2)$$

де n – об'єм вибірки.

Показник достовірності коефіцієнта кореляції розраховується за формулою 4.3:

$$t_r = \frac{r}{S_r}; \quad (4.3)$$

Критичне (стандартне) значення критерія $t_{5\%}$ береться з таблиць (див. додаток 1) за числом ступенів свободи: $\nu = n - 2$. Порівнюючи фактичне і критичне значення критеріїв, роблять відповідний висновок:

якщо $t_f > t_{5\%}$ – коефіцієнт кореляції достовірний; встановлену тісноту зв'язку доведено;

якщо $t_f < t_{5\%}$ – коефіцієнт кореляції недостовірний; причиною може бути недостатній об'єм вибірки або відсутність зв'язку.

Кореляційний аналіз в MS EXCEL.

Коефіцієнт кореляції у MS EXCEL розраховується за допомогою статистичної функції **КОРЕЛЛ**, в полях *Массив1* і *Массив2* вводять послідовно посилання на діапазон значення x і на діапазон значення y відповідно і *ОК*.

Завдання для виконання.

Завдання 1. Проаналізувати тісноту зв'язку між діаметрами і висотами у 10 дерев сосни звичайної. Зробити висновки.

Таблиця 4.2

Вихідні дані

x	19,6	17,7	13,5	21,9	15,1	11,4	21,1	16,4	21,5	19,3
y	19,0	18,9	17,4	19,2	19,8	10,7	20,2	19,1	22,1	20,5

Завдання 2. Провести аналіз залежності між довжиною 20 окремих листків озимої пшениці та їх площами (табл. 4.3), визначених на основі індивідуальних вимірів. Зробити висновки.

Таблиця 4.3

Вихідні дані

Номери листків (пар)	Довжина листа, см (x)	Площа листа, см ² (y)
1	16,1	7,4
2	17,3	8,7
3	18,6	10,3
4	20,0	11,2
5	21,3	12,9
6	21,6	13,2
7	21,8	13,7
8	22,0	14,1
9	22,4	14,3
10	22,8	14,8
11	23,1	15,2
12	23,3	16,2
13	23,3	16,7
14	23,7	17,0
15	24,0	17,4
16	24,1	19,2
17	25,2	19,3
18	26,0	20,3
19	26,5	21,4
20	26,4	22,3

Контрольні питання для самоперевірки

1. Що таке кореляція і якою вона буває?
2. Що таке основний показник кореляційного аналізу та його використання?

Лабораторна робота №5
ТЕМА «РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ. ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ
РЕГРЕСІЇ»

Мета роботи: навчитись проводити регресійний аналіз.

Ключові слова: математичне моделювання, регресія, емпіричний ряд регресії, коефіцієнт лінійної регресії.

Вступні пояснення. При оцінці ступеня взаємозв'язку статистичних величин важливо провести математичне моделювання, тобто підібрати аналітичне рівняння, яке відповідало б природі досліджуваного явища з метою передбачення поведінки незалежної характеристики об'єкта при зміні залежного параметра. Динаміка взаємної залежності між змінними величинами отримала назву регресії, а методика дослідження регресії носить назву *регресійного аналізу*.

Метою регресійного аналізу є встановлення певного виду рівняння, графічне вираження якого (лінія регресії) добре апроксимує розподіл фактичних значень ознаки. Будь-яка залежність може бути описана рівнянням виду: $y = f(x)$, де y – залежна ознака (значення функції), x – незалежна факторна ознака (аргумент функції).

Регресія – це зміна значення функції в залежності від зміни одного або декількох аргументів.

Емпіричний ряд регресії – це подвійний ряд значень ознак аргументу і значень відповідних ознак функції. Якщо при зростанні чи спаданні аргументу функція також пропорційно зростає чи спадає, регресія є прямолінійною, в іншому випадку – криволінійною.

Найпростішим прикладом регресії є рівняння прямої: $y = a + b x$, де y – залежна ознака; x – незалежна ознака; a – вільний член рівняння (ордината точки перетину прямої з віссю ординат); b – коефіцієнт лінійної регресії (абсциса точки перетину прямої з віссю абсцис).

Коефіцієнт лінійної регресії (b) – це число, яке вказує напрям і середню величину зміни залежної ознаки при зміні факторної на одиницю виміру. Коефіцієнт b має знак коефіцієнта кореляції. Коефіцієнт a приймає додатне значення, якщо лінія регресії перетинає вісь OY над початком координат і від'ємне значення, якщо лінія регресії проходить нижче початку координат. Чим більший коефіцієнт b , тим більший кут нахилу прямої.

До завдань регресійного аналізу належить:

- 1) обчислення коефіцієнтів рівняння;

- 2) встановлення достовірності коефіцієнтів рівняння;
- 3) знаходження теоретичних (найбільш ймовірних) значень залежної ознаки;
- 4) обчислення середньо квадратичного відхилення від регресії (помилка рівняння);
- 5) вирівнювання емпіричних рядів;
- 6) оцінка точності вирівнювання;
- 7) визначення ефекту регресії при вимірюванні варіації залежної ознаки;
- 8) вибір рівняння, яке найбільш точно описує існуючу залежність;
- 9) визначення стандартної помилки обчисленого значення.

При обчисленні коефіцієнтів рівнянь можна використати наступні способи: графічний, спосіб вибраних точок, спосіб найменшої помилки, за центральними відхиленнями, за способом Маркова, за коефіцієнтом кореляції, спосіб найменших квадратів, за числовими коефіцієнтами (спосіб Труля).

У даній лабораторній роботі пропонується для визначення коефіцієнтів регресії $a_{x/y}$ і $b_{x/y}$ використовувати наступні формули 5.1 і 5.2:

$$a_{x/y} = y_c - b_{x/y} \cdot x_c, \quad (5.1)$$

$$b_{x/y} = \frac{\sum xy - nx_c y_c}{\sum x^2 - nx_c^2}, \quad (5.2)$$

Помилку рівняння регресії визначають за формулою 5.3:

$$m_{yx} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - y_t)^2 \cdot n_i}{n - f}}, \quad (5.3)$$

де $y_i - y_t$ – відхилення фактичних значень результуючої ознаки від теоретичних;

n – кількість пар спостережень;

f – число коефіцієнтів рівняння.

Достовірність коефіцієнта лінійної регресії $a_{x/y}$ визначають за наступними формулами 5.4 і 5.5:

коефіцієнта a :

$$t_\phi = \frac{a}{m_{yx} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{x_c}{\sigma_x}\right)^2}}, \quad (5.4)$$

коефіцієнта b :

$$t_{\phi} = \frac{b \cdot \sigma_x \cdot \sqrt{n-1}}{m_{yx}}. \quad (5.5)$$

де m_{yx} – помилка рівняння регресії;

a – вільний член рівняння;

x_c – середнє значення незалежної ознаки;

σ_x – стандартне відхилення ряду x ;

b – коефіцієнт лінійної регресії.

Завдання для виконання.

Ознайомитися з основами регресійного аналізу з особливостями визначення коефіцієнтів регресії прямої та параболи. Виконати таке завдання: Обчисліть коефіцієнти регресії прямої для біологічних ознак наведених в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1

Вихідні дані

x_i	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
y_i	14,3	16,5	18,6	19,1	19,5	20,6	20,6	20,7	21,9	22,0	22,7	24,0
n_i	8	17	33	25	32	31	20	17	8	4	3	2

Контрольні питання для самоперевірки

1. Що таке регресія?
2. Побудова емпіричних рядів регресії.
3. Що таке рівняння регресії?
4. Що таке коефіцієнт регресії?
5. Які є способи визначення коефіцієнтів регресії?

Лабораторна робота №6
ТЕМА «ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ ОДНОФАКТОРНИХ
РІВНОМІРНИХ І НЕРІВНОМІРНИХ КОМПЛЕКСІВ МАЛИХ ГРУП»

Мета роботи: отримати навички вивчення статистичного впливу одного або декількох факторів на результативну ознаку (навчитись проводити дисперсійний аналіз).

Ключові слова: дисперсійний аналіз, однофакторний та багатфакторний дисперсійний аналіз, фактор, результативна ознака.

Вступні пояснення. У практиці нерідко виникає необхідність в оцінці цілих комплексів кількісних показників, необхідність порівнювати між собою одночасно не дві, а кілька вибірок, об'єднаних в єдиний комплекс.

У будь-якому експерименті середні значення досліджуваних величин змінюються у зв'язку зі зміною основних факторів (кількісних та якісних), що визначають умови досліду, а також і випадкових факторів. Дослідження впливу тих чи інших факторів на мінливість середніх є задачею дисперсійного аналізу, який був розроблений Р.А. Фішером (1925).

Дисперсійний аналіз використовує властивість адитивності дисперсії випадкової величини, що обумовлено дією незалежних факторів. У залежності від числа джерел дисперсії розрізняють *однофакторний* та *багатфакторний* дисперсійний аналіз.

Дисперсійний аналіз полягає у виділенні і оцінці окремих факторів, що викликають зміну досліджуваної випадкової величини. При цьому проводиться розклад сумарної вибіркової дисперсії на складові, обумовлені незалежними факторами. Кожна з цих складових є оцінкою дисперсії генеральної сукупності. Щоб вирішити, чи дієвий вплив даного фактору, необхідно оцінити значимість відповідної вибіркової дисперсії у порівнянні з дисперсією відтворення, обумовленою випадковими факторами.

Перевірка значимості оцінок дисперсії проводять по критерію Фішера. Коли розрахункове значення критерію Фішера виявиться меншим табличного, то вплив досліджуваного фактору немає підстав вважати значимим. Коли ж розрахункове значення критерію Фішера виявиться більшим табличного, то цей фактор впливає на зміни середніх.

Факторами зводяться причини зміни характеристик біологічних об'єктів, а ті характеристики біологічних об'єктів, які змінюються під їх впливом, зводяться *результативними ознаками*.

Методика дисперсійного аналізу зводиться до деякої загальної схеми – алгоритму (див. таблицю 6.1).

Таблиця 6.1

Алгоритм дисперсійного аналізу однофакторних комплексів

№	Зміст організаційної або математичної дії
1	Групування вибірових матеріалів у комбінаційну таблицю дисперсійного комплексу
2	Визначення значень: середнього арифметичного всього комплексу (\bar{x}) і групових середніх за градаціями організованого фактора (x_i)
3	Визначення загальної суми квадратів відхилень (D_y), тобто суми квадратів відхилень варіант від загальної середньої: $D_y = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}$
4	Визначення міжгрупової суми квадратів відхилень, яка дорівнює сумі квадратів відхилень групових середніх від загальної середньої з урахуванням статистичної ваги (n_i) групових середніх: <ul style="list-style-type: none"> у випадку рівних чисел варіант в градаціях комплексу – $D_x = n_i \sum \bar{x}_i^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}$; у випадку різної кількості варіант в градаціях комплексу – $D_x = \sum [n_i (x_i - \bar{x})^2]$;
5	Визначення внутрішньогрупової суми квадратів, тобто суми квадратів відхилень групових варіант від групових середніх: $D_z = \sum x^2 - n \sum \bar{x}_i^2$
6	Визначення дисперсій (середніх квадратів відхилень): <ul style="list-style-type: none"> загальна: $\sigma_{заг}^2 = D_y / (N-1)$; факторна: $\sigma_{факт}^2 = D_x / (a-1)$, де a – кількість груп; остаточна: $\sigma_{ост}^2 = D_z / (N-a)$
7	Визначення фактичного значення критерію $F_{факт.} = \frac{\sigma_{факт}^2}{\sigma_{ост}^2}$;
8	Порівняння фактичного значення критерію F з його табличним (стандартним) значенням для відповідного рівня значимості (p) і даних чисел

У MS EXCEL однофакторний дисперсійний аналіз проводиться наступним чином: *Сервіс / Аналіз даних / Однофакторний дисперсійний аналіз* / вкажіть діапазон вхідних значень, групування за стовпцями, прапорець Мітки зніміть, вкажіть клітинку вихідного діапазону комірок.

Проаналізуйте отримані результати: порівняйте дисперсію всередині груп і між групами. Якщо вони значимо відрізняються (рівень значимості $P = 0,05$), то фактор вважається надає статистично значимий вплив на досліджувану змінну. Порівняйте розрахункове F і критичне значення статистики Фішера. Відмінність вважається значимою, якщо розрахункове значення більше критичного.

Завдання для виконання.

Завдання 1. Користуючись таблицею 6.1 провести дисперсійний аналіз експериментальних даних наведених в прикладі.

Досліджувався вплив кількості доглядів (розпушень ґрунту) на ріст 2-х річних сіянців сосни звичайної після висаджування їх в ґрунт. Дослід організовано на однорідній території з виділенням дослідних площ розміром 0,5 га. Сукупність рослин на кожній дослідній площі є відповідною генеральною сукупністю. Вибіркові сукупності формувались шляхом відбору по 200 сіянців (за принципом імовірності) для кожної дослідної площадки. Дослід закладався в 3-х повторностях з градаціями регульованого фактору (розпушування) – відсутність (0), два, чотири, шість. Всього закладено 12 пробних площ, на яких у дослідних рослин заміряні восени річні прирости за висотою. Результати замірів згруповані в таблиці 6.2.

Таблиця 6.2

Заміри приросту сіянців сосни звичайної

Варіанти дослідів	Середній приріст рослин за повторностями (варіантами), см				Середній приріст по всіх повторностях
	1	2	3	n_i	
Контроль	6	4	8	3	
Догляди проводилися: два рази	8	8	12	3	
Чотири рази	12	14	16	3	
Шість разів	12	12	12	3	

Однакова кількість повторностей по всіх варіантах дослідів і участь лише одного регульованого фактора підтверджує класифікацію комплексу як однофакторіального і рівномірного.

Завдання 2. Проведіть дисперсійний аналіз вимірів приростів лісових культур у висоту (см/міс) при внесенні різних доз мінеральних добрив.

Таблиця 6.3

Вихідні дані				
Варіанти факторів	Повторюваності за варіантами, x_i			
20%	2	4	4	6
40%	3	5	5	6
60%	6	7	7	7

Завдання 3. Провести дисперсійний аналіз впливу на висоту тополевих саджанців заготовки живців.

Таблиця 6.4

Вихідні дані						
Фактор (живці різної довжини)	Висота по повторностях					
1	14	22	18	27	6	45
2	26	41	47	32	35	27
3	25	43	28	21	13	26
4	15	16	12	14	20	16

Контрольні питання для самоперевірки

1. Що таке дисперсійний аналіз?
2. Передумови та постановка задачі однофакторного дисперсійного аналізу.
3. Загальна, факторна та залишкова суми квадратів відхилень та зв'язок між ними.
4. Алгоритм однофакторного дисперсійного аналізу за Фішером.

7. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

На першій лабораторній роботі викладач проводить вступний інструктаж з техніки безпеки, здобувачі вищої освіти знайомляться з робочими місцями, правилами проведення та здачі лабораторних робіт.

Кожна робота повинна бути захищена. Захист лабораторної роботи складається з уміння здобувача вищої освіти викласти основні теоретичні положення теми, методики дослідження, проаналізувати отримані результати.

Критерії оцінки лабораторних робіт наведені в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

Критерії оцінки лабораторних робіт

Критерії виконання та захисту лабораторної роботи	Сума балів ECTS	Оцінка за національною шкалою
Усі розрахунки виконано вірно. Висновки зроблено коректно. Здобувач вищої освіти може пояснити хід виконання роботи та навести формули, що застосовувались.	90 – 100	відмінно
Усе перелічене вище, але робота захищена із запізненням без поважних причин.	82 – 89	добре
У роботі знайдено незначні відхилення розрахунків.	75-81	
Здобувач вищої освіти не може пояснити хід виконання лабораторної роботи та навести приклади й формули, що застосовувались.	66-74	задовільно
Лабораторну роботу виконано із помилками та без захисту.	60-65	
Лабораторну роботу не виконано.	0-59	незадовільно з можливістю повторного складання

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Атраментова Л.О., Утевська О.М. Біометрія: підруч. для студ. вищ. навч. закл. – Х.: Ранок, 2007. – 176 с.
2. Багинский В.Ф. Биометрия в лесном хозяйстве: учебное пособие / В.Ф. Багинский, О.В. Лапицкая. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2010. – 374 с.
3. Близнюченко О. Г. Біометрія. – Полтава : РВВ "TERRA", 2003. – 346 с.
4. Горбунов Л.В. Биометрия: учеб. Пособие/ Л.В.Горбунов, Н.Ф. Клещев. – Х.: НТУ «ХПИ», 2014. – 160 с.
5. Калінін М.І. Біометрія: Підручник для студентів вузів біологічних і екологічних напрямків./ Калінін М.І., Єлісеєв В.В. – Миколаїв: Вид-во МФ НаУКМА, 2000. – 204 с.
6. Чепур С.С. Біометрія: Методичний посібник. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2015. – 40 с.

Стандартні значення критерію Стьюдента

Число ступенів волі $u=n_1+n_2-2$	Критерій Стьюдента t_{st} при імовірності безпомилкового заклучення p			
	0.1	0.05	0.02	0.01
1	6.314	12.706	31.821	63.657
2	2.920	4.303	6.965	9.952
3	2.353	3.182	4.541	5.841
4	2.132	2.776	3.747	4.604
5	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.684	3.055
13	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.732	2.131	2.602	2.947
16	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.723	2.086	2.528	2.845
21	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.714	2.064	2.492	2.797
25	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.645	1.960	2.326	2.576

Значення критерію Фішера F

U ₂	Степінь волі для більшої дисперсії U ₁											
	3	4	5	6	8	10	12	16	24	30	50	∞
5%-ний рівень значущості F _{0,05}												
3	9,3	9,1	9,0	8,9	8,8	8,8	8,7	8,7	8,6	8,6	8,6	8,5
4	6,6	6,4	6,3	6,2	6,0	5,9	5,8	5,8	5,8	5,7	5,7	5,6
5	5,4	5,2	5,1	5,0	4,8	4,7	4,7	4,6	4,5	4,5	4,4	4,4
6	4,8	4,5	4,4	4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8	3,8	3,8	3,7
7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,7	3,6	3,6	3,5	3,4	3,4	3,4	3,2
8	4,1	3,8	3,7	3,6	3,4	3,4	3,4	3,2	3,1	3,1	3,0	2,9
9	3,9	3,6	3,5	3,4	3,2	3,2	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7
10	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5
12	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3
16	3,2	3,1	2,9	2,8	2,7	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,0
18	3,2	2,9	2,8	2,7	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9
24	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,7
40	2,8	2,6	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,5
120	2,7	2,4	2,3	2,2	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,3
∞	2,6	2,4	2,2	2,1	1,9	1,8	1,8	1,6	1,5	1,5	1,4	1,0
1%-ний рівень значущості F _{0,01}												
3	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,0	26,8	26,6	26,5	26,5	26,4	26,1
4	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,5	14,4	14,2	13,9	13,8	13,7	13,5
5	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	10,1	9,9	9,7	9,5	9,4	9,2	9,0
6	9,8	9,2	8,8	8,5	8,1	7,9	7,7	7,5	7,3	7,2	7,1	6,9
7	8,4	7,8	7,5	7,2	6,8	6,6	6,5	6,3	6,1	6,0	5,8	5,6
8	7,6	7,0	6,6	6,4	6,0	5,8	5,7	5,5	5,3	5,2	5,1	4,9
9	7,0	6,4	6,1	5,8	5,5	5,3	5,1	4,9	4,7	4,6	4,5	4,3
10	6,6	6,0	5,6	5,4	5,1	4,9	4,7	4,5	4,3	4,3	4,1	3,9
12	6,0	5,4	5,1	4,8	4,5	4,3	4,2	4,0	3,8	3,7	3,6	3,4
16	5,3	4,8	4,4	4,2	3,9	3,7	3,6	3,4	3,2	3,1	3,0	2,8
20	4,9	4,4	4,1	3,9	3,6	3,4	3,2	3,0	2,9	2,8	2,6	2,4
30	4,5	4,0	3,7	3,5	3,2	3,0	2,8	2,7	2,5	2,4	2,2	2,0
60	4,1	3,6	3,3	3,1	2,8	2,6	2,5	2,3	2,1	2,0	1,9	1,6
120	3,9	3,5	3,2	3,0	2,7	2,4	2,3	2,2	1,9	1,9	1,7	1,4
∞	3,8	3,3	3,0	2,8	2,5	2,3	2,2	2,0	1,8	1,7	1,5	1,0

Критичне значення χ^2 для трьох степенів довірчої імовірності

Число степенів волі, U	Рівень значущості			Число степенів волі, U	Рівень значущості		
	0.95	0.99	0.999		0.95	0.99	0.999
1	3.8	6.6	10.8	26	38.9	45.6	54.1
2	6.0	9.2	13.8	27	40.1	47.0	55.5
3	7.8	11.3	16.3	28	41.3	48.3	56.9
4	9.5	13.3	18.5	29	42.6	49.6	58.3
5	11.1	15.1	20.5	30	43.8	50.9	59.7
6	12.6	16.8	22.5	32	46.2	53.5	62.4
7	14.1	18.5	24.3	34	48.6	56.0	65.2
8	15.5	20.1	26.1	36	51.0	58.6	67.9
9	16.9	21.7	27.9	38	53.4	61.1	70.7
10	18.3	23.2	29.6	40	55.8	63.7	73.4
11	19.7	24.7	31.3	42	58.1	66.2	76.1
12	21.0	26.2	32.9	44	60.5	68.7	78.7
13	22.4	27.7	34.5	46	62.8	71.2	81.4
14	23.7	29.1	36.1	48	65.2	73.7	84.0
15	25.0	30.6	37.7	50	67.5	76.2	86.7
16	26.3	32.0	39.3	55	73.3	82.3	93.2
17	27.6	33.4	40.8	60	79.1	88.4	99.6
18	28.9	34.8	42.3	65	89.8	94.4	106.0
19	30.1	36.2	43.8	70	90.5	100.4	112.3
20	31.4	37.6	45.3	75	96.2	106.4	118.5
21	32.7	38.9	46.8	80	101.9	112.3	124.8
22	33.9	40.3	48.3	85	107.5	118.2	131.0
23	35.2	41.6	49.7	90	113.1	124.1	137.1
24	36.4	43.0	51.2	95	118.7	130.0	143.3
25	37.7	44.3	52.5	100	124.3	135.8	149.4