МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В. В. ВІТЛІНСЬКИЙ

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ

Навчальний посібник

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Київ 2003

ББК 65в6
В 54

Рецензенти:

В. М. Вовк, д-р екон. наук, проф.
(Львівський національний університет ім. І. Я. Франка)

Т. С. Клєбанова, д-р екон. наук, проф.
(Харківський державний економічний університет)

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
Лист № 14/18.2-896 від 23.04.02

Вітлінський В. В.
В 54 Моделювання економіки: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2003. — 408 с.
ISBN 966–574–411–9

У навчальному посібнику викладено методологічні та методичні підходи, що дозволяють розбудовувати, аналізувати й використовувати адекватні математичні моделі у сфері економіки та підприємництва. Розглядаються методи та приклади розбудови й аналізу математичних моделей для широкого кола теоретичних та прикладних аспектів економічного аналізу. Міститься систематичний виклад низки важливих питань економіко-математичного моделювання та кількісного аналізу в контексті проблем перехідної економіки.

Призначений для студентів, аспірантів і викладачів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів, а також для системних аналітиків, фахівців у сфері фінансової та економічної діяльності.

ББК 65в6

ISBN 966–574–411–9

Навчальне видання

ВІТЛІНСЬКИЙ Вальдемар Володимирович

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ

Навчальний посібник

Редактор *А. Невзгляд*
Художник обкладинки *Т. Зябліцева*
Технічний редактор *Т. Піхота*
Коректор *Л. Денисенко*
Верстка *Т. Мальчевської*

Підп. до друку 10.02.03. Формат 60×84/16. Папір офсет. №1.
Гарнітура Тип Таймс. Друк офсет. Ум. друк. арк. 23,72.
Обл.-вид. арк. 26,91. Наклад 1000 прим. Зам. № 01-2317

Київський національний економічний університет
03680, м. Київ, просп. Перемоги, 54/1
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи (серія ДК, № 235 від 07.11.2000)
Тел./факс: (044) 458-00-66; 456-64-58
E-mail: publish@kneu.kiev.ua

ЗМІСТ

Світ який — мереживо казкове!
Світ який — ні краю, ні кінця!
Зорі й трави, мрево світанкове,
Магія коханого лиця.
Світе мій гучний, мільйоноокий,
Пристрасний, збурунений, німий,
Ніжний і ласкавий, і жорстокий,
Дай мені свій простір і неспокій,
Сонцем душу жадібну налий!
Дай мені у думку динаміту,
Дай мені любові, дай добра,
Гуркочи у долю мою, світе,
Хвилями прадавнього Дніпра.
Не шкодуй добра мені, людині,
Щастя не жалій моїм літам —
Все одно ті скарби по краплині
Я тобі закохано віддам.

Василь Симоненко

ПЕРЕДМОВА

Моделювання — основний специфічний метод науки, що застосовується для аналізу та синтезу систем управління. Це особливий пізнавальний спосіб, коли суб'єкт дослідження замість безпосереднього досліджуваного об'єкта пізнання обирає чи створює подібний до нього допоміжний об'єкт — образ чи модель, досліджує його, а отримані нові знання переносить на об'єкт-оригінал. Завдяки активній ролі суб'єкта сам процес моделювання має творчий, активний характер.

Для аналізу й синтезу систем управління в економіці використовуються різноманітні економіко-математичні методи та моделі. Важливими є умова та особливості їх застосування залежно від мети дослідження, прийнятої системи гіпотез тощо.

У наш час математичне моделювання вступає в третій, принципово важливий етап свого розвитку, «вбудовуючись» у структуру так званого *інформаційного суспільства*.

Без володіння інформаційними «ресурсами» не можна й думати про розв'язання дедалі різноманітніших проблем, що постають перед світовою спільнотою. Однак інформація як така здебільшого мало що дає для аналізу й прогнозу, для прийняття рішень і контролю за їх виконанням. Необхідні надійні способи переопрацювання інформаційної «сировини» в готовий «продукт», тобто в точне знання. Історія методології математичного моделювання економіки переконує: вона може й повинна бути інтелектуальним ядром інформаційних технологій, усього процесу інформатизації суспільства.

Економічні системи, що вивчаються сучасною наукою, з великими труднощами піддаються дослідженню звичайними (вербальними) теоретичними методами. Прямий експеримент над ними неможливий. Ціна помилок і прорахунків велика, тому математичне моделювання є неминучою складовою науково-технічного прогресу.

Як методологія та інструментарій математичне моделювання не підміняє собою ні математику, ні економічну теорію, ні фінанси, ні жодну з економічних дисциплін і не конкурує з ними. Навпаки, важко переоцінити його синтезуючу роль. Створення й застосування тріади «модель—алгоритм—програма» неможливе без опори на різноманітні методи і підходи якісного (вербального) аналізу нелінійних економічних моделей, сучасних мов програмування. Воно дає нові додаткові імпульси й стимули для розвитку економічної науки та її практичного використання.

Предметом моделювання економіки є математичні моделі реальних економічних об'єктів. Об'єктом вивчення моделювання економіки як навчальної дисципліни є економіка та її підрозділи.

Мета посібника — дати можливість читачеві подивитись на економіку очима дослідника, навчитися застосовувати методологію, методику та інструментарій економіко-математичного моделювання в теоретичних дослідженнях та використовувати здобуті знання у практичній діяльності.

Для успішного опанування викладеного в посібнику матеріалу необхідні знання з низки фундаментальних і професійно орієнтованих дисциплін, засвоєння яких передбачене освітньо-професійною програмою вищої освіти за спрямуванням «бакалавр з економіки та підприємництва». Це, зокрема, політекономія, макро- та мікроекономіка, фінанси, менеджмент, маркетинг, вища математика, теорія ймовірностей і математична статистика, інформатика та комп'ютерна техніка, математичне програмування, економетрія, аналіз, моделювання та управління ризиком, дослідження операцій.

Автор дякує Божому Провидінню за натхнення і наснагу для написання цієї праці, а також складає

щиру подяку передусім керівництву КНЕУ, завідувачеві кафедри економіко-математичних методів професорові *С. І. Наконечному* та деканові факультету інформаційних систем і технологій професору *О. Д. Шарапову*, колегам за створення сприятливих умов для роботи над посібником.

Щиро вдячний рецензентам: завідувачеві кафедри економічної кібернетики Львівського національного університету ім. І. Я. Франка, доктору економічних наук, професору *В. М. Вовку*, завідувачеві кафедри економічної кібернетики Харківського державного економічного університету, доктору економічних наук, професору *Т. С. Клєбановій*.

Висловлюю вдячність своїй дружині Валентині, синові Юрію та дочці Наталі за їхню працю з технічної підготовки рукопису до видання та комп’ютерного набору матеріалів.

1 РОЗДІЛ

ЕКОНОМІКА ЯК ОБ'ЄКТ МОДЕЛЮВАННЯ

1.1. ДЕЯКІ АСПЕКТИ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕКОНОМІКИ ТА ЇЇ СТРУКТУРИ ЯК ОБ'ЄКТА МОДЕЛЮВАННЯ

Основне призначення економіки — забезпечення суспільства предметами споживання та послугами, котрі створюють умови для життя та безпеки людини, родини, суспільства, країни. У зв'язку з цим є сенс розглядати, досліджувати та моделювати *соціально-економічні системи*.

Зазначимо, що під *соціально-економічною системою* мають на увазі складну ймовірнісну динамічну систему, що охоплює процеси виробництва, обміну, розподілу й споживання матеріальних та інших благ. Соціально-економічні системи належать до класу кібернетичних, тобто керованих, систем.

Економіка складається з елементів — господарських одиниць (підприємств, фірм, банків тощо). Надсистема економіки — природа та суспільство, дві її головні підсистеми — виробнича та фінансово-кредитна.

Об'єкт вивчення дисципліни «Моделювання економіки» — соціально-економічні системи, економіка та її підрозділи, окремі господарські одиниці, процеси, які в них відбуваються.

Предмет дисципліни — методологія та методика моделювання, математичні моделі реальних економічних (соціально-економічних) об'єктів та їх аналіз.

Методами, що їх використовують у моделюванні економіки (соціально-економічних систем), є синергетичний і системний аналіз економіки як складної нестабільної динамічної системи.

Центральним поняттям кібернетики є поняття «*система*». Єдиного означення цього поняття поки що не існує; можливим є таке формулювання: *системою називають комплекс взаємопов'язаних елементів разом із відношеннями між цими елементами та між їхніми атрибутами, які спільно реалізують певні цілі.*

Досліджувану множину елементів можна розглядати як систему, якщо вона характеризується такими ознаками:

1) цілісність системи, тобто принципова незведеність властивостей системи до суми властивостей окремих її елементів;

2) наявність цілей і критеріїв щодо дослідження даної множини елементів;

3) наявність більш загальної — зовнішньої стосовно до даної системи, котру називають «надсистемою», чи «середовищем».

4) можливість виокремлення в даній системі певних частин («підсистем»).

Основним інструментальним та ефективним методом дослідження систем є *метод моделювання*, тобто спосіб теоретичних і практичних дій, спрямованих на створення та використання моделей. А під моделлю можна розуміти образ реального об'єкта (процесу) в матеріальній чи ідеальній формі (тобто такий, який описано знаковими засобами певною мовою), що відображає суттєві властивості модельованого об'єкта (процесу) й заміщує його в ході дослідження й управління. Метод моделювання ґрунтується на принципі аналогії, тобто можливостях вивчення реального об'єкта не безпосередньо, а шляхом дослідження подібного йому й більш доступного цьому дослідженню об'єкта — його моделі. У подальшому йтиметься лише про економіко-математичне моделювання, тобто про опис соціально-економічних систем знаковими математичними засобами.

Практичними завданнями економіко-математичного моделювання є: *по-перше*, аналіз економічних об'єктів і процесів; *по-друге*, економічне прогнозування, передбачення розвитку економічних процесів; *по-третє*, вироблення управлінських рішень на всіх рівнях господарської ієрархії управління.

Зазначимо, що не в усіх випадках дані, отримані в результаті економіко-математичного моделювання, можуть використовуватися безпосередньо як готові управлінські рішення. Швидше всього вони можуть розглядатись як «консультуючі» засоби. Прийняття управлінських рішень залишається за людиною. Отже, економіко-математичне моделювання є лише однією з важливих компонент у людино-машинних системах аналізу, планування й управління економічними системами. Воно спрямоване на отримання нових знань про об'єкт дослідження.

Одним із важливих аспектів у економіко-математичному моделюванні, як і в інших концепціях моделювання, є поняття адекватності моделі, тобто відповідності моделі модельованому об'єктові чи процесові. Адекватність моделі — дещо умовне поняття, оскільки повної відповідності моделі реальному об'єктові не може бути. Це є характерним і для економіко-математичного моделювання. Йдеться не просто про адекватність, а про відповідність тим властивостям, які вважаються суттєвими для дослідника, відповідають меті дослідження та усталеній системі гіпотез. Зазначимо, що перевірка адекватності економіко-математичних моделей не є простою. Вона обтяжена складністю вимірювання економічних величин. Але без такої перевірки застосування результатів моделювання в аналізі та управлінських рішеннях може не лише виявитися малокорисним, а й призвести до негативних наслідків.

Соціально-економічні системи належать, як правило, до так званих складних систем. Складним системам притаманна низка властивостей, які потрібно враховувати в їх моделюванні, інакше неможливо твердити про адекватність побудованої моделі. Серед цих властивостей зазначимо, зокрема, такі:

- *емерджентність* як прояв у найяскравішій формі властивості цілісності системи, тобто наявність у економічної системи таких властивостей, які не є притаманними жодному з її елементів, котрий розглядається окремо, поза системою. Емерджентність — це результат виникнення між елементами системи так званих синергетичних зв’язків, які забезпечують збільшення загального ефекту до більших обсягів, ніж сума ефектів окремо взятих елементів системи, що діють (функціонують) незалежно. Тому соціально-економічні системи потрібно досліджувати й моделювати зважаючи на синергізм;
- *динамічність* економічних процесів, що полягає в зміні у часі параметрів і структури економічних систем під впливом як внутрішніх, так і зовнішніх чинників (навколишнього середовища);
- *невизначеність* щодо розвитку економічних явищ (процесів). Економічні явища та процеси мають нелінійний, випадковий характер. Невизначеність іманентно притаманна економічним системам, тому для вивчення їх потрібно застосовувати економіко-математичні моделі на базі теорії ймовірностей і математичної статистики, а також на базі теорії нечітких (розпливчастих) множин тощо. Важливою також є розбудова *ризикології (науки про економічний ризик)* тощо;
- *неможливість* ізолювати процеси, котрі здійснюються в економічних системах незалежно від процесів у навколишньому середовищі, з тим щоб спостерігати та досліджувати їх окремо;
- *активна* реакція на нові чинники, що з’являються. Спроможність соціально-економічних систем до активних, не завжди передбачуваних дій залежно від ставлення суб’єктів управління та самої системи загалом до цих чинників, способів і методів їх впливу тощо.

Як зазначається в низці наукових праць[1], доцільно звернути увагу на такі дві особливості економіки як об’єкта моделювання:

1. В економіці неможливо використовувати моделі подібності, котрі широко застосовуються в техніці. Неможливо побудувати точну копію економічної системи в масштабі 1:1000 і на ній моделювати різні варіанти економічної політики.

2. В економіці можливості локальних економічних експериментів гранично обмежені, оскільки всі її складові тісно взаємопов’язані, а отже, «чистий» експеримент є практично неможливим.

Залишається спиратися на власний досвід, досвід інших країн, безпосередні експерименти зі всією економікою та на математичне моделювання.

Досвід як інших країн, так і власний важко переоцінити, але далеко не завжди він, як показав, зокрема, досвід країн СНД, може бути використаний в умовах конкретної економічної ситуації без адаптації.

Прямі експерименти з економікою, як свідчить історія, дуже дорого коштують, ми знаємо чи чули про колективізацію, індустріалізацію, гіперінфляцію, приватизацію тощо. Разом з тим неможливо безпосередньо передбачити середньо- та довготермінові наслідки окремих рішень. Це можна зробити лише на підставі концептуальних моделей розвитку економіки, що спираються на минулий досвід. У свою чергу концептуальні моделі, власне, і становлять фундамент математичних моделей.

Що ж до математичних моделей, то формування їх є досить тривалим процесом, який потребує знань і праці, але ще важче створити модель, досить адекватну щодо реальності. Отже, для опрацювання правильних економічних рішень необхідно аналізувати весь минулий досвід, результати, що отримані на підставі застосування концептуальних і математичних моделей, що є найбільш адекватними для даної економічної ситуації.

Виконуючи своє призначення, економічна система забезпечує розміщення ресурсів, виробляє продукцію, розподіляє предмети споживання та здійснює накопичення (рис. 1.1)[2].

---

[1] Див., зокрема: *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей / Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1963.

[2] *Колемаев В. А.* Математическая экономика: Учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ, 1998.

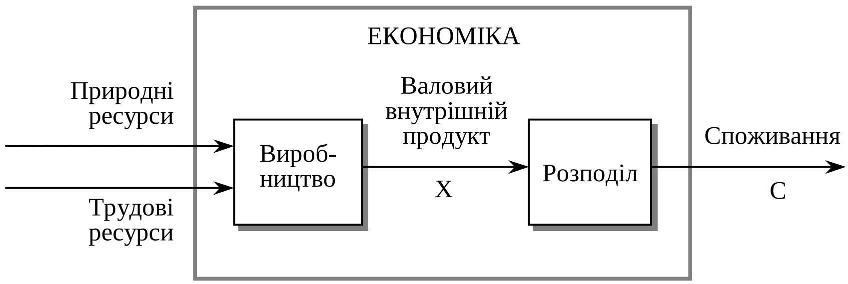


Рис. 1.1. Економіка як підсистема природи і суспільства

Економіка як складна система є підсистемою суспільства, але у свою чергу вона складається з виробничої і невиробничої сфер (господарських одиниць), які взаємодіють між собою. Сутність взаємодії між суспільством та економічною системою визначає двоїсту роль людини у суспільному виробництві — як агента виробничого процесу, тобто як об'єкта і як суб'єкта, заради котрого цей процес, власне, і здійснюється. Кожна особа виконує подвійну роль: з одного боку, як споживач, а з другого — як виробник. Окрім робочої сили (носія знань та вмінь) матеріальними ресурсами є природні ресурси (зокрема земля, енергія сонця) та засоби виробництва.

Створення теорії аналізу й управління економікою передбачає:

- виявлення об'єктивних закономірностей взаємодії (взаємозв'язків) економічної системи із суспільством і біологічним середовищем та внутрішньої організації системи;
- формалізацію опису цих взаємозв'язків у категоріях цілеспрямованої раціональної поведінки тощо.

Засоби виробництва поділяються на засоби праці, котрі беруть участь у кількох виробничих циклах, аж до заміни їх унаслідок морального старіння чи фізичного зношення, та предмети праці, які задіяні в одному виробничому циклі.

Особливе (двоїсте) місце серед засобів виробництва займає земля.

Накопичені засоби виробництва (виробничі фонди) складаються з основних виробничих і обігових фондів.

Основні виробничі фонди (ОВР) протягом тривалого часу обслуговують процес виробництва, зберігаючи свою натуральну форму й зношуючись частково, беруть участь в утворенні вартості виробленого в поточному році продукту. Просте відтворення (відновлення) основних виробничих фондів здійснюється за рахунок амортизаційних відрахувань, розширене — за рахунок капітальних вкладень та, частково, амортизаційного фонду.

Оборотні фонди — предмети праці. Вони деталізуються як виробничі запаси та предмети праці, котрі, зокрема, входять до незавершеної продукції. У результаті функціонування економіки протягом року всі галузі матеріального виробництва створюють *валовий внутрішній продукт* (ВВП). У натурально-речовій формі ВВП поділяється на засоби праці та предмети споживання, а у вартісній — на фонд заміщення основних фондів (амортизаційний фонд) і новостворену вартість (національний дохід).

У процесі створення ВВП виробнича підсистема економіки виробляє та споживає проміжний продукт. За матеріально-речовим складом *проміжний продукт* — предмети праці — використовується в поточному виробничому споживанні, а його вартість переходить у вартість засобів праці чи предметів споживання, що входять до ВВП. На рис. 1.2 наведена схема процесів виробництва, розподілу, накопичення та споживання.

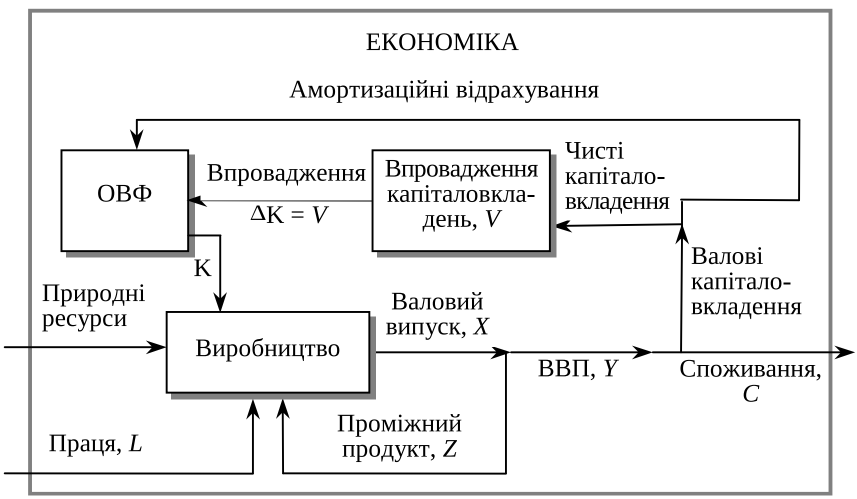


Рис. 1.2. Потоки продуктів і ресурсів в економіці

Проміжна продукція — це паливо, енергія, сировина, матеріали, комплектувальні вироби тощо. Зазначимо, що не існує абсолютно чіткої межі між проміжним продуктом і предметом споживання. Наприклад, цемент, проданий населенню, належить до предметів споживання, а цемент, закуплений будівельним підприємством, — до проміжної продукції.

У сучасному суспільстві роль специфічного товару — загального товарного еквівалента — виконують *гроші*. Фінансово-кредитні установи (державні та комерційні банки, їхні філії, страхові компанії, різноманітні фонди тощо) спільно з фінансово-бухгалтерськими службами господарських комірок утворюють фінансово-кредитну підсистему економічної системи.

Нематеріальним ресурсом поряд з фінансовим виступає соціально-інтелектуальний потенціал суспільства.

Основу економічної системи становлять *виробничі комірки*. Це заводи, фабрики, шахти, родовища, електростанції, сільськогосподарські та інші виробничі підприємства й фірми, наділені господарською самостійністю.

З організаційно-господарського погляду виробнича комірка — це самостійна господарська одиниця, котра наділена правом юридичної особи, функціонує за рахунок власних коштів (засобів), відносно самостійно розпоряджається своїми ресурсами (засобами виробництва, робочою силою та фінансовими засобами) і виробленою продукцією. Як самокерована система виробнича комірка складається з керованого об'єкта (робоча сила та виробничий апарат) та керуючої системи (дирекція, функціональні служби, наглядова рада тощо). Коли окремі виробники в межах суспільства почали виготовляти різні предмети споживання та обмінюватися ними між собою, виник ринок. Отже, ринок — наслідок, результат поділу праці.

У сучасному світі не існує жодної країни, в якій держава не регулювала б (м'яко чи жорстко, прямо чи опосередненo) діяльність господарських комірок. М'яке, опосереднене регулювання за допомогою ринкових важелів свідчить про високий ступінь розвитку ринкової економіки в даній країні.

Виробничі комірки і виробничо-технологічні зв'язки між ними утворюють *виробничо-технологічну структуру* економічної системи. Ненадійність у виробничо-технологічній взаємодії виробничих комірок, конкуренція на ринках товарів, грошей та робочої сили — об'єктивна основа для утворення об'єднань господарських одиниць (асоціацій, концернів, корпорацій тощо). Утворення об'єднань потребує, у свою чергу, регулюючої функції держави, яка в інтересах споживачів повинна не допускати надмірного монополізму на ринках товарів і послуг, а також на ринках робочої сили та грошей.

Організаційно-господарська структура економічної системи — це сукупність господарських одиниць та організаційно-господарських зв'язків між ними. Якщо виробничо-технологічні зв'язки є горизонтальними, то організаційно-господарські — вертикальними. Її (цю структуру) можна уявити як багатоповерхову надбудову над виробничо-технологічною структурою.

Перший поверх — орган управління господарських одиниць і прямі вертикальні зв'язки кожного органу управління зі своєю керованою одиницею. Другий поверх — орган управління об'єднань і вертикальні зв'язки з органами управління відповідних комірок. Третій поверх — центральні органи управління економічною системою та вертикальні їх зв'язки з органами управління першого та другого поверхів.

Використовуючи системний підхід щодо дослідження економіки на підставі математичних моделей, виокремлюють, зокрема, макро- та мікроекономічні моделі. Перші відображають функціонування та розвиток усієї економічної системи чи її великих підсистем, другі — господарських комірок та їх об'єднань.

Маючи на увазі макромоделі, вважають, що господарські комірки є неподільними, але коли досліджуються мікромоделі, то господарська комірка, у свою чергу, може розглядатись як складна система.

До великих підсистем можна віднести: перший і другий підрозділи народного господарства, галузі народного господарства, міжгалузеві комплекси.

Під *першим підрозділом* мають на увазі сукупність господарських комірок, що виробляють засоби виробництва, під *другим* — предмети споживання.

Нерідко перший підрозділ деталізують на два сектори: нульовий, де виробляються паливо, енергія, сировина, матеріали (тобто предмети праці), та перший, у якому виробляються засоби праці. Часто під сектором розуміють виробничу підсистему економіки, що виробляє один агрегований продукт.

У галузь виокремлюють виробничі одиниці, що є відносно однорідними за використовуваною сировиною, технологією, вироблюваною продукцією, професійним складом виробничого персоналу. Стосовно до моделювання, то тут під галуззю розуміють «чисту» галузь, що виробляє лише один продукт. Наприклад, галузь сільського господарства — виробництво збіжжя як одного продукту, хоча, як зрозуміло, збіжжя є узагальненим поняттям — це зерно і пшениці, і жита, і рису, ячменю, вівса, кукурудзи, проса, гречки, маку тощо. Галузь електроенергетики виробляє один продукт — електроенергію, хоча можна розрізнити: гідро-, тепло-, атомну тощо.

Окрім звичайних галузей, розглядаються також великі галузі народного господарства: промисловість, будівництво, транспорт, зв'язок, торгівля тощо.

Міжгалузевий народногосподарський комплекс — це сукупність галузей, підгалузей і виробництв, що перебувають у тісних виробничо-технологічних зв'язках і реалізують важливу національну мету (наприклад, паливно-енергетичний комплекс забезпечує суспільство й економіку паливом та енергією; агропромисловий комплекс — продовольством і сільськогосподарською сировиною).

Легко дійти висновку, що економіка належить до класу складних систем. Можливості, навіть кваліфікованого колективу фахівців, відтворити на вербально-логічному рівні картину поведінки економічних об'єктів (об'єктів керування), що перебувають під впливом великої кількості внутрішніх та зовнішніх чинників, досить обмежені. Тому доводиться залучати на допомогу математичні моделі, котрі доповнюють логіко-описові уявлення щодо поведінки економічних об'єктів і процесів. Існує й відповідний досвід, що має свою досить тривалу (не одного століття) історію.

Як приклад економічної моделі розгляньмо спрощений (ідеалізований) варіант так званої «павутиноподібної моделі», яка описує процес формування попиту і пропозиції певного товару чи виду послуг на конкурентному ринку (випадок досконалої конкуренції).

Ідеться про формалізацію економічного закону попиту та пропозиції, згідно з яким:

- кількість товару, що його можна продати на ринку (тобто попит), змінюється у напрямку, протилежному зміні ціни товару;
- кількість товару, який виробляють і доставляють на ринок (тобто пропозиція), змінюється у тому самому напрямку, що й ціна;
- водночас реальна ринкова ціна формується на рівні, на якому попит і пропозиція наближено дорівнюють одне одному (приблизно збігаються з деякою заданою точністю), тобто перебувають у рівновазі.

Першим, хто спробував математично сформулювати цей закон, був французький учений А. Курно.

Подамо математичну формалізацію положень цього закону.

Нехай X_t — ціна товару в момент часу t, а D_t і S_t — кількість товару, купленого і пропонованого відповідно на ринку в той самий момент часу t. Тоді, з урахуванням одного інтервалу часу, необхідного виробникам-продавцям для того, щоб «зреагувати» на ціну X, можна математично сформулювати наведені закономірності:

$$S_t = f(X_{t-1}),\ D_t = g(X_t),$$

$$\lim_{t\to\infty} f(X_{t-1}) = \lim_{t\to\infty} g(X_t);\ \lim_{t\to\infty} X_t = \overline{X}_q,$$

де $f(X)$ — деяка монотонно зростаюча і $g(X)$ — монотонно спадна функції від аргумента X (тобто від ціни), $\overline{X}_q$ — рівноважна ціна.

Математичні співвідношення, що відображають закон попиту і пропозиції, можуть бути проілюстровані.

Як бачимо на рис. 1.3, процес формування рівноважної ціни почався з призначення в перший (початковий) момент часу ціни на рівні X_1. Продовження цього процесу (індексовано стрілками) павутиноподібно прямує до точки перетину кривих $g(X)$ і $f(X)$.

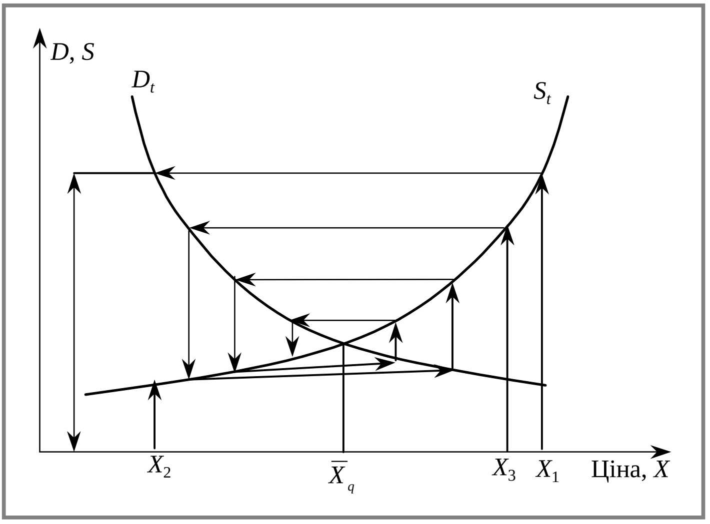


Рис. 1.3. Графік процесу формування попиту і пропозиції

Реальна модель закону попиту і пропозиції, звичайно, складніша. Зокрема, D і S залежать не лише від ціни X. Крім цього, зв'язок (наближений) між D і S, з одного боку, і ціною X — з другого, має не детермінований, а стохастичний характер.

Щоб описана вище модель з економічної перетворилася в економетричну, потрібно вести мову не взагалі про закон попиту і пропозиції, а про конкретну дію його в даному секторі економіки в певний час і стосовно конкретного товару (чи виду послуг). Відповідно, конкретизація виду функцій $g(X)$ і $f(X)$, повинна проводитися на підставі статистичних даних щодо значень X_t, S_t, D_t, де $t \in \{1, ..., T\}$, T — кількість періодів, протягом яких здійснювався моніторинг і отримані дані.

Приклад *«Павутиноподібної моделі» фірми*

Підприємець збирається вкласти кошти у створення фірми, яка випускатиме товар і реалізовуватиме його на ринку. Його цікавить, як буде поводити себе ціна товару за змін обсягів виробництва. Він розуміє, що при збільшенні обсягів виробництва ціна одиниці товару спадатиме. Йому важливо знати, за яких умов ціна буде стабільною.

У науковій літературі описано кілька варіантів відповідної моделі. У них приймається низка гіпотез, зазвичай припускається, що попит на деякий продукт упродовж певного (заданого) проміжку часу залежить від ціни (та інших чинників) на цьому проміжку. Що стосується пропозиції, то вона визначається цінами попереднього проміжку часу (тиждень, місяць, квартал тощо). Окрім цього, приймається гіпотеза, згідно з якою ринок перебуває в умовах локальної рівноваги. Як уже зазначалось, історично така модель отримала назву «павутиноподібної».

Аналіз і розв'язання

Існують як мінімум чотири варіанти відповідної моделі: детермінована, стохастична, модель з навчанням та модель із запасами. У детермінованій моделі відсутнє урахування випадкових чинників. У стохастичній моделі враховується вплив на попит непередбачуваних коливань уподобань і доходів споживачів, а також інших випадкових чинників, які впливають на попит. Пропозиція на попередньому проміжку часу також вважається залежною від впливу випадкових чинників, усі вони відображають вплив коливань у технологічному процесі тощо. Умова локальної рівноваги означає збіг (незначну різницю) попиту і пропозиції з точністю до певної заданої величини.

У моделі з навчанням приймається гіпотеза, за якою постачальники (виробники), ураховуючи тенденцію зміни цін, планують випуск продукції на наступний проміжок часу. В останніх двох моделях ціни встановлюються на такому рівні, щоб забезпечити локальну рівновагу лише за рахунок поточного виробництва, і жодних запасів продукції не створюється (зокрема, тому що продукція швидко псується).

У модель із запасами вводиться додаткова група учасників ринкового механізму, котрих можна назвати комерсантами. Вони тримають запаси та організовують торгівлю.

Розгляньмо випадок стохастичної моделі.

Припустимо, що попит на *t*-му проміжку часу лінійно залежить від поточної ціни (це припущення не є обов'язковим. Навпаки, воно досить жорстке. У реальних процесах припускається, що така залежність буде нелінійною. Вид залежності визначається на підставі застосування економетричних методів і моделей).

Окрім цього, вважатимемо, що попит на ринку має випадковий розкид. Для формалізованого опису необхідно в наших припущеннях обчислити на підставі доступної інформації відповідно оцінки коефіцієнтів лінійного рівняння та похибку як випадкову величину, що має певний закон розподілу.

У результаті відповідних обчислень можна отримати, зокрема, такий вираз:

$$D_t = A - BX_t + u_t, \tag{1.1}$$

де D_t — попит на t-му проміжку часу; A, B — коефіцієнти лінійної регресії ($B > 0$); X_t — ціна одиниці продукції на t-му проміжку часу; u_t — випадкова величина, що має заданий закон розподілу.

Логічно припускати, що попит симетрично коливається відносно деякого середнього значення, котре визначається постійними коефіцієнтами лінійного рівняння (їхніми оцінками). Тому, зокрема, можна обрати нормальний закон розподілу з нульовим математичним сподіванням і заданим середньоквадратичним відхиленням σ_u.

Припустимо, що пропозиція впродовж поточного проміжку часу також лінійно (в середньому) залежить від ціни, але не поточної, а такої, що являє собою комбінацію цін на двох попередніх проміжках часу. У найпростішому випадку це може бути середнє значення цін протягом двох попередніх проміжків часу. Отже, для обчислень пропозиції можна (якщо для цього є підстави) використовувати таку залежність:

$$S_t = C + KX(\rho) + v_t\ , \tag{1.2}$$

де S_t — пропозиція впродовж t-го проміжку часу; C, K — коефіцієнти лінійної регресії ($K > 0$); $X(\rho)$ — середнє (середньозважене) значення ціни на двох попередніх проміжках часу; v_t — випадкова величина, що має заданий закон розподілу. Можна, зокрема, для спрощення обрати нормальний закон розподілу випадкової величини v_t з нульовим математичним сподіванням і заданим середньоквадратичним відхиленням σ_v.

Ціна $X(\rho)$ може визначатися згідно з формулою:

$$X(\rho) = X_{t-1} - \rho(X_{t-1} - X_{t-2}), \tag{1.3}$$

де X_{t-1} — ціна на ($t - 1$)-му проміжку часу; X_{t-2} — ціна на ($t - 2$)-му проміжку часу; ρ — ваговий коефіцієнт, значення котрого задається в моделі в діапазоні ($0 \le \rho \le 1$). Якщо $\rho = 0$, то середньозважена ціна $X(\rho) = X_{t-1}$. Це означає, що навчання в модель не закладене. Для другого граничного випадку ($\rho = 1$) середньозважена ціна $X(\rho) = X_{t-2}$. Це також означає, що навчання у моделі відсутнє, але для визначення пропозиції використовується віддалене в часі значення ціни. За умови $\rho = 0{,}5$ середньозважена ціна $X(\rho)$ дорівнює середньоарифметичному значенню цін X_{t-1} та X_{t-2}.

До моделі треба ще долучити рівняння локальної рівноваги ринку:

$$S_t = D_t + w_t, \tag{1.4}$$

де S_t — пропозиція на t-му проміжку часу; D_t — попит на t-му проміжку часу; w_t — випадкова величина, котра має заданий закон розподілу.

Можна прийняти гіпотезу, що w_t має нормальний закон розподілу з нульовим значенням величини математичного сподівання та із середньоквадратичним відхиленням — σ_w.

Система рівнянь (1.1)—(1.4) після відповідних простих перетворень зводиться до такого виразу:

$$X_t = F(X_{t-1}, X_{t-2}), \tag{1.5}$$

де $F(X_{t-1}, X_{t-2})$ — функція, що є оцінкою кореляційно-регресійного зв’язку між змінними X_t, X_{t-1}, X_{t-2}.

Спочатку необхідно якимось наближеним способом визначити ціну для перших двох проміжків часу. Після цього можна проводити обчислення згідно з виразом (1.5) певну кількість разів (ітерацій). Результати обчислень можуть бути подані також у графічному вигляді.

Задача аналізу полягає у дослідженні впливу параметрів системи на характер залежності ціни у часі (як функції часу), а також у знаходженні рівноважної ціни.

Завдання для лабораторної роботи

1. Розробити алгоритм «павутиноподібної моделі» та програму його реалізації на комп’ютері. Провести налагодження програми для усунення формальних помилок.

Умова збіжності:

$$|X_{t+1} - X_t| < |X_{t-1} - X_{t-2}|, \quad t \geq 3. \tag{1.6}$$

Ітеративний процес завершується за умови, коли

$$|X_t - X_{t-1}| < \varepsilon,$$

де ε — задане досить мале число.

2. Виявити збіжність процесу згідно із запропонованою схемою. Дослідити збіжність, коли:

а) $K = B$ (наприклад $K = 5$);

б) $K < B$ (наприклад $K = 3$);

в) $K > B$ (наприклад $K = 6$).

3. Здійснити пошук і аналіз рівноважної ціни за умови, коли кореляційно-регресійні залежності між попитом на продукцію та її ціною, а також між пропозицією та ціною подані нелінійними залежностями. Побудувати відповідний алгоритм, комп'ютерну програму та провести відповідні обчислення на підставі певних гіпотетичних даних щодо значень параметрів моделі.

1.2. ЕКОНОМІЧНІ КОЛІЗІЇ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ

Визнання об'єктивності ринку та ейфорія з приводу його всемогутності як творця загального щастя — речі різні.

Ще з часів Адама Сміта точаться суперечки, виникають колізії між економічними теоріями відносно доцільності втручання держави в економічні процеси. Звичайно, соціалістичне жорстке планування, як і лібералізм (усунення держави від регулювання економіки), — це крайнощі. Міра державного втручання залежить від конкретних обставин. Так, зокрема, у періоди системних трансформацій соціально-економічних процесів роль державного регулювання, на нашу думку, суттєво зростає.

Механізм ринкових відносин є ефективним у багатьох сферах економічного буття, але є й сфери, де ринковий механізм безсилий. Більше того, буквальне використання ринкової логіки у цих сферах може призводити до критичної ситуації.

Деякі з цих сфер не є загадковими. Вони добре відомі як практикам, так і вченим. Ринкові механізми не можуть правильно зорієнтуватися в пошуках ефективних рішень у ситуаціях:

1) монополії чи олігополії;

2) значного розриву в часі між витратами й економічним ефектом (лаг — затримка реалізації значних за обсягом інвестицій);

3) зниження додаткових витрат на приріст виробництва продукції за спадаючих цін (ефект науково-технічного прогресу) тощо.

Головний «ворог» ринкових механізмів як механізмів організації ефективного функціонування економіки — це, звичайно, *монополія*.

Спробуймо описати математичною мовою колізії, що виникають у разі зіштовхування ринку, його механізмів, з монополією. Приймемо гіпотезу, згідно з якою економічна система спрямована до максимізації сумарного економічного ефекту ($П_{\Sigma}$), тобто сумарного прибутку:

$$П_{\Sigma} = \int_0^Q \frac{du}{dQ} dQ - \int_0^Q \frac{ds}{dQ} dQ \to \max, \qquad (1.7)$$

де Q — випуск продукту; $u(Q)$ — функція валового економічного ефекту (корисності); $\frac{du}{dQ}$ — приріст валового економічного ефекту (корисності) від кожної додаткової одиниці продукції; s — витрати на виробництво; $\frac{ds}{dQ}$ — приріст витрат на виробництво додаткової одиниці продукції.

Перший елемент правої частини цього виразу характеризує валовий економічний ефект, другий — витрати на виробництво всього обсягу продукції, а вираз у цілому — сумарний економічний ефект (продукт).

Легко помітити, що *розширення* виробництва буде доцільним лише *доти, доки додаткові витрати не зрівняються з додатковим валовим економічним ефектом від споживання*. Математично це положення доводиться дослідженням наведеного вище виразу (1.7) *на максимум*. Якщо продиференціювати $П_{\Sigma}$ по Q і похідну прирівняти до нуля, то оптимальний обсяг виробництва, який забезпечує максимум сумарного прибутку, відповідатиме точці Q, у якій $\frac{du}{dQ} = \frac{ds}{dQ}$, тобто додатковий валовий ефект споживання дорівнює додатковим витратам на виробництво одиниці продукції. Звичайно, тут повинні виконуватись умови:

$$\frac{d^2u}{dQ^2} < 0; \; \frac{d^2s}{dQ^2} < 0.$$

Але в умовах ринкової економіки відбувається розподіл сумарного економічного ефекту між виробником продукції, її споживачем і бюджетом. Характер цього розподілу значною мірою визначає зацікавленість економічних суб'єктів у досягненні суспільної ефективності, тобто в русі виробництва до точки оптимуму.

У чому ж полягають економічні інтереси виробника (l) і споживача (с)? *Очевидно, що виробник зацікавлений у максимізації різниці* між обсягом реалізації по ціні p та витратами:

$$\Pi_l = Q \cdot p - \int_0^Q \frac{ds}{dQ} dQ \to \max,$$

де Π_l — прибуток виробника.

Споживачеві важливо максимізувати різницю між економічним ефектом від використання продукції та ціною за неї:

$$\Pi_c = \int_0^Q \frac{du}{dQ} dQ - Q \cdot p \to \max,$$

де $\Pi_с$ — прибуток споживача.

Якщо виробник не є монополістом, тобто не в змозі вплинути на рівень цін (вільна конкуренція), то p — не залежить від Q, тобто максимум ефекту виробника буде досягнутий у точці, де похідна Π_l по Q дорівнюватиме нулеві, тобто коли:

$$p = \frac{ds}{dQ},$$

а максимум ефекту споживача — в точці, де:

$$p = \frac{du}{dQ}.$$

Максимум сумарного ефекту досягається за обсягів виробництва (Q_{opt}), котрі характеризуються співвідношенням

$$\frac{du}{dQ} = \frac{ds}{dQ}.$$

Звідси можна зробити висновок, що виробник буде зацікавлений у виробленні *оптимального, з погляду народного господарства*, обсягу продукції (Q_{opt}), а споживач — у повному використанні цієї продукції за умови, коли ціни встановлюються на рівні:

$$p_{opt} = \frac{du}{dQ} = \frac{ds}{dQ}.$$

Але якщо виробник контролює значну частку ринку (випуску продукції, галузі) і йому надається право впливати на визначення обсягів випуску продукції, то його інтереси розходяться з народногосподарськими інтересами. Формально цю суперечність можна показати таким чином. Якщо $p = f(Q)$, то

$$\frac{d\Pi_l}{dQ} = p + Q\frac{dp}{dQ} - \frac{ds}{dQ}.$$

Споживачі не в змозі вплинути на обсяги та ціну. Тобто максимум ефекту виробника буде досягнуто за умови:

$$p = \frac{ds}{dQ} - Q\frac{dp}{dQ}.$$

Отже, цей результат свідчить про те, що за можливості контролювати значну масу продукції з боку виробника точка *його локального оптимуму* не збігається з точкою народногосподарського оптимуму.

Раціональною є гіпотеза щодо від'ємної еластичності цін та обсягу виробництва (зі зростанням обсягів виробництва ціни на продукцію знижуються), тобто $\frac{dp}{dQ} < 0$.

Виробник, прагнучи до максимізації свого локального критерію, буде здебільшого зацікавлений у заморожуванні виробництва на рівні, нижчому, ніж оптимальний

$$(Q_l < Q_{opt}),$$

і, відповідно, у завищенні цін

$$p_l > p^*_{opt},$$

оскільки

$$\left[-Q \cdot \frac{dp}{dQ}\right] > 0.$$

За подібних умов державне регулювання економіки повинно забезпечити таку організаційну систему функціонування господарських об'єктів, яка використовувала б ефективні методи вилучення доходів у великих виробничих об'єднань (монополій) або їх недопущення. Тобто державне регулювання економіки в даному випадку є необхідним.

1.3. ПРОБЛЕМИ МЕТОДОЛОГІЇ МАКРОЕКОНОМІЧНОГО АНАЛІЗУ

Сучасна макроекономічна теорія розвивається значною мірою на іншій методологічній основі порівняно з теоретичною базою підручників для вищих економічних навчальних закладів. І суть зовсім не в тому, що ці підручники погані чи застарілі: проблема полягає у значних семантичних розбіжностях між «канонічним» викладенням макроекономічних моделей і сучасним станом макроекономічного моделювання.

Композиція «канонічної» макроекономіки здебільшого є комбінацією (у певній пропорції) статичних моделей класичного та кейнсіанського типу. Ці моделі формуються (переважно) як апріорні конструкції, існування яких підтверджується емпірично або, принаймні, не відхиляється на підставі наявних даних. Для кейнсіанської моделі характерними є, наприклад, гіпотези щодо існування функції агрегованого споживання, котра постулюється поза поведінкою раціональних споживачів. Для класичної теорії характерними є гіпотези типу існування «простого рівняння кількості грошей», яке визначається поза мотиваціями власників грошових активів.

У сучасному макроекономічному моделюванні домінує підхід, що ґрунтується на динамічних моделях раціональної поведінки типового агента на ефективному ринку. Ця поведінка формує раціональні очікування в умовах невизначеності, ризику та відсутності арбітражу. Змістовно такі поняття визначаються у межах концепції рівноваги як для фазового простору, так і в часі. Моделювання макроекономічної поведінки у багатьох випадках уявляється як задача оптимального управління, зокрема, динамічного програмування Р. Беллмана, що формулюється для детермінованих чи стохастичних процесів.

У макроекономічному моделюванні вирішальну роль відіграє адекватне формулювання якісної гіпотези, що характеризує, зокрема, межі використання певної макроекономічної моделі.

Різні макроекономічні процеси, наприклад позики держави на вільному ринку, емісія грошей, інфляція тощо, можуть бути змодельовані випадковими процесами, що описуються стохастичними диференційними рівняннями, розв’язок яких пояснює поводження економічних агентів на відповідних ринках. Існує можливість використання в макроекономічному аналізі методології ціноутворення опціонів, що викладена у працях Р. Мертона, Ф. Блека та М. Шоулза, А. Бонесса, П. Самуельсона.

Однак паралельно стохастичній інтерпретації макроекономічних процесів останнім часом інтенсивно розвивається альтернативний, у певному розумінні, підхід до аналізу макроекономічної динаміки, котрий вбачає джерело і природу невизначеності в принциповій *нелінійності* економічних процесів.

У 1980-х роках отримано результати, які показали, що для простої дискретної моделі макроекономіки вже в одномірному випадку, за певних раціональних економічних гіпотез, процес може набувати хаотичного характеру. Виявлення множинності точок рівноваги, граничних циклів, біфуркацій і хаосу, асиметрії інформації змушує економістів по-новому аналізувати макроекономічні системи. Теорія сучасної нелінійної динаміки, наприклад методи обчислення розмірності фрактала, дозволяє обчислити для таких процесів, зокрема, автокореляцію, хоч природа таких залежностей, звичайно, зовсім інша, ніж для стохастичних процесів.

Відкриття в 1960-х роках таких об’єктів, як «дивні атрактори» і «фрактали», справило суттєвий вплив на методологічні основи макроекономіки. Кейнсіанська макроекономіка, яка розвивалась у багатьох аспектах поза принципами мікроекономіки і навіть протиставлялась їй, методологічно спиралася на загальну теорію систем. Квінтесенція цього підходу — «ціле є чимось більшим аніж сума частин, що його складають» — по суті, виражала загальнонаукове кредо кейнсіанської макроекономіки (цілого), поведінка котрого (цілого) якісно відмінна від поведінки його елементів — виробників і споживачів, які взаємодіють. Треба віддати належне цьому підходу: в його концептуальних положеннях вдається отримувати вишуканий розв’язок низки «парадоксів» макроекономіки. Але цілком зрозумілим є, наприклад, те, що, навіть беручи до уваги раціональну поведінку кожного суб’єкта, їхня сукупна поведінка в умовах рецесії є ірраціональною, оскільки призводить до погіршення становища кожного з них.

1.4. ЕВОЛЮЦІЙНА ЕКОНОМІКА

Останнім часом динамічно розвивається новий підхід до пояснення постійних змін економічних процесів та явищ, який отримав назву «Еволюційна теорія економічних змін»[1]. Засновником еволюційної економіки як розділу економічної науки вважають австрійського економіста Йозефа Шумпетера[2]. Існує думка, що підходи еволюційної економіки можуть бути плідними в

[1] *Нельсон Р., Уинтер С.* Эволюционная теория экономических изменений. — М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000.

[2] *Шумпетер Й.* Теория экономического развития: (Исследование предпринимательства, прибыли, капитала, кредита, процента и цикла конъюнктуры). — М.: Прогресс, 1982.

побудові теорії економіки перехідного періоду. В перехідний період, коли процеси прискорюються, ламаються старі інституції, створюються нові, економічна рівновага не встигає ще встановитися, як умови знову змінюються. Головне — зрозуміти, яким чином відбувається процес змін.

Основний об'єкт еволюційної економіки — це множина (популяція) фірм у конкретному (ринковому) середовищі (галузі). Ця сукупність як певна популяція визначається такими трьома складовими:

1) правилами поведінки окремої фірми;

2) правилами взаємодії фірм поміж собою;

3) правилами появи на відповідному ринку нових фірм і, відповідно, правилами виходу з популяції (зникнення) окремих фірм.

Останнім часом у працях з економічної теорії як центральні проблеми постають: роль інформації, процес формування очікувань суб'єктами економіки, деталізований аналіз функціонування ринків в умовах різноманітних «недосконалостей». Значна увага приділяється неповноті інформації та недосконалості конкуренції, трансакційним витратам, неподільності, зростаючому ефектові масштабу, а також співвідношенням між цими чинниками. Той факт, що не все в діловій поведінці відбувається у відповідності з передбачуваними зразками, еволюційна теорія враховує, визначаючи наявність елементів невизначеності та породжуваного цим ризику як у процесі прийняття рішень, так і в наступних етапах їх реалізації.

Пошук і відбір є двома одночасно наявними та взаємодіючими компонентами еволюційного процесу. Ті самі процеси, котрі забезпечують зворотний зв'язок при відборі, впливають і на напрям пошуку та відбору фірми, розвиваються в часі. Згідно з цим ситуація в галузі в кожен період часу несе в собі лише зародки ситуації в ній щодо наступного періоду. Процес характеризується неоднозначністю переходу від одного періоду до наступного. Треба враховувати недетермінований характер даного процесу, зокрема елемент випадковості, притаманний результатам пошуку. Таким чином, те, що насправді визначає ситуація в галузі в даний період, — це насамперед розподіл імовірностей ситуацій у цій галузі, що можуть реалізуватися у наступний період часу. Якщо додати до цього, що ситуація в галузі в періоди, що передують періоду t, несуттєво впливає на перехідні ймовірності між t і $t + 1$, то це означатиме, що зміна в часі ситуації в галузі (чи її «стану») є марківським процесом. Безумовно, у визначених вище широких межах теоретичної схеми можна побудувати величезну кількість часткових моделей. Кожна з цих моделей визначає часткові випадки марківського процесу, котрий можна аналізувати за допомогою математичних теорем, що стосуються марківських процесів загального виду. Однак для того щоб такий аналіз приводив до висновків, які мають прозорий економічний сенс, у моделі мають бути присутніми деякі специфічні з погляду економічного змісту (сенсу) особливості. Ідеться про клас марківських моделей еволюції галузі. Мета моделювання — в тому, щоб не просто описати систему, а щоб цей опис дозволяв глибше зрозуміти її поведінку (отримати нові знання). Ідеться й про те, що витлумачувати реальні події в економіці (постійні збурення) має така теорія, котра ґрунтується на принципі адаптивних змін і зазвичай на таких ключових припущеннях: напрямок адаптивної реакції збігається з напрямком максимізації прибутку (чи — ширше — зі зростанням ринкової вартості); адаптивні процеси збігаються до нового квазірівноважного стану.

Важливе місце в еволюційній економіці займають також моделі, пов'язані з інноваціями, з науково-технічним прогресом тощо.

1.5. СИНЕРГЕТИЧНА ЕКОНОМІКА

Світ — це постійні зміни, розвиток, вічна нестійкість, а періоди стабілізації — лише короткі зупинки на цьому шляху. Ця точка зору все ширше використовується в економічній теорії. Сучасна методологія аналізу нелінійних динамічних систем сформувалася в новий науковий напрям *синергетику* — міждисциплінарну науку, яка має метою виявлення спільних принципів еволюції, самоорганізації та адаптації складних систем у різних галузях знань на підставі побудови та дослідження нелінійних динамічних математичних моделей. Важливим поняттям синергетики є «катастрофа», «біфуркація», «граничний цикл», «дивний атрактор», «дисипативна структура», «біжуча хвиля» тощо[1].

Синергетична економіка надає особливого значення, на відміну від лінійних, нелінійним аспектам економічного еволюційного процесу: не стійкості, а нестійкості, не неперервності, а розривам (дискретності), не постійності, а структурним змінам. Синергетична економіка трактує нелінійність і нестійкість як джерело розвитку різноманіття та складності економічної динаміки. Водночас треба враховувати ще й неповноту і невизначеність інформації.

У синергетичній економіці економічна еволюція тлумачиться як незворотний процес. Синергетична економіка все ж таки роз-

[1] *Занг В. Б.* Синергетическая экономика: Время и перемены в нелинейной экономической теории / Пер. с англ. — М.: Мир, 1999.

вивається на підставі традиційної. Вона відхиляє деякі ідеї традиційної економіки і трактує її результати лише як часткові, а не загальні випадки.

Синергетична економіка ґрунтується на чітких послідовних стадіях економічного аналізу. У своїх «Основах економічного аналізу» Пауль А. Самуельсон поділяє розвиток аналітичної економіки на п’ять великих стадій. По-перше, у Вальраса можна побачити кульмінацію опису детермінованих рівноваг на статичному рівні. Паретто та інші вчені зробили наступний крок, який є основою теорії порівняльної статистики. Третій крок, що характеризує мінімізацію витрат у межах економічної одиниці, був зроблений Джонсоном, Слуцьким, Хіксом, Алленом та іншими економістами. Четверте досягнення — це відкриття принципу відповідності. Природним — п’ятим — кроком, котрий необхідно зробити після того, як досліджено відгук системи на зміну заданих параметрів, полягає в тому, щоб дослідити поведінку системи як функцію часу. Далі Самуельсон наголошує: «Користь від будь-якої теоретичної побудови полягає в тім, що вона прояснює перебіг зміни економічних даних — змінних величин — чи параметрів, від яких вони залежать». Означене загальне положення є справедливим у сфері як динаміки, так і статики. Наступний логічний крок — перехід до створення теорії порівняльної динаміки, яка повинна включати в себе теорію порівняльної статики та кожен з попередніх п’яти кроків як часткові випадки і водночас бути значно ширшою. Цей крок здійснюється через відносно тривалий проміжок часу, бо лише в наш час математика забезпечила нас потужними аналітичними методами, необхідними для розуміння суті динамічної поведінки економічних систем.

Синергетика акцентує увагу передусім на тому, що економічні системи можуть проходити через ієрархію нестійкого розвитку, і в них (системах) розвиваються дедалі більш складні структури. Такі нестійкості викликані зміною зовнішніх параметрів і можуть привести до нової просторово-часової організації системи. Зокрема, це демонструється виникненням раптових (структурних) змін, існуванням граничних циклів і хаосу, роллю, яку відіграють стохастичні процеси в економічній еволюції, ефектами часових масштабів і швидкостей установлення відносної рівноваги в економічному аналізі тощо.

1.6. ЕКОНОМІКА ЯК СКЛАДНА СИСТЕМА З ВНУТРІШНЬО ПРИТАМАННИМ РИЗИКОМ

Один із персонажів твору Мольєра «Міщанин у дворянстві» — добродій Журден — з подивом дізнається, що він усе своє життя розмовляв прозою. Дещо схожа ситуація має місце в економічній науці та економічній кібернетиці. Економісти ще на зорі розвитку політичної економії вивчали проблеми, котрі згодом були означені як кібернетичні. Так, вони розглядали процеси управління і регулювання економічними системами як такі, що складаються з пов'язаних поміж собою елементів. Це було ще задовго до того, як ці питання були систематизовані й чітко сформульовані у загальнотеоретичному плані кібернетикою.

Здатність до абстрагування властива людському розумові. Вона дозволяє йому надати відносно точної форми своєму мисленню, сформулювати принципи та інструментарій економіко-математичного моделювання і таким чином виробити методологію — систему знань, яка характеризується логічно взаємоузгодженими твердженнями і гармонійним взаємозв'язком окремих економічних дисциплін.

Професор філософії О. Г. Спіркін наголошує[1], що в наш час усі основні науки теоретико-економічного блоку (політекономія — як одна з найскладніших галузей людського знання, а також макро- та мікроекономіка) спираються на економіко-математичне моделювання, що надає цим наукам додаткової точності, строгості щодо систематизації та осмислення фактів, теоретичного витлумачення їх, орієнтованого на істинність та максимально можливе практичне втілення. А професор економіки Олег Гаврилишин[2] пише про необхідність ширшого використання в економіці аналітичних підходів, зокрема теорії динамічних систем. Професор Ю. Козелецький, відомий учений у галузі психологічної теорії рішень в економіці, у своїй монографії[3] широко використовує економіко-математичні методи і моделі, алгоритмічні стратегії, теорію ризику стосовно до теорії рішень як предмета наукового дослідження.

Можна говорити також про взаємопроникнення у застосуванні інструментарію різних гілок економічних наук та ширше використання ними принципів математичного моделювання як методологічної бази, а також про розвиток інструментарію математичного моделювання на підставі досягнень інших галузей науки. Це принципово важливо, бо у протилежному випадку занепадати-

---

[1] *Спиркин А. Г.* Философия: Учебник. — М.: Гардарики, 1999.
[2] *Гаврилишин О.* Основні елементи теорії ринкової системи. — К.: Наук. думка, 1992.
[3] *Козелецький Ю.* Психологическая теория решений. — М.: Прогресс, 1979.

муть різні форми міждисциплінарного діалогу, збіднюватимуться економічна наука та освіта України.

Потрібно наголосити: це стосується кожного з нас, усе, що є об'єктом нашого пізнання, є часткою нашого життя. Заклик «Пізнай самого себе», накреслений на архітраві старовинного храму у Дельфах, — це свідчення фундаментальної істини, котру як елементарне правило доречно застосовувати до різних гілок економічної науки й економічної кібернетики особливо.

З погляду теорії систем економіку слід віднести до класу динамічних, слабоструктурованих систем великої складності. Ця система складається з величезної кількості господарських комірок, які перебувають у тісній, неперервній взаємодії одна з одною. Окрім того, економіка має яскраво виражену ієрархічну, багаторівневу структуру, за якої вищий рівень ієрархії інтегрує за певними правилами (алгоритмами) інформаційні сигнали (потоки) нижчих рівнів ієрархії та оперує інформаційними агрегатами.

Водночас сама економіка постає як підсистема стосовно до суспільства загалом; що ж до існування останнього, то його розвиток далеко не вичерпується суто економічними процесами. Суспільство з певною соціальною структурою, політичною системою, потенціалом культури, морально-етичними принципами, ментальністю являє собою зовнішнє середовище, з елементами якого економіка взаємодіє. Ця взаємодія не є детермінованою (однозначною). Вона відбувається за двома напрямками — від зовнішнього середовища та навпаки.

Економічна кібернетика розглядає економіку, її структурні та функціональні блоки як системи, в яких відбуваються процеси регулювання й управління, що реалізуються рухом і перетворенням інформації. Наголосимо, що інформація, з одного боку, є генератором розвитку соціально-економічної системи, і в той же час, з іншого — джерелом невизначеності та породженого цим ризику в економіці. Тут принципово важливим є інноваційний характер інформації, а вона за означенням не може бути повністю передбачуваною.

Дедалі більше вчених-економістів твердять, що оскільки соціально-економічна система не має об'єктивно заданого зовнішнього імпульсу розвитку, то вона може характеризуватися як така, що саморозвивається. «Пальним», що забезпечує розвиток цієї системи, є нова інформація. Академік Російської академії наук Микола Петраков детально аналізує різні аспекти генерування нової інформації у соціально-економічній системі: «...Навіть залишаючись у межах відносно простої схеми «потреби індивіда та механізми їх задоволення», ми зіштовхуємося з постійною і неповністю передбачуваною пульсацією соціально-економічної системи. Особа, котра ще недавно перебувала в стані задоволення навколишнім соціально-економічним середовищем, «раптом» починає висувати нові вимоги культурного, соціального, естетичного характеру, виказує незадоволення умовами праці тощо. Ці вимоги створюють відповідний інформаційний «шум» у системі, вводять елемент непередбачуваності й випадковості. Власне, цей «шум» є будівельним матеріалом для генерування нової інформації у соціально-економічній системі. Ми маємо постійний фон випадкових збурень, на котрому й виникають «соціально-економічні мутації»[1].

В економіці постійним стимулом генерування нової інформації є також конкуренція, котра автоматично відкриває дорогу науково-технічним винаходам. Можна вказати й на множинність цілей суб’єктів, які є джерелом невизначеності, тощо.

Спинімося на деяких питаннях щодо невизначеності в економіці. Невизначеність — це те, що не піддається однозначній оцінці, а для суб’єктів у галузі економіки і бізнесу треба враховувати й особистісний чинник, який впливає на аналіз ситуації та прийняття рішень. Невизначеність спричиняє ризик.

Отже, ризик внутрішньо притаманний економіці та бізнесу. Економічний ризик породжується невизначеністю (невідомістю, недостовірністю, неоднозначністю), конфліктністю. Наголосимо, що ризик виникає за умови наявності альтернатив рішень, планів, інвестиційних та інноваційних проектів тощо. Якщо відсутні альтернативи, то відсутній і ризик, але й відсутня свобода вибору, що позбавляє людину основної з її характерних ознак (розум, вільна воля, здатність творити).

У наукових працях ідеться про принципи системного аналізу ризику в економічній сфері, згідно з якими будь-яку економічну систему є сенс трактувати як таку, про яку нам не все відомо і не все цілком зрозуміло, тобто яка містить елементи невизначеності та ризику[2]. Це може бути система з недостатньо вираженою структурою, з не абсолютно точним передбаченням перебігу подій і процесів, з не повністю відомими зовнішніми впливами тощо. Частковим видом невизначеності постає випадковість ситуації, коли вид (множина) подій є відомим, але окрема подія може

---

[1] *Петраков Н. Я*. Русская рулетка: экономический эксперимент ценою 150 миллионов жизней. — М.: Экономика, 1998.

[2] *Вітлінський В. В.* Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику. — К.: ДЕМІУР, 1996.

як настати, так і не настати. Тобто можна ввести деяке поле подій (сценаріїв) — таку їх множину, один з елементів якої настає.

Оскільки здебільшого обраний показник ефективності (якості) господарських (фінансових) операцій (проектів) є недетермінованою величиною, то зазвичай припускається гіпотеза, за якою цю величину є сенс вважати випадковою чи розпливчастою (нечіткою).

В економіці та бізнесі у низці випадків з огляду на обрані цілі доводиться приймати рішення на підставі побудови системи гіпотез, зокрема, через відсутність вичерпної, достовірної інформації. А це призводить до ризику відхилення від цілей, до недоотримання очікуваних результатів, можливих збитків, які можуть виникнути через недостатню обґрунтованість (помилковість, неадекватність) тих чи інших гіпотез (припущень). Щоб урахувати ступінь ризику й хоча б частково уникнути можливих збитків, потрібно, якщо є така змога, перевіряти істинність гіпотез (припущень). Це можна здійснити, зокрема, за допомогою методів перевірки статистичних гіпотез, котрі мають універсальний характер, оскільки у вигляді гіпотез можна подати майже будь-яке припущення зі сфери економіки та бізнесу. Техніка перевірки статистичних гіпотез зводиться до обчислення фактичних значень спеціальних, адекватних цілям та ситуації, критеріїв і порівняння їх із табличними значеннями для певного, заданого рівня значущості (чи ризику).

Ступінь ризику залежить також від ставлення суб'єкта прийняття рішень (управлінської команди) до нього: схильності, несхильності, байдужості. Тому всі чинники невизначеності, конфліктності та зумовленого ними ризику поділяють на об'єктивні та суб'єктивні.

Отже, можна дати таке означення економічного ризику, що базується на принципах системного аналізу.

> ***Ризик****, яким обтяжена економічна діяльність, — це економічна категорія, що відбиває характерні особливості сприйняття заінтересованими суб'єктами економічних відносин об'єктивно існуючих невизначеності та конфліктності, іманентних процесам цілепокладання, управління, прийняття рішень, оцінювання.*

Наголосимо, що ризик має діалектичну об'єктивно-суб'єктивну структуру.

Оцінка ризику є багатовимірною величиною, що характеризує можливі відхилення від цілей, від бажаного (очікуваного) результату, можливу невдачу (збитки) з урахуванням впливу контрольованих (керованих) і неконтрольованих (некерованих) чинників, прямих і зворотних зв’язків.

Існує ціла система показників кількісної оцінки ступеня ризику. Але від жодного кількісного показника (кількісної оцінки) ступеня ризику не слід очікувати, що він показуватиме адекватні результати за будь-яких обставин. Іншими словами, встановлення певного єдиного показника як кількісної міри (ступеня) ризику є спробою подолати невизначеність, характеризуючи випадкову величину (ефективність, збитки) одним (єдиним) показником (числом). На нашу думку, кількісна оцінка ризику є багатовимірною величиною (вектором), компоненти якої відбивають різні грані ризику й формуються залежно від мети дослідження, взятої системи гіпотез, суб’єктивного чинника, який характеризує ставлення суб’єкта ризику (управлінської команди) до невизначеності та ризику, тощо.

Наголосимо, що актуальним є завдання побудови аксіоматичної теорії обрання підмножини кількісних показників ступеня ризику (з множини можливих) стосовно до об’єкта дослідження, обраної системи цілей, системи гіпотез, а також ставлення до нього суб’єкта ризику (управлінської команди), ураховуючи те, що ризик є економічною категорією, має діалектичну об’єктивно-суб’єктивну структуру.

Однією з головних якостей сучасного керівника, економіста, підприємця, системного аналітика є вміння здійснювати правильний аналіз, робити вибір із множини альтернативних варіантів, здатність іти на ризик у розумних межах, навички раціонально працювати в умовах невизначеності, неповноти та асиметрії інформації, конфліктності. Чим складнішим і невизначенішим є соціально-економічне середовище, тим актуальнішим є необхідність урахування ризику, побудова й удосконалення адекватного інструментарію його аналізу, моделювання та управління ризиком на засадах синергетичного та системного підходів.

Останнім часом теорія економічного ризику (ризикологія) бурхливо розвивається.

1.7. СИСТЕМНІ ВЛАСТИВОСТІ ЕКОНОМІЧНИХ РІШЕНЬ[1]

---

[1] *Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Шарапов О. Д.* Економічний ризик і методи його вимірювання: Підручник. — К.: ІЗМН, 1996.

Невизначеність економічної інформації об'єктивно наявна завжди на стадії проектування та прийняття рішень. Основне джерело цієї невизначеності — неточність, неповнота інформації про мінерально-сировинну базу та інші природні ресурси, можливості й наслідки науково-технічного прогресу, тенденції можливих змін попиту та пропозиції тощо.

Оскільки невизначеність, неповнота інформації в економічній діяльності існують завжди, то економічні теорії, а особливо теорії прийняття рішень, планування, які цього не враховують, слід вважати лише першими наближеннями до реальної дійсності. В останні роки теорія оптимального стохастичного програмування, теорія нечіткої (розмитої) оптимізації, теорія гри, імітаційне моделювання тощо дають досить зручний апарат для переходу до другого наближення.

У ринковій економіці підвищуються вимоги до забезпечення прийнятного рівня ризику та надійності планів і економічних рішень. Адже за «ненадійність», недоцільний ризик доводиться розраховуватися власними коштами. Зокрема, якщо економічна система матиме низькі маневрені властивості, то це не дасть змоги швидко реагувати на зміни зовнішніх умов її функціонування та розвитку (зміни в номенклатурі та попиті, науково-технічному прогресі тощо).

Імовірно, що одним із основних напрямів урахування невизначеності, неповноти інформації в теорії оптимального планування є концепція адаптивності плану, його параметрів. Координація планів, адаптивність їх щодо додаткової інформації, яка надходить у процесі функціонування, є значним чинником підвищення ефективності економічних систем. Наприклад, у задачах багатоетапного стохастичного оптимального планування значення змінних та відповідних двоїстих оцінок залежить від умов реалізації плану, які постійно змінюються. Адаптуючи план, можна зменшити ризик і одержати економічний ефект (порівняно з неадаптивними підходами). Зрозуміло, що міра адаптивності плану є величиною, яку можна оптимізувати. Надмірна надійність (малий ризик) тягне за собою певні додаткові витрати, що забезпечують мінімізацію ризику відхилень від плану, а це призводить до виникнення ризику невикористаних можливостей (надмірних витрат). Ці витрати пов'язані зі збільшенням запасів, необхідністю розробки певних заходів тощо.

Теорії планування, які виходять із детерміністських уявлень про наявність вичерпної інформації щодо майбутніх умов реалізації планів, очевидно, не здатні описати багато істотних моментів функціонування та розвитку економічних систем. У межах детерміністичного підходу неможливо описати процес адаптації планів до нової інформації, їхню гнучкість. Водночас за детерміністичного підходу відсутнє наукове обґрунтування для коригування та маневреності планів, для створення запасів тощо.

Системні властивості економічних планових рішень слід розглядати як урахування таких важливих характеристик планів, як ризик та надійність їх реалізації, еластичність, маневреність, гнучкість, інерційність, живучість, стійкість тощо.

Урахування чинників, що визначають означені характеристики, дає змогу глибше проникнути в суть оптимізації процесів розвитку та функціонування економічних систем за невизначеності вхідної інформації. Зокрема, виникає можливість здійснити економіко-математичний аналіз рівня ризику та надійності планових рішень та обґрунтувати вимоги для забезпечення раціонального рівня цих показників на етапі прийняття рішень.

Серед характеристик господарських планів найважливішою є їх ефективність. У результаті зміни умов реалізації плану фактичний рівень ефективності може значно відхилятися від планового, що спричиняє нестабільність, нестійкість, підвищений ризик функціонування економічної системи. Припустимо, що внаслідок несприятливих погодних умов урожайність кормових культур знизилася на 25 %. Через відсутність запасів кормів це призведе до зниження надоїв молока більше ніж на 25 %, що негативно вплине на величину виручки, одержаної від реалізації продукції, на дохід і рентабельність. Тому одним із важливих завдань планування є проблема стабільності, стійкості показників ефективності тощо.

Системні характеристики планів (ризик та надійність, надійність та еластичність, ризик та еластичність) взаємопов’язані. Наприклад, маневрені якості планів справляють значний вплив на еластичність, надійність, ризикованість.

Зауважимо, що маневреність, ризикованість, надійність та еластичність плану істотно залежать від його структури, складу й будови.

1.8. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Об’єкт дисципліни «Моделювання економіки».
2. Предмет дисципліни «Моделювання економіки».
3. Методи, що використовуються в моделюванні економіки.
4. Особливості економіки як об’єкта моделювання.

5. Поясніть сутність дефініції «економіка як кібернетична система».
6. Обґрунтуйте твердження, згідно з яким економіка характеризується як слабоформалізована система.
7. Сутність процесів, що відбуваються в перехідній економіці.
8. Поясніть, що, на вашу думку, є характерним для економіки: стаціонарний стан чи постійні зміни, еволюція соціально-економічного буття?
9. Обґрунтуйте сутність поняття «ефективно функціонуюча економіка».
10. Поясніть, що може, а чого не здатний реалізувати ринок.
11. Сутність нової парадигми в економічній теорії.
12. Економіка та її взаємодія з політикою та культурою.
13. Поясніть, що може означати термін «суб’єктивність економіки».
14. Поясніть, що є причиною генерування нової інформації в соціально-економічній системі.
15. Розкрийте поняття «блок зворотних зв’язків» в економіці та підприємництві.
16. Перелічіть основні проблеми, що виникають у макро- та мікроекономічному аналізі.
17. Розкрийте сутність концепції «еволюційна економіка».
18. Поясніть сутність концептуальних положень, що утворюють поняття «синергетична економіка».
19. Поясніть, чому економіці внутрішньо притаманні невизначеність і ризик.
20. Перелічіть основні системні характеристики економічних рішень. Сутність цих системних характеристик.

1.9. Теми рефератів

1. Взаємодія суспільства та економічної системи, їх формалізація.
2. Проблеми побудови концептуальної моделі управління економічними об’єктами та процесами з урахуванням взаємодії із суспільством і біологічним середовищем.
3. Сутність категорії мети в діяльності економічних систем та її формалізація для здійснення кількісного аналізу.
4. Формалізація процесів функціонування окремих економічних систем у категоріях «цілі» й «засоби».
5. Ринковий інтерес та суспільна доцільність. Аспекти їх концептуалізації та графічного подання.
6. Механізм формування цілей та критеріїв функціонування економічного об’єкта.
7. Конкуренція в економіці та її роль у генеруванні нової інформації.

8. Роль державного регулювання економіки та концептуальні моделі різних варіантів втручання держави у ринковий механізм.
9. Проблеми формалізації інвестування соціально-економічної сфери. Інвестиції в освіту та науку та підходи до їх кількісного оцінювання.
10. Моделювання економічних процесів розвитку з урахуванням надійності.

1.10. Завдання для самостійної роботи

1. Сутність проблем, що виникають у процесах макроекономічного аналізу.
2. Основні аспекти та концептуальні засади еволюційної теорії економічного розвитку.
3. Основні концептуальні підходи синергетичної економіки.
4. Теорія ризику та її роль у розвитку економічної теорії та в практиці господарювання.
5. Сутність проблем, що виникають у дослідженні олігопольних ринків.
6. Павутиноподібна модель.

Розв'язання прикладних задач, побудова алгоритму та створення комп'ютерної програми, що реалізує економетричну павутиноподібну модель. Розв'язання конкретних прикладів. Аналіз отриманих результатів.

2

РОЗДІЛ

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ

2.1. МОДЕЛЮВАННЯ ЯК МЕТОД НАУКОВОГО ПІЗНАННЯ

2.1.1. Сутність моделювання

Моделювання в наукових дослідженнях, яке почали застосовувати ще в глибоку давнину, охоплює нині все нові й нові сфери наукових знань. Однак методологія моделювання впродовж тривалого часу розвивалась незалежно від інших наук. Була відсутня єдина система понять, єдина термінологія. Лише згодом почали усвідомлювати роль моделювання як універсального методу наукового пізнання.

Термін «модель» широко використовується в різних сферах діяльності людини і має безліч семантичних значень. Розглядатимемо тільки такі моделі, котрі є інструментами для одержання нових знань.

Термін «модель» походить від латинського слова «modulus» — зразок, норма, міра. ***Модель*** *— це об'єкт, що заміщує оригінал і відбиває найважливіші риси і властивості оригіналу для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез.*

> ***Математична модель*** *— це абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь і/чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється.*

Неможливо уявити собі сучасну науку, зокрема економіку, без широкого застосування математичного моделювання.

Сутність цієї методології полягає в заміні вихідного об'єкта його «образом» — математичною моделлю — і подальшим вивченням (дослідженням) моделі на підставі аналітичних методів та обчислювально-логічних алгоритмів, які реалізуються за допомогою комп'ютерних програм. Робота не із самим об'єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість відносно швидко і безболісно досліджувати його основні (суттєві) властивості та поводження за будь-яких імовірних ситуацій (це переваги теорії). Водночас обчислювальні (комп'ютерні, симулятивні, імітаційні) експерименти з моделями об'єктів дозволяють, спираючись на потужність сучасних математичних та обчислювальних методів і технічного інструментарію інформатики, ретельно та досить глибоко вивчати об'єкт у достатньо детальному вигляді, що недоступно суто теоретичним підходам (це перевага експерименту). Не дивно, що методологія математичного моделювання бурхливо розвивається, охоплюючи аналіз надзвичайно складних економічних і соціальних процесів.

У наш час математичне моделювання входить у третій принципово важливий етап свого розвитку, «вбудовуючись» у структури так званого *інформаційного суспільства*. Бурхливий прогрес засобів аналізу, опрацювання, передачі та зберігання інформації відповідає сучасним тенденціям соціального буття. Без володіння інформаційними «ресурсами» не варто й думати про розв'язання дедалі більш складних та різноманітних проблем, які постають перед світовою спільнотою. Однак інформація сама по собі здебільшого мало що дає для аналізу та прогнозування, для прийняття рішень і контролю за їх виконанням. Необхідні надійні способи опрацювання інформаційної «сировини» в готовий «продукт», тобто в точні знання. Історія методології математичного моделювання переконує: вона може й повинна бути *інтелектуальним ядром* інформаційних технологій, усього процесу інформатизації суспільства.

Технічні, технологічні, економічні, політичні та інші системи, що їх вивчає сучасна наука, все меншою мірою піддаються дослідженню (в необхідній комплексності та точності) звичайними теоретичними методами, хоча останні є надзвичайно важливими. Безпосередній натурний експеримент над ними є надто тривалим, дорогим, часто навіть небезпечним чи просто неможливим, особливо це стосується економічних систем і процесів. Тому *математичне моделювання є неминучою складовою науково-технічного прогресу*.

Уже сама постановка питання щодо математичного моделювання будь-якого об'єкта породжує чіткий план дій, який умовно можна поділити на три етапи: модель—алгоритм—програма (рис. 2.1)[1].

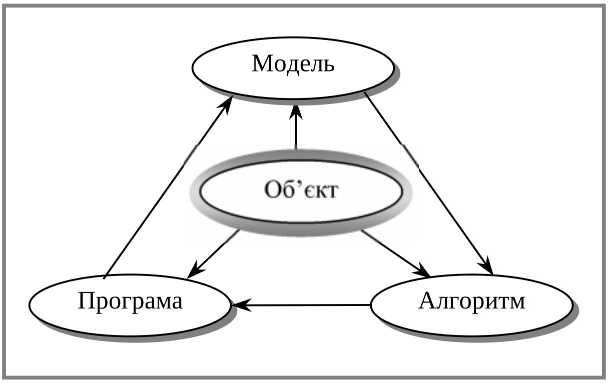


Рис. 2.1. Узагальнена схема математичного моделювання

На *першому етапі* обирається (чи будується) «еквівалент» об'єкта, що відображає в математичній формі найважливіші (ключові) його властивості — закони, яким він підпорядковується, зв'язки, що притаманні складовим його частинам, тощо. Математична модель (чи її фрагменти) досліджуються теоретичними методами, що дозволяє отримати важливі (концептуального характеру) нові знання про об'єкт.

Другий етап — вибір (чи розроблення) алгоритму для реалізації моделі на комп'ютері. Модель подається у формі, зручній для застосування числових методів, визначається послідовність обчислювальних і логічних операцій, котрі необхідно здійснити, щоб отримати шукані величини із заданою точністю. Обчислювальні алгоритми не повинні спотворювати основні властивості моделі, а отже, вихідного об'єкта (оригіналу), бути економними та адаптивними щодо особливостей розв'язання задач і використання комп'ютерів.

На *третьому етапі* створюються програми, що «переносять» модель і алгоритм на доступну комп'ютерну мову. До них також висуваються вимоги економності та адаптивності. Їх можна назвати «електронним» еквівалентом досліджуваного об'єкта, що є придатним для безпосереднього експериментування на комп'ютері.

---

[1] *Самарский А. А., Михайлова А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.

Створивши *тріаду*: «*модель—алгоритм—програма*», дослідник (системний аналітик) отримує універсальний, гнучкий і відносно дешевий інструмент, який тестується в «пробних» обчислювальних експериментах. Після того як *адекватність* (достатній рівень відповідності, зважаючи на цілі та взяту систему гіпотез) тріади щодо вихідного об'єкта засвідчена, з моделлю проводять різноманітні та детальні «досліди», які дають нову інформацію про необхідні якісні та кількісні властивості й характеристики об'єкта. Процес моделювання супроводжується поліпшенням та уточненням, за необхідності, всіх складових (ланок) тріади.

Як методологія математичне моделювання не підміняє собою математику, економічну теорію, фінанси та інші дисципліни, не конкурує з ними. Навпаки, важко переоцінити його синтезуючу роль. Створення та застосування тріади можливе лише за умови використання різноманітних методів і підходів — від якісного аналізу нелінійних моделей до сучасних мов програмування. Воно дає додаткові стимули різним напрямам науки.

У широкому аспекті моделювання наявне майже в усіх видах творчої активності людей різних спеціальностей — дослідників і підприємців, політиків і військових. Привнесення в ці сфери точного знання допомагає обмежити інтуїтивне «моделювання», розширює межі застосування раціональних методів. Звичайно ж, математичне моделювання плідне лише за умови виконання професійних вимог: чітке формулювання основних понять і гіпотез, апостеріорний аналіз, щоб пересвідчитися в адекватності використовуваних моделей, гарантована точність обчислювальних алгоритмів тощо.

Якщо ж аналізувати проблеми моделювання економічних систем, де необхідно брати до уваги «людський чинник», тобто коли йдеться про аналіз слабоформалізованих об'єктів, то до цих вимог необхідно додати ще низку, зокрема, акуратне розмежування математичних і побутових термінів, завбачливе застосування вже готового математичного апарату до вивчення явищ і процесів (пріоритетним є шлях «від задачі до методу», а не навпаки) та інші.

Розв'язуючи проблеми інформаційного суспільства, було б наївним покладати надію лише на потужність комп'ютерів та інші засоби інформатики. *Постійне вдосконалення тріади математичного моделювання та її впровадження у сучасні інформаційно-моделюючі системи — методологічний імператив.* Лише його виконання дає можливість отримати таку необхідну високотехнологічну, конкурентоспроможну та різноманітну матеріальну й інтелектуальну продукцію.

Зазначимо, що умовою розробки моделі є *принцип* так званої *інформаційної достатності*. Це означає, що системний аналітик повинен мати достатньо чітке уявлення про те, що вважати за вхідні та вихідні змінні досліджуваної системи, які чинники суттєво впливають на процес її функціонування. Якщо рівень інформаційної достатності низький, то створити модель, за допомогою котрої можна було б отримати нові знання про об'єкт-оригінал, майже неможливо.

2.1.2. Особливості, принципи математичного моделювання

Моделювання є процесом побудови, вивчення та застосування моделей. Воно поєднане з такими категоріями, як абстракція, аналогія, гіпотеза тощо. Процес моделювання обов'язково включає конструювання наукових гіпотез.

Головна особливість моделювання полягає у тому, що це метод опосередкованого пізнання за допомогою об'єктів-заміщувачів. Модель постає як своєрідний інструмент пізнання, що його дослідник (системний аналітик) ставить між собою та об'єктом і за допомогою якого вивчає об'єкт, який його цікавить. Саме ця особливість моделювання визначає специфічні форми використання абстракцій, аналогій, гіпотез, інших категорій і методів пізнання.

Необхідність використання моделювання визначається тим, що багато об'єктів (чи аспектів, які стосуються цих об'єктів) безпосередньо досліджувати чи взагалі неможливо, чи це вимагає багато часу і коштів.

Нехай є чи необхідно створити деякий об'єкт *A*. Ми конструюємо (матеріально чи в уяві) або знаходимо в реальному світі інший об'єкт *B* — модель об'єкта *A*. Можна виокремити такі чотири основні етапи побудови моделі.

Перший етап передбачає наявність деяких знань про об'єкт-оригінал. Пізнавальні можливості моделі зумовлюються тим, що модель відображає, з погляду системного аналітика, суттєві риси об'єкта-оригіналу. Питання про необхідність і достатність подібності оригіналу і моделі потребує аналізу. Очевидно, модель втрачає сенс як у випадку тотожності з оригіналом (тоді вона не перестає бути оригіналом), так і в разі надмірного в усіх суттєвих відношеннях спрощення. Вивчення одних властивостей модельованого об'єкта відбувається за рахунок відмови від відображення інших сторін. Через це будь-яка модель заміщує оригінал тільки у строго обмеженому сенсі. Із цього випливає, що для одного об'єкта може бути побудовано декілька «спеціалізованих» моделей, які концентрують увагу на певних сторонах досліджуваного об'єкта чи характеризують об'єкт із різним рівнем деталізації.

На *другому етапі* модель постає як самостійний об'єкт дослідження. Однією з форм такого дослідження є проведення «модельних» експериментів, за яких свідомо змінюють умови функціонування моделі і систематизують дані про її «поведінку». Остаточним результатом цього етапу є множина знань про модель *B*.

На *третьому етапі* здійснюється перенесення знань з моделі на оригінал — формування множини знань *S* про об'єкт. Цей процес перенесення знань проводиться за певними правилами. Знання про модель мають бути скоригованими з урахуванням тих властивостей об'єкта-оригіналу, котрі не знайшли відображення чи були деформованими під час побудови моделі. Ми можемо з достатньою підставою переносити який-небудь результат з моделі на оригінал, якщо цей результат обов'язково пов'язаний з ознаками подібності оригіналу й моделі. Якщо ж певний результат модельного дослідження пов'язаний з відмінністю моделі від оригіналу, то його переносити неправомірно.

Четвертий етап — практична перевірка одержаних за допомогою моделей знань та використання їх для побудови узагальнюючої теорії об'єкта чи управління ним.

Для розуміння сутності моделювання важливо мати на увазі, що моделювання — не єдине джерело отримання нових знань про об'єкт. *Процес моделювання «занурений» у більш загальний процес пізнання.* Це враховується не лише на етапі побудови моделі, а й на завершальній стадії, коли відбувається об'єднання й узагальнення результатів дослідження, які одержують на підставі різноманітних засобів пізнання.

Моделювання — циклічний процес: за першим чотирьохетапним циклом може настати другий, третій тощо. При цьому знання про досліджуваний об'єкт розширюються та уточнюються, а вихідна модель поступово вдосконалюється. Недоліки, які виявляються після першого циклу моделювання, що зумовлені, наприклад, недостатнім вивченням об'єкта й помилками в побудові моделі, можна виправити в наступних циклах. У методології моделювання, таким чином, закладені можливості саморозвитку.

Зазначимо, що загальновизнаними вважаються три підходи до побудови математичних моделей. Методично ці підходи пов'язані та скеровують на перехід від простого до складного.

Перший — спрощення реальної ситуації. Суттєве спрощення досягається тоді, коли несуттєві властивості початкової емпіричної стадії пізнання досліджуваного об'єкта та його оточення не враховуються. Отже, складна за своєю природою практична ситуація спрощується до ідеалізованого аналога, який піддається математичному описові.

Другий — побудова простої моделі на підставі певних, найхарактерніших особливостей реальної ситуації, з наступним послідовним ускладненням такої моделі шляхом охоплення інших чинників аж до отримання «прийнятного» варіанта моделі.

Третій — введення значної кількості чинників у їхніх взаємозв'язках і побудова та вивчення моделі засобами імітаційного моделювання. У кожному випадку модель «розвивається» та уточнюється у міру досягнення глибшого розуміння системним аналітиком сутності поставленої задачі та об'єкта дослідження.

Системні аналітики зобов'язані керуватися також *принципами* щодо концепції «математична модель» деякого об'єкта.

> *Принцип 1.* Діалектична пара модель—об'єкт завжди полярна, має два полюси — «модель» і «об'єкт».
>
> *Принцип 2.* З двох взаємопов'язаних полюсів діалектичної пари модель—об'єкт один є первинним, інший — похідний від нього.
>
> *Принцип 3.* Наявності полюса «об'єкт» недостатньо для наявності полюса «модель», наявність полюса «модель» зумовлює необхідність наявності полюса «об'єкт».
>
> *Принцип 4.* Як «модель» для даного «об'єкта», так і «об'єкт» для даної «моделі» семантично та інтерпретаційно багатозначні: «модель» віддзеркалює властивості не одного, а багатьох «об'єктів», «об'єкт» описується не однією, а багатьма «моделями».
>
> *Принцип 5.* «Модель» повинна бути адекватною «об'єктові» й відображати з певною точністю основні його риси та властивості залежно від цілей дослідження, наявної інформації, прийнятної системи гіпотез.

Варто зазначити, що на практиці реалізуються три основні *ступені формалізації* (формування математичної моделі): змістовний опис; формалізована схема; математична модель.

З огляду на цілі дослідження, мету побудови моделі первинна емпірична ситуація, щодо якої формулюється «задача» (дослідження), передусім підлягає ґрунтовному аналізу, початковим пунктом якого є змістовний опис об'єкта (явища, процесу). На вербальному рівні (мовними засобами) відтворюються дані про природу (сутність) об'єкта, кількісні характеристики явищ (процесів), які спостерігаються, характер взаємодії між складовими елементами, місце та важливість кожного явища в загальному процесі функціонування об'єкта дослідження. На рівні змістовного опису формалізація зводиться до виокремлення множини суттєвих (ключових) чинників, що характеризують об'єкт (згідно з метою дослідження й побудови моделі), його структуру, властивості, співвідношення між складовими частинами. Кожен з виокремлених чинників повинен бути описаний на якісному та кількісному рівнях (інтервал можливих значень, шкала вимірювання тощо). Формою змістовного опису може бути термінологічний вислів, текст, сукупність числових значень з відповідним коментарем.

Паралельно зі змістовним описом (чи дещо пізніше) може формуватися схема, яка у вигляді символів, графіків, графів, таблиць зображує перелік та взаємозв'язки щодо виявлення суттєвих чинників так, щоб надати їм цілісність, котра б у загальних рисах відтворювала (адекватно) властивості об'єкта дослідження. Закони та закономірності можуть бути замінені описовими виразами, назви — математичними символами, відношення — математичними діями (операторами).

Подальше перетворення змістовного опису та формалізованої схеми в єдину групу математичних символів та співвідношень завершується побудовою математичної моделі. Дія законів і закономірностей «матеріалізується» через правила формальної логіки та логічного виведення у формі рівнянь, нерівностей, співвідношень між математичними символами, з точністю до істинності математичних перетворень та відповідності щодо сформульованих гіпотез реальним законам. Така модель є математичною моделлю досліджуваного об'єкта й подібних до нього об'єктів-аналогів.

Існують різні *форми зображення* математичної моделі. Різновид їх обмежується чотирма найтиповішими групами — інваріантною, алгоритмічною, аналітичною, схемною.

Інваріантна форма — зображення математичної моделі безвідносно до методів, за допомогою яких може розв'язуватись поставлена задача моделювання.

Приклад інваріантної форми:

$$\frac{\partial y(Z, p)}{\partial Z} + a\frac{\partial y(Z, p)}{\partial p} + by(Z, p) = cf(Z, p),$$

де a, b, c — відомі характеристики об'єкта; $f(Z, p)$ — відома функція; $y(Z, p)$ — невідома функція.

Алгоритмічна форма — зображення математичної моделі у вигляді послідовності дій, які необхідно виконати, щоб при розв'язанні поставленої задачі моделювання перейти від відомих даних до шуканого результату.

Приклад алгоритмічної форми:

1. Визначити значення характеристик об'єкта *a*, *b*, *c*.
2. Обчислити *d*:

$$d = \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

3. Якщо $d \geq 0$, то обчислення значення результату (*x*, *y*):

$$x = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}, \quad y = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}.$$

Аналітична форма — зображення математичної моделі у вигляді формул та співвідношень між математичними виразами, за допомогою яких шукані в задачі моделювання результати визначаються через відомі дані.

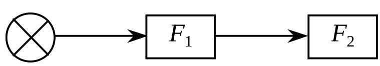
Приклад аналітичної форми:

$$y = 3{,}5\cos(\ln(x^2 + b^2) + \sqrt{x^2 + a^2},$$

де *a*, *b* — відомі характеристики об'єкта, *x* — змінна, *y* — результат.

Схемна форма — зображення математичної моделі у вигляді таблиць даних, діаграм, схем, графів, графіків.

Приклад схемної форми:



Тут F_1, F_2 — передаточні функції об'єкта.

Використання аналогів у побудові моделей. Аналоги в побудові моделей використовуються у величезній кількості випадків: або за спроби побудувати модель деякого об'єкта, або коли неможливо прямо вказати фундаментальні закони чи варіаційні принципи, котрим він підпорядковується, або коли з погляду наших сьогоденних знань взагалі немає впевненості в існуванні подібних законів, що допускають математичну формалізацію. Одним із плідних підходів до такого роду об’єктів є *використання аналогів* з уже вивченими явищами.

Здавалося б, що є спільного між радіоактивним розпадом і динамікою популяцій, зокрема, зміною чисельності населення нашої планети? Однак на простому рівні дослідження така аналогія проглядається, про що свідчить одна з найпростіших моделей популяцій — *модель Мальтуса.* У підґрунті моделі Мальтуса — просте твердження: швидкість зміни у чисельності населення з часом t пропорційна його поточній чисельності $N(t)$, помноженій на алгебраїчну суму коефіцієнтів народжуваності $\alpha(t) \geq 0$ та смертності $\beta(t) \geq 0$.

У результаті маємо рівняння

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t), \qquad (2.1)$$

яке дуже схоже на рівняння радіоактивного розпаду й збігається з ним за умови $\alpha < \beta$ (якщо α і β постійні). Це не дивно, бо для виведення їх використовувались однакові міркування. Інтегрування рівняння (2.1) дає:

$$N(t) = N(0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}[\alpha(t) - \beta(t)]dt\right),$$

де $N(0) = N(t = t_0)$ — початкова чисельність.

Якщо $\alpha = \beta$, то чисельність залишається постійною, тобто в цьому випадку розв’язком є рівноважна величина $N(t) = N(0)$. Рівновага між народжуваністю й смертністю нестійка в тому розумінні, що навіть невелике порушення рівності $\alpha = \beta$ приводить з плином часу до все більшого відхилення функції $N(t)$ від рівноважного значення $N(0)$. За умови $\alpha < \beta$ чисельність населення знижується й прямує до нуля, коли $t \to \infty$, а за $\alpha > \beta$ — зростає за певним експоненційним законом до нескінченності, якщо $t \to \infty$. Остання обставина й слугувала підставою для побоювань Мальтуса щодо майбутнього, пов’язаного з перенаселенням землі з усіма випливаючими звідси наслідками. Як у даному прикладі, так і в низці інших випадків можна вказати на чимало очевидних обмежень щодо застосування побудованої моделі. Звичайно ж, дуже складний процес зміни чисельності населення, що залежить до того ж від свідомого втручання самих людей, не може описуватись якимись простими закономірностями. Навіть в ідеальному випадку ізольованої біологічної популяції запропонована модель не відповідає реаліям повною мірою, хоча б зважаючи на обмежені ресурси, необхідні для її існування. Зроблене зауваження аж ніяк не применшує ролі аналогій у побудові математичних моделей дуже складних явищ.

Наголосимо, що використання аналогій ґрунтується на одній з дуже важливих властивостей моделей — їхній універсальності, тобто використанні їх щодо об'єктів принципово різної природи. Так, припущення (гіпотеза) типу «швидкість зміни величини пропорційна значенню самої величини (чи деякої функції від неї)» широко використовується в економіці.

Ієрархічний підхід до формування моделей. Лише в небагатьох випадках буває зручною і виправданою побудова математичних моделей навіть щодо простих об'єктів відразу в усій повноті, з урахуванням усіх суттєвих чинників. Тому природним є підхід, що реалізує принцип «від простого — до складного», коли наступний крок робиться після досить детального вивчення не дуже складної моделі. Отже, виникає ланцюжок (ієрархія) усе більш деталізованих моделей, кожна з яких узагальнює попередні, включаючи їх як частковий випадок.

Зазначимо, що на практиці використовують банк моделей і здійснюють адаптацію відомої моделі.

2.1.3. Нелінійність математичних моделей

У низці випадків у науковій та навчальній літературі для спрощення обмежуються здебільшого лінійними моделями, хоча в наш час бурхливо розвивається науковий підхід — «синергетична економіка», — який спирається на суттєву нелінійність економічних процесів, досліджує час і зміни в нелінійній економічній теорії[1].

У математичному аспекті важливим є поняття лінійності, котре означає, що справедливим є *принцип суперпозиції*, тобто, що будь-яка лінійна композиція розв'язків (наприклад сума їх) є також розв'язком задачі. Використовуючи принцип суперпозиції, неважко, відшукавши рішення в будь-якому частковому випадку, побудувати рішення для більш загальної ситуації. Тому про якісні властивості загального випадку можна судити виходячи з властивостей часткового — різниця між двома розв'язками має лише кількісний характер. Отже, у випадку лінійних моделей відгук (реакція) об'єкта на зміну умов є пропорційним величині цих змін.

---

[1] *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика: Время и перемены в нелинейной экономической теории / Пер. с англ. — М.: Мир, 1999.

Для нелінійних явищ, математичні моделі котрих не підпорядковуються принципу суперпозиції, знання стосовно до поведінки частини об'єкта ще не гарантують знань про поведінку об'єкта в цілому, а його відгук на зміну умов може якісно залежати від кількісної величини (обсягів) цих змін.

Наголосимо, що більшість реальних процесів і відповідних (адекватних) їм математичних моделей є нелінійними. Лінійні ж моделі відповідають досить частковим випадкам і, як правило, послуговують лише як перше наближення до реальності. Наприклад, моделі популяцій відразу ж стають нелінійними, якщо зважувати на те (взяти гіпотезу), що обмеженість доступних популяції ресурсів необхідно обов'язково враховувати. Будуючи такі моделі, вважають, що:

1) існує «рівноважна» чисельність популяції N_p, котру може забезпечити навколишнє середовище (з погляду сьогодення);

2) швидкість зміни чисельності популяції пропорційна цій чисельності, помноженій (на відміну від моделі Мальтуса) на величину відхилення її від рівноважного значення чисельності, тобто:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha\left(1 - \frac{N}{N_p}\right)N, \ \alpha > 0. \qquad (2.2)$$

Співмножник $\left(1 - \frac{N}{N_p}\right)$ у цьому рівнянні забезпечує механізм «насичення» чисельності — за $N < N_p$ $(N > N_p)$ швидкість зростання додатна (від'ємна) і прямує до нуля, якщо $N \to N_p$.

Подамо рівняння (2.2) у вигляді:

$$\frac{dN}{N_p - N} + \frac{dN}{N} = \alpha dt.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо:

$$-\ln(N_p - N) + \ln N = \alpha t + C.$$

Постійну інтегрування C можна отримати з умови $N(t = 0) =$ $= N(0)$, тобто $C = \ln((N_p - N(0))^{-1} N(0))$.

Отже, маємо:

$$N(t) = N_p \frac{N(0)}{N_p - N(0)} e^{\alpha t} - N(t) \frac{N(0)}{N_p - N(0)} e^{\alpha t}$$

або

$$N(t) = \frac{N_p N(0) e^{\alpha t}}{N_p - N(0)(1 - e^{\alpha t})}.$$

Поведінка функції $N(t)$ описується так званою логістичною кривою $N(t)$ (рис. 2.2).

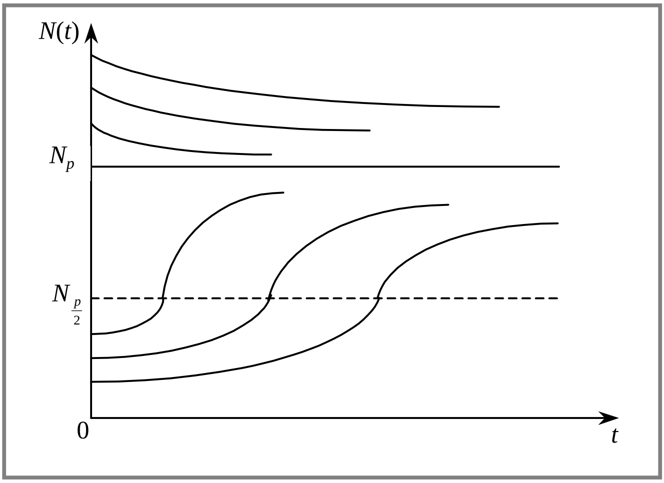


Рис. 2.2. Логістичні криві, що відповідають різним значенням початкової чисельності $N(0)$

За будь-якого $N(0)$ чисельність прямує до рівноважного значення N_p і, що характерно, тим повільніше, чим ближче $N(t)$ до $N(0)$. Отже, рівновага, на відміну від моделі (2.1), у даному випадку є стійкою. Зазначимо, що логістична модель більш реалістично відображає динаміку популяції порівняно з моделлю Мальтуса, але сама вона в разі необхідності стає нелінійною й тому більш складною. Наголосимо, що припущення щодо механізмів насичення використовуються у формуванні низки моделей різних економічних об'єктів і процесів як на мікро-, так і на макроекономічному рівнях.

2.2. ОСОБЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ

2.2.1. Основні дефініції та підходи

Мистецтво побудови економіко-математичної моделі полягає в тому, щоб узгоджувати якомога більшу лаконічність у її математичному описі з достатньою адекватністю та точністю модельного відтворення тих сторін аналізованої економічної реальності, які, власне, і цікавлять дослідника згідно з цілями та взятими гіпотезами.

Якщо йдеться про математичну модель, що описує механізм функціонування певної гіпотетичної економічної чи соціально-економічної системи, то таку модель називають економіко-математичною чи просто економічною.

Моделювання економіки як науковий напрям сформувався у 60-ті роки XX століття, хоча має давню й багату передісторію. У його основу, окрім економічних, покладено низку фундаментальних дисциплін (математику, теорію ймовірностей, теорію систем, інформатику, статистику, теорію автоматичного управління тощо).

Під економіко-математичною моделлю розуміють концентроване вираження найсуттєвіших економічних взаємозв'язків досліджуваних об'єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей і рівнянь.

Наголосимо, що математична модель — це об'єкт, котрий створюється системним аналітиком для отримання нових знань про об'єкт-оригінал і відбиває лише суттєві (з погляду системного аналітика) властивості об'єкта-оригіналу. Аналізуючи сутність зазначеного вище, можна зробити, зокрема, такі висновки:

а) будь-яка модель є суб'єктивною, вона несе в собі характерні риси індивідуальності системного аналітика;

б) будь-яка модель є гомоморфною, тобто в ній відбиваються (віддзеркалюються) не всі, а лише суттєві властивості об'єкта-оригіналу виходячи з цілей дослідження, узятої системи гіпотез тощо;

в) можливе існування множини моделей одного й того самого об'єкта-оригіналу, які відрізняються цілями дослідження, ступенем адекватності тощо.

Модель вважається адекватною об'єкту-оригіналу, якщо вона з достатнім ступенем наближення, на рівні розуміння системним аналітиком модельованого процесу відображає закономірності процесу функціонування реальної економічної системи у зовнішньому щодо об'єкта дослідження середовищі.

Проникання математики в економічну науку пов'язане з подоланням значних труднощів. У цьому частково була «винна» математика, яка розвивалась упродовж декількох століть здебільшого з огляду на потреби фізики і техніки. Але головні причини криються все ж у природі економічних процесів, у специфіці економічної науки. Більшість об'єктів, що їх вивчає економічна наука, можуть бути охарактеризовані поняттям «складна система». Найпоширенішим є розуміння системи як сукупності елементів, що перебувають у взаємодії та утворюють певну цілісність, єдність. Важливою якістю будь-якої системи є *емерджентність* — наявність таких властивостей, які не притаманні жодному з її елементів, які складають систему. Тому у вивченні економічної системи недостатньо користуватися методом поділу її на елементи з наступним вивченням цих елементів окремо. Одна з труднощів економічних досліджень полягає у тому, що майже не існує економічних об'єктів, які можна було б розглядати як окремі (несистемні) елементи.

Складність системи визначається кількістю її елементів, зв'язками між цими елементами, а також зв'язками між системою і середовищем. Економіка країни має всі ознаки дуже складної системи. Вона об'єднує величезну кількість елементів, відзначається різноманітністю внутрішніх зв'язків і зв'язків з іншими системами (природне середовище, економіка іншої країни тощо). У народному господарстві взаємодіють природні, технологічні, соціальні процеси, діють об'єктивні й суб'єктивні чинники, домінуючий вплив справляють культура, система етичних цінностей, ментальність тощо.

Складність економіки інколи розглядалась як обґрунтування неможливості її моделювання, вивчення засобами математики. Але така думка в принципі помилкова. Моделювати можна об'єкти будь-якої природи і складності. І якраз складні об'єкти становлять найбільший інтерес для моделювання; саме тут моделювання може принести результати, котрі не можна одержати іншими способами дослідження.

І хоча не можна вказати абсолютні межі формалізованості економічних проблем, завжди існуватимуть ще неформалізовані проблеми, а також ситуації, де на даному етапі розвитку науки математичне моделювання є недостатньо ефективним.

Під моделюванням розуміють процес побудови, вивчення й використання моделей. Він тісно поєднаний з такими категоріями, як абстракція, аналогія, гіпотеза тощо.

Процес моделювання включає три системотвірних елементи:

- суб'єкт дослідження (системний аналітик);
- об'єкт дослідження;
- модель, яка опосередковує відносини між об'єктом, який вивчається, та суб'єктом, який пізнає (системним аналітиком).

2.2.2. Особливості економічних спостережень і вимірів

Головним гальмом для практичного застосування математичного моделювання в економіці є проблема наповнення розроблених моделей конкретною та якісною інформацією. Точність і повнота первинної інформації, реальні можливості її збору й опрацювання справляють визначальний вплив на вибір типів прикладних моделей. З другого боку, завдання моделювання економіки висувають нові вимоги до системи інформації.

Залежно від модельованих об'єктів і призначення моделей використовувана в них вихідна інформація має суттєво відмінний характер і походження. Вона може бути розподіленою на дві категорії: щодо минулого розвитку та сучасного стану об'єктів (економічне спостереження й опрацювання) і про майбутній розвиток об'єктів, які включають дані про очікувані зміни, їхні внутрішні параметри та зовнішні умови (прогнози). Друга категорія інформації є результатом самостійних досліджень, які також можуть проводитися за допомогою моделювання.

Методи економічних спостережень і використання результатів цих спостережень розробляються економічною статистикою. З огляду на це варто визначити лише специфічні проблеми економічних спостережень, які стосуються моделювання економічних процесів. В економіці чимало процесів, які є масовими: вони характеризуються закономірностями, які не проявляються на підставі лише одного чи кількох спостережень. Тому моделювання в економіці має спиратися на масові спостереження.

Друга проблема породжується динамічністю економічних процесів, мінливістю їхніх параметрів і структурних відношень. Унаслідок цього економічні процеси доводиться постійно вивчати, здійснювати їх моніторинг, бо необхідно мати постійно приплив нових даних. Оскільки спостереження за економічними процесами й опрацювання емпіричних даних звичайно забирають досить багато часу, то, будуючи математичні моделі економіки, необхідно коригувати вихідну інформацію з урахуванням того, що вона надходить із запізненням на деякий інтервал часу.

Дослідження кількісних відношень економічних процесів і явищ спирається на економічні виміри. Точність проведення вимірювань значною мірою впливає на точність кінцевих результатів кількісного аналізу. Тому необхідною умовою використання математичного моделювання є вдосконалення вимірювачів. Застосування математичного моделювання загострило проблему вимірювання і кількісного зіставлення різних аспектів і явищ соціально-економічного розвитку та повноти одержуваних даних, захист їх від навмисних і технічних викривлень (деформації).

У процесі моделювання виникає взаємодія «первинних» і «вторинних» економічних вимірювань. Будь-яка модель народного господарства спирається на певну систему економічних вимірювачів (продукції, ресурсів тощо). Одночасно одним із важливих результатів народногосподарського моделювання є одержання нових (вторинних) економічних вимірювачів — економічно обґрунтованих цін на продукцію різних галузей, оцінки ефективності різноякісних природних ресурсів, вимірювачів суспільної корисності продукції. Однак ці вимірювачі чутливі до недостатньо обґрунтованих (деформованих) первинних вимірювачів, що спонукає розробляти особливу методику коригування первинних вимірювачів для господарських моделей.

З погляду «інтересів» моделювання економіки сьогодні найбільш актуальними проблемами вдосконалення економічних вимірювачів є: оцінка результатів інтелектуальної діяльності (особливо в царині науково-технічних розробок, індустрії інформатики); побудова узагальнюючих показників соціально-економічного розвитку; вимірювання ефектів зворотних зв'язків (вплив господарських і соціальних механізмів на ефективність виробництва).

2.2.3. Випадковість і невизначеність економічного розвитку

Для методології планування важливе значення має поняття невизначеності економічного розвитку. В дослідженнях з економічного прогнозування і планування розрізняють два типи невизначеності: «істинну», зумовлену властивостями економічних процесів, і інформаційну, пов'язану з неповнотою і неточністю наявної інформації про ці процеси. Істинну невизначеність не можна плутати з об'єктивним існуванням різних варіантів економічного розвитку і можливості свідомого вибору з-поміж них ефективних варіантів. Ідеться про принципову неможливість точного вибору єдиного оптимального варіанта.

У розвитку економіки невизначеність викликається двома головними причинами. *По-перше*, перебіг планованих і керованих процесів, а також зовнішній вплив на ці процеси не можуть бути точно передбаченими через вплив випадкових чинників і обмеженість людського пізнання в кожний момент. Особливо характерно це для прогнозування науково-технічного прогресу, потреб суспільства, економічної поведінки. *По-друге*, загальнодержавне планування й управління не лише не всеохплюючі, але і не всесильні, а наявність множини самостійних економічних суб'єктів з особливими інтересами не дозволяє точно передбачити результати їх взаємодії. Неповнота і неточність інформації про об'єктивні процеси й економічну поведінку підсилює істинну невизначеність.

На перших етапах дослідження з моделювання економіки застосовувались в основному моделі детермінованого типу. У цих моделях усі параметри вважалися точно відомими. Однак детерміновані моделі не можна сприймати механічно й ототожнювати з моделями, які позбавлені всіх ступенів вибору (можливості вибору) і мають єдиний допустимий розв’язок. Класичним прикладом жорстко детермінованих моделей є оптимізаційна модель народного господарства, застосовувана для визначення найкращого варіанта економічного розвитку серед множини допустимих варіантів.

Унаслідок накопичення досвіду використання жорстко детермінованих моделей були створені реальні можливості успішного застосування більш досконалої методології моделювання економічних процесів, які враховують стохастику і невизначеність. Тут можна виокремити два основних напрями дослідження. *По-перше*, вдосконалюється методика використання моделей жорстко детермінованого типу: проведення багатоваріантних розрахунків і модельних експериментів з варіацією конструкції моделі та її вихідних варіантів; визначення стійкості та надійності одержуваних рішень, виокремлення зони невизначеності; включення в модель змінних щодо резервів, застосування прийомів, які підвищують пристосовуваність економічних рішень до ймовірних і непередбачуваних ситуацій. *По-друге*, формують моделі, які безпосередньо відображають стохастику і невизначеність економічних процесів і використовують відповідний математичний апарат: теорію ймовірностей і математичну статистику, теорію гри і статистичних рішень, теорію масового обслуговування, стохастичне програмування, теорію випадкових процесів, теорію нечітких множин тощо.

2.2.4. Елементи класифікації економіко-математичних моделей

Математичні моделі економічних процесів і явищ коротко можна назвати економіко-математичними моделями. Для класифікації цих моделей використовують різні класифікаційні ознаки.

За цільовим призначенням економіко-математичні моделі поділяються на теоретико-аналітичні, що використовуються під час дослідження загальних властивостей і закономірностей економічних процесів, і прикладні, що застосовуються у розв’язанні конкретних економічних задач (моделі економічного аналізу, прогнозування, управління).

Економіко-математичні моделі можуть призначатися для дослідження різних сторін функціонування народного господарства (зокрема, його виробничо-технологічної, соціальної, територіальної структури) і його окремих частин. У класифікації можна виокремити моделі народного господарства загалом і його підсистем — галузей, регіонів тощо; комплекси моделей виробництва, споживання, формування і розподілу доходів, трудових ресурсів, ціноутворення, фінансових зв'язків тощо.

Спинімося більш докладно на характеристиці таких класів економіко-математичних моделей, що мають особливості методології і техніки моделювання.

Відповідно до загальної класифікації математичних моделей вони поділяються на *функціональні* та *структурні*, а також проміжні форми (структурно-функціональні). У дослідженнях на народногосподарському рівні частіше застосовуються структурні моделі, оскільки для планування та управління велике значення мають внутрішні залежності між елементами систем. Типовими структурними моделями є моделі міжгалузевих зв'язків. Функціональні моделі широко застосовуються в економічному регулюванні, коли на поведінку об'єкта («вихід») впливають шляхом зміни «входу». Прикладом може слугувати модель поведінки споживачів в умовах товарно-грошових відносин. Один і той самий об'єкт може описуватись одночасно і структурною, і функціональною моделями. Наприклад, для планування окремої галузевої системи використовується структурна модель, а на народногосподарському рівні кожна галузь може бути подана функціональною моделлю.

Моделі поділяють на *дескриптивні* та *нормативні*. Дескриптивні моделі відповідають на запитання: як це відбувається чи як це найімовірніше може розвиватися далі? Іншими словами, вони лише пояснюють факти, які спостерігалися, чи дають прогноз. Нормативні моделі відповідають на запитання: як це має бути? Тобто передбачають цілеспрямовану діяльність. Типовим прикладом нормативних моделей є моделі оптимального (раціонального) планування, що формалізують у той чи інший спосіб мету економічного розвитку, можливість і засоби її досягнення.

Застосування дескриптивного підходу в моделюванні економіки пояснюється необхідністю емпіричного виявлення суттєвих залежностей в економіці, встановлення статистичних закономірностей економічної поведінки соціальних груп, вивчення ймовірних шляхів розвитку якихось процесів за незмінних умов чи таких, що відбуваються без зовнішніх впливів. Прикладом дескриптивних моделей є виробничі функції та функції купівельного попиту, побудовані на підставі опрацювання статистичних даних.

Чи є економіко-математична модель дескриптивною або нормативною — це залежить не лише від її математичної структури, а й від характеру використання моделі. Наприклад, модель міжгалузевого балансу є дескриптивною, якщо вона використовується для аналізу пропорцій минулого періоду. Але ця сама математична модель стає нормативною, якщо застосовується для розрахунків збалансованих варіантів розвитку народного господарства, які задовольняють кінцеві потреби суспільства за умови планових нормативів виробничих витрат.

Багато економіко-математичних моделей поєднують ознаки дескриптивних і нормативних моделей. Типовою є ситуація, коли нормативна модель складної структури об’єднує окремі блоки, котрі є частковими дескриптивними моделями. Наприклад, міжгалузева модель може включати функції купівельного попиту, які описують поведінку споживачів за зміни доходів. Подібні приклади характеризують тенденцію ефективного поєднання дескриптивного і нормативного підходів. Дескриптивний підхід широко застосовується в імітаційному моделюванні.

За характером відображення причинно-наслідкових аспектів розрізняють *моделі жорстко детерміновані* і *моделі, що враховують випадковість і невизначеність*. Треба розрізняти невизначеність, яка описується ймовірнісними законами, і невизначеність, для опису котрої закони теорії ймовірностей застосовувати не можна. Другий тип невизначеності набагато складніший для моделювання: мається на увазі теорія нечітких множин та нечітка логіка.

За способами відображення чинника часу економіко-математичні моделі поділяються на *статичні й динамічні*. У статичних моделях усі залежності відносять до одного моменту чи періоду часу. Динамічні моделі характеризують зміни економічних процесів у часі. За тривалістю розглянутого періоду розрізняють моделі короткотермінового (до року), середньотермінового (до 5 років), довготермінового (10—15 і більше років) прогнозування і планування. Час в економіко-математичних моделях може змінюватися неперервно або дискретно.

Моделі економічних процесів надзвичайно різноманітні за формою математичних залежностей. Важливо виокремити клас *лінійних моделей*, що набули великого поширення завдяки зручності їх використання. Відмінності між лінійними і нелінійними моделями є суттєвими не лише з математичної точки зору, а й у теоретико-економічному відношенні, бо багато залежностей в економіці мають принципово нелінійний характер: ефективність використання ресурсів за зростання виробництва, зміни попиту і споживання населення, збільшення виробництва, зміни попиту населення зі зростанням доходів тощо. Теорія «лінійної економіки» істотно відрізняється від теорії «нелінійної економіки». Від того, чи вважаються множини виробничих потужностей підсистем (галузей, підприємств) опуклими чи неопуклими, суттєво залежать висновки про можливість поєднання централізованого планування й господарської самостійності економічних підсистем.

За співвідношенням екзогенних і ендогенних змінних, які включаються в модель, вони поділяються на *відкриті і закриті*. Повністю відкритих моделей не існує; модель повинна містити хоча б одну ендогенну (таку, що визначається за допомогою моделі) змінну. Повністю закриті економіко-математичні моделі, тобто такі, що не містять екзогенних змінних, надзвичайно рідкісні; побудова їх потребує повного абстрагування від «середовища», тобто серйозного огрублення економічних систем, які завжди мають зовнішні зв'язки. Переважна більшість економіко-математичних моделей посідає проміжну позицію і розрізняється за ступенем відкритості (закритості).

Для моделей народногосподарського рівня важливим є поділ на *агреговані* та *деталізовані*. Залежно від того, містять народногосподарські моделі просторові чинники й умови чи не містять, розрізняють моделі *просторові і точкові*.

Зазначимо, що під математичним моделюванням мається на увазі також процес установлення відповідності для деякої даної реальної системи S з деякою, що відповідає наведеним вище вимогам, математичною моделлю M і дослідження цієї моделі (M), що дозволяє отримати як характеристики, так і оцінки поведінки реальної системи в певних інтервалах значень її показників і параметрів.

Класифікація видів математичних моделей може проводитися й за такими ознаками: аналітичне та комп'ютерне моделювання (рис. 2.3)[1].

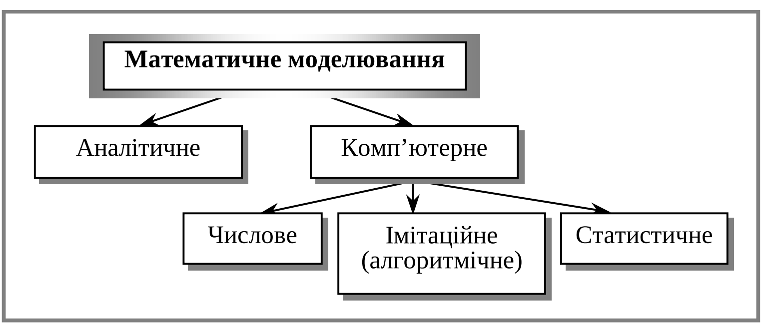


Рис. 2.3. Аналітичне та комп'ютерне моделювання

[1] *Варфоломеев В. И.* Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем: Практикум: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 2000.

Для *аналітичного моделювання* характерним є те, що процеси функціонування елементів системи записують у вигляді деяких математичних співвідношень (алгебраїчних, інтегро-диференційних, кінцево-різницевих тощо) чи логічних умов.

Аналітична модель може досліджуватися такими методами:

а) аналітичним, коли прагнуть у загальному вигляді отримати деякі залежності для шуканих характеристик;

б) числовим;

в) якісним, коли, не маючи явного розв'язку, все ж знаходять деякі властивості рішень.

Комп'ютерне моделювання характеризується тим, що математична модель системи (використовуючи основні співвідношення аналітичного моделювання, — на цьому необхідно зробити наголос) подається у вигляді деякого алгоритму та програми, придатної для її реалізації на комп'ютері, що дозволяє проводити з нею обчислювальні експерименти. Залежно від математичного інструментарію (апарату), що використовується в побудові моделі, та способу організації обчислювальних експериментів можна виокремити три взаємопов'язані види моделювання: числове, алгоритмічне (імітаційне) та статистичне.

За *числового моделювання* для побудови комп'ютерної моделі використовуються методи обчислювальної математики, а обчислювальний експеримент полягає в числовому розв'язанні деяких математичних рівнянь за заданих значень параметрів і початкових умов.

Алгоритмічне (імітаційне) моделювання (може бути як детермінованим, так і стохастичним) — це вид комп'ютерного моделювання, для якого характерним є відтворення на комп'ютері (імітація) процесу функціонування досліджуваної складної системи. Тут імітуються (з використанням аналітичних залежностей і моделей) елементарні явища, що становлять процес, зі збереженням їхньої логічної та семантичної структури, послідовності плину в часі, що дозволяє отримати нову інформацію про стан системи *S* у задані моменти часу.

Статистичне моделювання — це вид комп'ютерного моделювання, який дозволяє отримати статистичні дані відносно процесів у модельованій системі *S*.

Зазначимо, що все частіше (і це логічно) в економіці використовується комбіноване моделювання, системотвірним елементом якого є *аналітичні моделі*.

У побудові та використанні комбінованих моделей попередньо проводять декомпозицію процесу функціонування моделі на складові елементи.

З розвитком економіко-математичних досліджень ускладнюється й проблема класифікації моделей, що використовуються. Разом із виникненням нових типів моделей (особливо змішаних типів) і нових ознак їх класифікації здійснюється процес інтеграції моделей різних типів у більш складні модельні конструкції.

2.2.5. Етапи економіко-математичного моделювання

Основні етапи процесу моделювання розглядалися вище. Зауважимо, що в різних галузях знань, зокрема в економіці, вони набувають специфічних рис. Проаналізуймо послідовність і зміст етапів одного циклу економіко-математичного моделювання.

1. Постановка економічної проблеми та її якісний аналіз. Головне тут — чітко сформулювати сутність проблеми (цілі дослідження), припущення, які приймаються, і ті питання, на які необхідно одержати відповіді. Цей етап включає виокремлення найважливіших рис і властивостей об’єкта, що моделюється, і абстрагування від другорядних; вивчення структури об’єкта і головних залежностей, що поєднують його елементи; формулювання гіпотез (хоча б попередніх), що пояснюють поведінку і розвиток об’єкта.

2. Побудова математичних моделей. Це — етап формалізації економічної проблеми, вираження її у вигляді конкретних математичних залежностей і відношень (функцій, рівнянь, нерівностей тощо). Спочатку зазвичай визначається основна конструкція (тип) математичної моделі, а потім уточнюються деталі цієї конструкції (конкретний перелік змінних і параметрів, форма зв’язків). Таким чином, побудова моделі має кілька стадій. Неправильно думати, що чим більше чинників ураховує модель, тим краще вона «працює» і ліпші дає результати. Те саме можна сказати й про такі характеристики складності моделі, як використовувані форми математичних залежностей (лінійні та нелінійні), урахування чинників випадковості й невизначеності тощо. Надмірна складність і деталізованість моделі утруднює процес дослідження. Треба не лише враховувати реальні можливості інформаційного і математичного забезпечення, а й порівнювати витрати на моделювання з одержуваним ефектом (зі зростанням складності моделі приріст витрат може перевищити приріст ефекту). Однією з важливих особливостей математичних моделей є потенційна можливість їх використання для вирішення різноманітних проблем. Тому, навіть зустрічаючись з новою економічною задачею, не треба намагатися «винаходити» модель; спочатку необхідно спробувати застосувати для розв’язання цієї задачі вже відомі моделі (адаптувати їх до задачі).

У процесі побудови моделі здійснюється зіставлення двох систем наукових знань — економічних і математичних. Звичайно, треба прагнути того, щоб одержати модель, яка належить до добре вивченого класу математичних задач. Часто це вдається зробити шляхом деякого спрощення вихідних положень моделі, які не спотворюють суттєві риси модельованого об’єкта. Однак можлива й така ситуація, коли формалізація економічної проблеми приводить до невідомої раніше математичної структури. Проблеми економічної науки і практики в середині XX ст. сприяли розвиткові математичного програмування, теорії гри, функціонального аналізу, обчислювальної математики. Цілком імовірно, що в майбутньому розвиток економічної науки стане важливим стимулом для створення нових розділів математики.

3. Математичний аналіз моделі. Метою цього етапу є з’ясування загальних властивостей моделі. Тут часто застосовують математичні прийоми дослідження. Найважливіший момент — доведення існування рішень у сформованій моделі (теорема існування). Якщо пощастить довести, що математична задача не має рішення, то необхідність у наступній роботі за первісним варіантом моделі відпадає; слід скоригувати чи постановку економічної задачі, чи модифікувати її математичну формалізацію. В аналітичному дослідженні моделі можуть постати такі питання, як, наприклад: чи взагалі є та чи єдине рішення; які змінні (невідомі) можуть входити у рішення; які будуть співвідношення між ними; в яких межах і залежно від яких вихідних умов вони змінюються; якими є тенденції цих змін тощо. Аналітичне дослідження моделі порівняно з емпіричним (числовим) має ту перевагу, що одержувані висновки зберігають свою силу за різноманітних конкретних значень зовнішніх і внутрішніх параметрів моделі. Знання загальних властивостей моделі має настільки велике значення, що часто задля доведення подібних властивостей дослідники свідомо йдуть на ідеалізацію первинної моделі. І все-таки моделі складних економічних об’єктів з великими труднощами піддаються аналітичному дослідженню. У тих випадках, коли аналітичними методами не вдається з’ясувати загальні властивості моделі, а спрощення моделі спричиняється до недопустимих (неадекватних) результатів, переходять до числових методів дослідження.

4. Підготовка вихідної інформації. Моделювання висуває жорсткі вимоги до системи інформації. Водночас реальні можливості одержання інформації обмежують вибір моделей, які пропонуються до практичного використання. Разом з тим береться до уваги не лише принципова можливість підготовки інформації (за певний період), але й витрати на підготовку відповідних інформаційних масивів. Ці витрати не повинні перевищувати ефект від використання додаткової інформації.

У процесі підготовки інформації широко використовуються методи теорії ймовірностей, теоретичної і математичної статистики. У статистичному економіко-математичному моделюванні результуюча інформація, використовувана в одних моделях, є вихідною для функціонування інших моделей.

5. Числові розв'язки. Цей етап включає розробку алгоритмів для числового розв'язування задачі, складання програм на ЕОМ і безпосереднє проведення розрахунків. Труднощі цього етапу зумовлені передусім великою розмірністю економічних задач, необхідністю опрацювання значних масивів інформації. Звичайно розрахунки на підставі використання економіко-математичної моделі мають багатоваріантний характер. Завдяки високій швидкодії сучасних ЕОМ вдається проводити числові «модельні» експерименти, вивчаючи «поведінку» моделі при різних значеннях деяких умов. Дослідження, які проводяться за допомогою числових методів, можуть стати суттєвим доповненням до результатів аналітичного дослідження. Зазначимо, що клас економічних задач, які можна розв'язувати числовими методами, значно ширший, ніж клас задач, доступних аналітичному дослідженню.

6. Аналіз числових результатів та їх використання. На цьому, завершальному, етапі циклу виникає питання про правильність і повноту результатів моделювання, про рівень практичного застосування останніх.

Математичні методи перевірки можуть виявляти некоректність підходу до побудови моделі і тим самим звужувати клас потенційно правильних моделей. Неформальний аналіз теоретичних висновків і числових результатів, які одержують за допомогою моделі, зіставлення їх із знаннями, якими володіємо, і фактами дійсності також дозволять знаходити недоліки постановки економічної задачі, сконструйованої математичної моделі, її інформаційного і математичного забезпечення.

Взаємозв'язки етапів. Звернімо увагу на зворотні зв'язки етапів, які виникають унаслідок того, що в процесі дослідження виявляються недоліки попередніх етапів моделювання.

Уже на етапі побудови моделі може з'ясуватися, що постановка задачі суперечлива і призводить до надто складної математичної моделі. Відповідно до цього постановка економіко-математичної задачі коригується. Подальший математичний аналіз моделі (етап 3) може показати, що невелика модифікація постановки задачі чи її формалізації дає корисний аналітичний результат.

Найчастіше необхідність повернення до попередніх етапів моделювання виникає під час підготовки вихідної інформації (етап 4). Може виявитися, що необхідна інформація відсутня чи затрати на її підготовку занадто великі. Тоді доводиться повертатися до постановки задачі та її формалізації, змінюючи їх так, щоб пристосуватися до наявної інформації.

Оскільки економіко-математичні задачі можуть бути складними за своєю структурою, мати велику розмірність, то часто трапляється, що відомі алгоритми і програми для комп'ютерів не дозволяють розв'язати задачу у первісному вигляді. Якщо неможливо за короткий термін розробити нові алгоритми і програми, то вихідну постановку задачі та відповідну модель спрощують: знімають і об'єднують умови, кількість чинників, нелінійні співвідношення замінюють лінійними тощо.

Недоліки, які не вдається виправити на проміжних етапах моделювання, усуваються в наступних циклах. Але результати кожного циклу мають і цілком самостійне значення. Почавши дослідження від побудови простої моделі, можна швидко одержати корисні результати, а потім перейти до створення більш досконалої моделі, яка доповнюється новими умовами, котрі включають уточнені математичні залежності.

З розвитком і ускладненням економіко-математичного моделювання деякі його етапи виокремлюються у спеціалізовані сфери дослідження, підсилюються відмінності між теоретико-аналітичними і прикладними моделями, відбувається диференціація моделей за рівнями абстракції та ідеалізації.

Теорія математичного аналізу математичних моделей економіки розвинулась в особливу гілку сучасної науки — математичну економіку. Моделі, які вивчаються в межах математичної економіки, часто втрачають безпосередній зв'язок з економічною реальністю; вони мають справу з виключно ідеалізованими економічними об'єктами та ситуаціями. У побудові таких моделей головним принципом є не стільки наближення до реальності, скільки одержання якомога більшої кількості аналітичних ресурсів за допомогою аналітичних доведень. Цінність цих моделей для економічної теорії і практики полягає у тому, що вони слугують теоретичною базою для моделей прикладного типу.

Досить самостійними царинами дослідження стають підготовка й опрацювання економічної інформації та розробка математичного забезпечення економічних задач (створення баз даних і банків інформації, програм автоматизованої побудови моделей і програмного сервісу для економістів-користувачів). На етапі практичного використання моделей провідну роль мають відігравати фахівці у відповідній галузі економічного аналізу, планування, управління. Головною ділянкою роботи системних аналітиків залишається постановка та формалізація економічних задач і синтез процесу економіко-математичного моделювання.

2.2.6. Перевірка адекватності моделі

Складність економічних процесів і явищ та інші зазначені вище особливості економічних систем утруднюють не лише побудову математичних моделей, а й перевірку їх адекватності, істинності одержаних результатів.

У природничих науках достатньою умовою істинності результатів моделювання й будь-яких інших форм пізнання є тотожність результатів дослідження з чинниками, що спостерігаються. Категорія «практика» збігається тут із категорією «дійсність». В економіці та інших суспільних науках таким способом визнаний принцип «практика — критерій істини», котрий більше застосовується щодо простих дескриптивних моделей, які використовуються для пасивного опису і пояснення дійсності (аналізу попереднього розвитку, короткострокового прогнозування некерованих економічних процесів тощо).

Однак головне завдання економічної науки конструктивне: розроблення наукових методів аналізу й управління економікою. Тому поширений тип математичних моделей економіки — це моделі керованих і регульованих економічних процесів, які використовуються для перетворення економічної дійсності. Такі моделі називають нормативними. Якщо орієнтувати нормативні моделі тільки на підтвердження дійсності, то вони не зможуть слугувати інструментом вирішення якісно нових соціально-економічних завдань.

Специфіка верифікації нормативних моделей економіки полягає у тому, що вони, як правило, «конкурують» з іншими, такими, що вже знайшли практичне застосування, методами аналізу планування й управління. Разом з тим далеко не завжди можна поставити чіткий експеримент з верифікації моделі, усунувши впливи інших керуючих чинників на керований об’єкт. Ситуація ще більше ускладнюється, коли виникає питання про верифікацію моделей довгострокового прогнозування і планування (як дескриптивних, так і нормативних). Адже не можна 10—15 років і більше пасивно чекати настання подій, щоб перевірити правильність концептуальних положень моделі. Незважаючи на зазначені ускладнюючі обставини, відповідність моделі об'єкта (процесу) фактам і тенденціям реального економічного буття залишається важливим критерієм, який визначає напрям удосконалення моделей. Всебічний аналіз розходжень, які виникають між моделлю та дійсністю, зіставлення результатів, одержаних на базі конкретної економіко-математичної моделі, з результатами застосування інших методів пізнання дійсності допомагає визначити шляхи корекції моделей.

Значна роль у перевірці адекватності моделей належить логічному аналізу, в тому числі й засобами самого математичного моделювання. Такі формалізовані прийоми верифікації моделей, як доведення існування рішення, перевірка істинності статистичних гіпотез про зв'язки між параметрами і змінними моделі, зіставлення розмірності величин тощо, дозволяє звузити клас потенційно «правильних» моделей. Внутрішня несуперечність положень перевіряється також шляхом порівняння одержуваних за допомогою даної моделі результатів з результатами «конкуруючих» моделей.

Оцінюючи сучасний стан проблеми адекватності математичних моделей в економіці, необхідно визнати, що створення конструктивної комплексної методики верифікації моделей, котра враховує як об'єктивні особливості модельованих об'єктів, так і особливості їх пізнання, залишається одним із найактуальніших завдань економіко-математичних досліджень.

2.2.7. Роль прикладних економіко-математичних досліджень

Можна виокремити щонайменше чотири функції щодо застосування математичних методів і моделей у вирішенні практичних проблем.

1. *Удосконалення системи економічної інформації.* Математичні методи та моделі дозволяють упорядковувати систему економічної інформації, виявляти недоліки в наявній інформації і виробляти вимоги до підготовки нової інформації чи її коригування. Розробка і застосування економіко-математичних моделей вказує шляхи вдосконалення економічної інформації, орієнтованої на вирішення певної системи завдань планування та управління. Прогрес у інформаційному забезпеченні планування та управління спирається на технічні й програмні засоби інформатики, яка бурхливо розвивається.

2. *Інтенсифікація і підвищення точності економічних розрахунків.* Формалізація економічних задач і застосування комп'ютерів багаторазово прискорюють типові, масові розрахунки, підвищують точність і скорочують трудомісткість, дозволяють проводити багатоваріантні економічні дослідження та обґрунтування складних заходів, недосяжні за панування «ручної» технології.

3. *Поглиблення кількісного аналізу економічних проблем.* Завдяки застосуванню економіко-математичного моделювання значно підсилюються можливості конкретного кількісного аналізу, вивчення багатьох чинників, які впливають на економічні процеси, кількісна оцінка наслідків змін умов розвитку економічних об'єктів тощо.

4. *Розв'язання принципово нових економічних задач.* За допомогою математичного моделювання вдається розв'язувати такі економічні задачі, які іншими засобами розв'язати практично неможливо, наприклад, знаходження оптимального варіанта народногосподарського плану, імітація народногосподарських заходів, автоматизація контролю за функціонуванням складних економічних об'єктів.

Сфера практичного застосування економіко-математичного моделювання обмежується можливостями та ефективністю формалізації економічних проблем і ситуацій, а також станом інформаційного, математичного, технічного забезпечення використовуваних моделей. Намагання за будь-яку ціну застосувати математичну модель може не дати очікуваних результатів через відсутність необхідних умов.

Відповідно до сучасних економічних уявлень щодо системи розробки і прийняття господарських рішень вона має поєднувати формальні та неформальні методи, які підсилюють один одного. Формальні методи є передусім засобом науково обґрунтованої підготовки матеріалу для наступних раціональних дій людини в процесах управління. Це дозволяє продуктивно використати досвід, інтуїцію людини, її здатність розв'язувати задачі, які важко формалізуються.

2.3. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Сутність та особливості системного підходу до аналізу економічних систем і процесів.
2. Сформулюйте поняття «модель» та «метод моделювання».
3. Охарактеризуйте основні етапи економіко-математичного моделювання.

4. Назвіть основні класифікаційні ознаки економіко-математичних моделей.
5. Розкрийте сутність економічних спостережень і вимірів та особливості використання їх у моделюванні.
6. Поясніть причини, що породжують необхідність використання нелінійних динамічних математичних моделей як найбільш адекватних.
7. Назвіть причини існування невизначеності та асиметрії інформації в економічних системах.
8. Основні принципи, що використовуються в моделюванні економіки. Їхня сутність.

2.4. Теми рефератів

1. Математичне моделювання економіки та його роль у розвитку економічної теорії.
2. Економетричні моделі та проблеми економетричного моделювання.
3. Роль і місце імітаційних моделей у дослідженні економічних об’єктів і процесів.
4. Моделі нестаціонарних часових рядів та коінтеграція.
5. Деякі загальні підходи до аналізу та порівняння економіко-математичних моделей.
6. Адаптивні методи прогнозування соціально-економічних процесів.
7. Аналіз пакетів прикладних програм, які використовуються в моделюванні економічних об’єктів і процесів.
8. Інтелектуальні системи і теорія прийняття рішень в економіці.
9. Математичні моделі в системах моніторингу економічних процесів.
10. Використання математичних моделей моніторингу в розв’язанні прикладних економічних задач.
11. Комплекс економіко-математичних моделей маркетингових досліджень.
12. Основні принципи аналізу та синтезу моделей економічних систем.
13. Комплекс економіко-математичних моделей функціонування комерційного банку.
14. Математичне моделювання в актуарних розрахунках.
15. Математичне моделювання в зовнішньоекономічній діяльності.
16. Синтез систем адекватного стратегічного планування виробничо-економічних систем.
17. Імітаційні моделі прийняття багатокритеріальних рішень в економіці та підприємництві.
18. Аналітичне планування на підставі методу аналізу ієрархій.
19. Методи прийняття рішень на підставі теорії нечітких множин.

20. Математичні моделі комбінаторного морфологічного аналізу та синтезу раціональних систем управління в економіці та підприємництві.
21. Математичні моделі в проблемах захисту економічної та підприємницької інформації.
22. Математичні моделі в управлінні фінансовими ресурсами.
23. Математичні моделі в управлінні інформаційними ресурсами.
24. Моделювання та фінансова інформатика.
25. Математичні моделі в аналізі та виборі інноваційно-інвестиційних проектів.
26. Математичні моделі аналізу проблем глобалістики.
27. Математичні моделі адаптивних і раціональних очікувань в економіці та підприємництві.
28. Моделі макроекономічного прогнозування.
29. Експертні методи, оцінки та їх використання в побудові прикладних економіко-математичних моделей управління економічними об’єктами.
30. Математичні моделі в галузевому регулюванні.
31. Комплекс математичних моделей у регіональному регулюванні.
32. Аналіз та моделювання трудових показників.
33. Моделювання еколого-економічних процесів.
34. Концептуальні засади математичного моделювання економічної безпеки країни.
35. Методологічні аспекти математичного моделювання агропромислової політики.
36. Математичні моделі основних системних характеристик та їхня роль у прийнятті рішень в економіці та підприємництві.
37. Математичні моделі антикризового менеджменту.
38. Математичні моделі трансформаційного менеджменту.
39. Методологічні аспекти моделювання конкуренції та поведінки економічних суб’єктів на ринках товарів та послуг.
40. Урахування мотиваційних аспектів діяльності суб’єктів господарювання в моделюванні та прийнятті рішень.
41. Математичні моделі програмно-цільового управління.
42. Методичні аспекти щодо моделювання аудиторської діяльності.
43. Моделювання інструментів фондового ринку.
44. Математичні моделі дослідження хаотичної динаміки в економічних системах.
45. Методологічні аспекти використання фрактальної геометрії в моделюванні економічних систем.
46. Методичні аспекти щодо застосування економіко-математичних моделей у географо-інформаційних системах (ГІСах).
47. Теорія катастроф та концептуальні засади її застосування в економіці.
48. Методологічні аспекти розбудови моделей довготермінового економічного прогнозування.

49. Концепція моделювання організаційного механізму.
50. Методологічні аспекти та інструментарій моделювання процесів активної адаптації в економіці та підприємництві.

3

РОЗДІЛ

АЛГОРИТМІЧНІ (ІМІТАЦІЙНІ) МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЦІ ТА ПІДПРИЄМНИЦТВІ

3.1. ОСНОВНІ АСПЕКТИ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Як зазначалося в попередньому матеріалі, за однією з класифікаційних ознак математичні моделі можна класифікувати як аналітичні, імітаційні (алгоритмічні) та комбіновані.

З розвитком обчислювальної техніки і дискретного аналізу дедалі ширшого розвитку та використання набувають алгоритмічні (імітаційні) моделі. Серед основних етапів процесу імітаційного моделювання можна виокремити такі:

- аналіз характеристик і закономірностей функціонування керованого (досліджуваного) об'єкта: виокремлення на змістовному (вербальному, концептуальному) рівні системи обмежень (ресурсних, фізичних, правових, соціальних тощо), визначення показників вимірювання та оцінки результатів, формулювання цілей, гіпотез та проблем розвитку;
- конструювання імітаційної моделі: перехід від реального об'єкта до логічних схем, які імітують його поведінку, та алгоритмів (моделей), формальна постановка задач, що розв'язуються за допомогою імітаційного моделювання;
- підготовка системи даних для моделі: формування інформаційного забезпечення, необхідного для функціонування імітаційної моделі, зокрема, визначення структури та способів подання даних, джерел їх отримання, форм і режимів зберігання, встановлення взаємозв'язків і взаємозалежності між різними масивами та базами даних;
- програмна реалізація імітаційної моделі: створення чи адекватне використання існуючих програмних продуктів, що забезпечують можливість безпосередньої практичної реалізації моделі на персональних комп'ютерах;
- оцінка адекватності моделі: порівняння результатів, накопичених у процесі дослідної експлуатації моделі, на підставі інформації, отриманої про реальний об'єкт, який імітується, виявлення та аналіз розбіжностей і в разі необхідності внесення корекцій до моделі;

• проведення імітаційних експериментів. Очевидно, що даний етап є цільовим (власне кажучи, заради нього й будується імітаційна модель). Він включає в себе стратегічне та тактичне планування експериментів, власне експериментування («імітаційні експерименти»), котре завершується інтерпретацією отриманих результатів і прийняттям на підставі зроблених висновків рішень щодо оцінювання та управління об'єктом (підприємством, банком, фінансовою фірмою, торговельною організацією, холдингом тощо).

Стратегічне планування імітаційного експерименту спрямоване на розв'язання низки питань якісного характеру. До таких, наприклад, можна віднести формулювання гіпотез щодо характеру залежностей між параметрами моделі чи вибір конкретних методів дослідження з урахуванням їх взаємовпливу.

Тактичне планування експерименту повинно прояснити питання стосовно визначення способів та умов його проведення. Типовими задачами тактичного планування є вибір початкових значень для параметрів моделі чи визначення послідовності варіації цих значень.

Одним із важливих аспектів у процесі роботи (дослідження) з імітаційною моделлю є аналіз її чутливості. Під ним розуміють визначення ступеня мінливості значень цільових показників моделі, зумовлених мінливістю (невизначеністю, варіабельністю) вихідних параметрів. Так, якщо за відносно невеликих змін вихідних даних відбувається суттєва зміна в результатах моделювання, то це є достатньою підставою для додаткових, більш детальних досліджень, зокрема, щодо взаємозв'язків між відповідними змінними.

До позитивних якостей імітаційного моделювання можна віднести:

• надання дослідникові (системному аналітику) можливості спостереження як кінцевого результату стосовно до показників аналізованого об'єкта, так і процесу його функціонування, що дає змогу одержати шуканий результат;

• широкі можливості щодо масштабування в процесі функціонування модельованого об'єкта;

• забезпечення багатоваріантності досліджень;

• багатофункціональність імітаційних моделей, що відображається в можливостях гнучкого вибору та наступних модифікаціях системи цілей і критеріїв, які бажано розглянути під час проведення імітаційних експериментів;

Звернімо увагу також на недоліки, що притаманні імітаційним моделям:

♦ оскільки імітаційні моделі за своєю природою є лише засобом для проведення деякого числового експерименту, то результати, отримані за їх допомогою, являють собою не що інше, як поодинокі випадки (можливі варіанти) розвитку модельованого об’єкта. Отже, всі висновки та твердження, зроблені на їх підставі, мають евристичний характер і в певних випадках можуть суттєво викривляти дійсний стан речей;

- у багатьох випадках отримання оцінок стосовно до ступеня наближення (чи невідповідності) між імітаційною моделлю (результатами імітаційного моделювання) і функціонуванням реального об’єкта виявляються проблематичними;
- здебільшого в основу процесу імітації покладено деякий статистичний експеримент, у ході якого використовуються генератори псевдовипадкових величин. Похибки, що об’єктивно притаманні таким генераторам, можуть істотно викривляти результати, отримані в ході імітаційного моделювання.

Варто також звернути увагу на пізнавальний зворотний вплив, що його дають результати, одержані в межах імітаційних експериментів, на отримання інформації, яку використовують теоретичні (аналітичні) економіко-математичні моделі. Справді, аналіз та узагальнення накопичених у процесі імітаційних експериментів даних досить часто дозволяє краще зрозуміти якісні та кількісні закономірності, притаманні поводженню керованих об’єктів, і відобразити їх в аналітичному вигляді. Це додатково вказує на справедливість того, що успішне розв’язання задач моделювання та управління функціонуванням таких складних слабоформалізованих систем, як економічні об’єкти і процеси, потребує комплексного використання цілісної системи моделей і методів як теоретико-аналітичної, так і емпіричної (імітаційної) природи. Нагадаймо, що імітаційні моделі широко використовують аналітичні моделі як органічні складові, котрі є основою, на якій ґрунтуються концептуальні співвідношення, характеристики в структурі будь-якої більш-менш складної імітаційної моделі[1].

Імітаційні (алгоритмічні) моделі можуть бути детермінованими і стохастичними. В останньому випадку за допомогою датчиків (генераторів) випадкових чисел імітується вплив (дія) невизначених і випадкових чинників. Такий метод імітаційного моделювання дістав назву методу статистичного моделювання (статистичних прогонів, чи методу Монте-Карло). На даний час цей метод вважають одним із найефективніших методів дослідження складних систем, а часто і єдиним практично доступним методом отримання нової інформації щодо поведінки гіпотетичної системи (на етапі її проектування).

---

[1] *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. — М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1981.

3.2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕТОДУ СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Метод статистичного моделювання (чи метод Монте-Карло) — це спосіб дослідження невизначених (стохастичних) економічних об’єктів і процесів, коли не повністю (до певної міри) відомими є внутрішні взаємодії в цих системах.

Цей метод полягає у модельному відтворенні процесу за допомогою стохастичної математичної моделі та обчисленні характеристик цього процесу. Одне таке відтворення можливого (випадкового) стану функціонування модельованої системи називають реалізацією (чи імітаційним прогоном; далі — прогоном).

Після кожного прогону реєструють сукупність параметрів, що характеризують випадкову подію (її реалізацію). Метод ґрунтується на багатократних прогонах (випадкових реалізаціях) на підставі побудованої моделі з подальшим статистичним опрацюванням отриманих даних з метою визначення числових характеристик досліджуваного об’єкта (процесу) у вигляді статистичних оцінок його параметрів. Процес моделювання економічної системи зводиться до машинної імітації досліджуваного процесу, котрий моделюється на ЕОМ з усіма суттєвими невизначеностями, випадковостями і породженим ними ризиком. Імітаційне моделювання нерідко має назву симулятивного моделювання. Перші відомості про метод Монте-Карло були опубліковані в кінці 40-х рр. XX століття. Авторами методу є американські математики — економісти Дж. Нейман і С. Улам.

Теоретичною основою методу статистичного моделювання є закон великих чисел. У теорії ймовірностей закон великих чисел ґрунтується на доведенні низки теорем для різних умов збіжності за ймовірністю середніх значень результатів (на підставі великої кількості спостережень) до деяких величин.

Під законом великих чисел розуміють кілька теорем. Наприклад, *одна з теорем П. Л. Чебишева* формулюється таким чином: «За необмеженого збільшення кількості незалежних випробувань (n) середнє арифметичне вільних від систематичних помилок і рівноточних результатів спостережень ξ_i випадкової величини ξ, яка має скінченну дисперсію $D(\xi)$, збігається за ймовірністю до математичного сподівання $m_\xi = M(\xi)$ цієї випадкової величини».

Це можна записати так:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - m_\xi\right| < \varepsilon\right\} = 1, \qquad (3.1)$$

де ε — як завгодно мале додатне число.

Теорема Бернуллі формулюється так: «За необмеженого збільшення числа незалежних спроб (n) за одних і тих самих умов відносна частота $\frac{m}{n}$ настання випадкової події збігається за ймовірністю до p, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m_i}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1, \qquad (3.2)$$

де ε — як завгодно мале додатне число».

Згідно з цією теоремою для отримання ймовірності певної події, наприклад імовірності станів деякої системи p_i, $i = 1, ..., k$, обчислюють відносні частоти $p_i = \frac{m_i}{n}$ для кількості реалізацій, що дорівнює n. Результати усереднюють і з деяким наближенням одержують шукані ймовірності станів системи. Чим більшим буде n, тим точнішим буде результат обчислення цих імовірностей. Це легко довести.

Припустимо, що треба відшукати значення математичного сподівання m для певної випадкової величини. Підберемо таку випадкову величину ξ, щоб

$$M(\xi) = m, \text{ а } D(\xi) = b^2,$$

де b^2 — довільне значення дисперсії випадкової величини ξ.

Розгляньмо послідовність n незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, розподіл імовірностей яких збігається з розподілом ξ. Якщо n є досить великим, то згідно з центральною граничною теоремою розподіл суми

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$$

буде приблизно нормальним розподілом з параметрами $a = n \cdot m$; $\sigma^2 = n \cdot b^2$.

З правила «трьох сигм» $P\{a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma\} = 0{,}997$ випливає, що

$$P\left\{mn - 3b\sqrt{n} < \eta_n < nm + 3b\sqrt{n}\right\} = 0{,}997. \qquad (3.3)$$

Розділивши нерівність, що розташована у фігурних дужках, на n, отримаємо еквівалентну нерівність з тією самою ймовірністю:

$$P\left\{m - \frac{3b}{\sqrt{n}} < \frac{\eta_n}{n} \langle m + \frac{3b}{\sqrt{n}}\right\} = 0{,}997.$$

Це співвідношення можна записати у вигляді:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - m\right| < \frac{3b}{\sqrt{n}}\right\} = 0{,}997. \qquad (3.4)$$

Співвідношення (3.4) визначає метод обчислення середнього значення m і оцінку похибки. З (3.4) видно, що середнє арифметичне реалізацій випадкової величини ξ наближено дорівнюватиме числу m. З імовірністю $p = 0,997$ похибка такого наближення не перевищує $\frac{3b}{\sqrt{n}}$. Очевидно, що ця похибка прямує до нуля зі зростанням n, що й потрібно було довести.

Розв'язування задач методом статистичного моделювання полягає в такому:

- опрацювання й побудова структурної схеми процесу, виявлення основних взаємозв'язків;
- формалізований опис процесу;
- моделювання випадкових явищ (випадкових подій, випадкових величин, випадкових функцій), що притаманні досліджуваній системі;
- моделювання процесу функціонування системи (на підставі використання даних, що отримані на попередньому етапі) — відтворення процесу відповідно до розробленої структурної схеми і формалізованого опису (імітаційні прогони);
- накопичення результатів моделювання (імітаційних прогонів), статистичне опрацювання, аналіз та інтерпретація їх.

Зазначимо, що будь-які твердження стосовно до характеристик модельованої системи повинні ґрунтуватися на результатах відповідних перевірок за допомогою методів математичної статистики.

Оскільки випадкові події й випадкові функції можуть подаватися з використанням випадкових величин, то й моделювання випадкових подій і випадкових функцій проводиться за допомогою випадкових величин.

3.2.1. Моделювання випадкових величин

Для моделювання випадкової величини потрібно знати закон її розподілу. *Найзагальнішим способом* отримання послідовності випадкових чисел, що є послідовністю реалізацій випадкової величини, котра розподілена за довільним законом, є спосіб, в основі якого — процес формування їх з вихідної послідовності випадкових чисел. Ця послідовність є послідовністю реалізацій випадкової величини, що розподілена в інтервалі (0; 1) згідно з рівномірним законом розподілу.

Згадану послідовність випадкових чисел з рівномірним законом розподілу можна отримати трьома способами:

- використанням таблиць випадкових чисел;

- застосуванням генераторів випадкових чисел;
- методом псевдовипадкових чисел.

Нині використовують псевдовипадкові числа, що відповідають рівномірному закону розподілу. Псевдовипадкові (випадкові) числа — це числа, отримані за деяким правилом (формулою), що імітує значення випадкової величини. Розроблено низку алгоритмів для отримання псевдовипадкових чисел. Датчики псевдовипадкових чисел є складовими більшості програмних комплексів.

Для перетворення послідовності випадкових чисел, що є реалізаціями випадкової величини з рівномірним законом розподілу в інтервалі (0; 1), у послідовність випадкових чисел, що є реалізаціями випадкової величини із заданою інтегральною функцією розподілу $F(x)$, треба із сукупності випадкових чисел з рівномірним законом розподілу в інтервалі (0; 1) вибрати випадкове число ξ і розв'язати рівняння:

$$F(x) = \xi \text{ відносно } x. \tag{3.5}$$

У випадку, коли задана функція щільності ймовірності $f(x)$, співвідношення (3.5) набирає вигляду:

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \xi. \tag{3.6}$$

Для низки законів розподілу отримано аналітичний розв'язок рівняння (3.6), результат якого наведено в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

ФОРМУЛИ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Закони розподілу випадкової величини	Щільність розподілу	Формули для моделювання випадкових величин
Експоненційний	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln \xi_i$
Вейбула	$f(x)=\frac{a}{b}\left(\frac{x}{a}\right)^{a-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right]$	$x_i = -b(\ln \xi_i)^{1/a}$
Гама-розподіл (η — цілі числа)	$f(x)=\frac{\lambda^{\eta}}{\Gamma(\eta)}e^{-\lambda x}x^{\eta-1}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{\eta}\ln(1-\xi_{ij})$
Нормальний	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$x_i = m+\sigma\left(\sum_{j=1}^{12}\xi_{ij}-6\right)$

3.2.2. Моделювання випадкових подій

Моделювання випадкових подій полягає у відтворенні факту появи чи непояви випадкової події відповідно до заданої ймовірності. Моделювання повної групи несумісних подій A_1, A_2, …, A_n, імовірності котрих $P(A_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$ відомі, можна привести до моделювання дискретної випадкової величини Y, яка має закон розподілу $P(y_i) = p_i$, де ймовірність її можливих значень

$$P(y_i) = P(A_i) = p_i.$$

Тобто прийняття дискретною випадковою величиною Y можливого значення y_i еквівалентне появі події A_i. Для практичної реалізації даного способу спочатку на одиничному відрізку числової осі відкладають інтервали $\Delta i = p_i$.

Генерують рівномірно розподілену на інтервалі (0; 1) випадкову величину, реалізацією котрої є випадкове число ξ_j, і перевіряють умову:

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i \le \xi_j < \sum_{i=1}^{k} p_i. \qquad (3.7)$$

При виконанні умови (3.7) вважають, що за цього випробування відбулася подія A_k.

Приклад Імовірність появи події A у кожному випробуванні дорівнює $P(A) = 0{,}75$. Необхідно змоделювати три випробування і визначити послідовність реалізації події A.

Розв'язання. Відкладемо на одиничному відрізку числової осі точку $E = 0{,}75$ і вважатимемо, що коли випадкове число $\xi_i < E$, то у випробуванні настала подія A. У протилежному випадку (при $\xi_i \ge E$) настала подія не A ($\overline{A}$), тобто подія A не мала місця.

Припустимо, наприклад, що з відповідної таблиці обрані випадкові числа $\xi_1 = 0{,}925$, $\xi_2 = 0{,}135$, $\xi_3 = 0{,}088$. Тоді за трьох випробувань отримаємо таку послідовність реалізації подій: $\overline{A}$, A, A.

Моделювання сумісних (залежних і незалежних) подій можна виконати двома способами.

Перший спосіб. На першому етапі моделювання визначають усі можливі варіанти появи сумісних подій у випробуванні. Знаходять повну групу несумісних подій та обчислюють їх імовірності.

На другому етапі вчиняють так само, як і в моделюванні повної групи несумісних подій.

Приклад Нехай при випробуванні мають місце залежні й сумісні події A та B, при цьому відомо, що $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}5$; $P(AB) = 0{,}3$.

Потрібно змоделювати появу подій A та B у двох випробуваннях.

Розв'язання. У кожному випробуванні можливі чотири несумісних результати, тобто настання чотирьох подій:

1. $C_1 = AB$, $P(C_1) = P(AB) = 0{,}3$.
2. $C_2 = A\overline{B}$, $P(C_2) = P(A\overline{B}) = P(A) - P(BA) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4$.
3. $C_3 = \overline{A}B$, $P(C_3) = P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$.
4. $C_4 = \overline{A}\overline{B}$, $P(C_4) = 1 - [P(C_1) + P(C_2) + P(C_3)] = 1 - (0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2) = 0{,}1$.

Змоделюймо повну групу подій C_1, C_2, C_3, C_4 у двох випробуваннях (прогонах). Попередньо на одиничному відрізку числової осі (рис. 3.1) послідовно відкладемо інтервали:

$$\Delta_i = P(C_i),\ i = 1,\ldots,4.$$

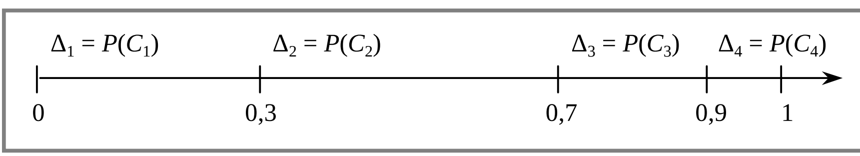


Рис. 3.1. Інтервали $\Delta_i = P(C_i)$

Нехай отримано (взято з відповідної таблиці) випадкові числа $\xi_1 = 0{,}68$ і $\xi_2 = 0{,}95$.

Випадкове число ξ_1 належить до інтервалу Δ_2, тому при першому випробуванні мала місце подія A, а подія B не настала. За другого випробування випадкове число ξ_2 належить до інтервалу Δ_4. Обидві події A та B не мали місця.

Другий спосіб. Моделювання сумісних подій полягає у розігруванні факту появи кожної із сумісних подій окремо, при цьому, якщо події залежні, треба попередньо визначити умовні ймовірності.

Приклад Використовуючи умови попереднього прикладу, потрібно змоделювати окрему появу подій A та B в одному випробуванні.

Розв'язання. Події A та B є залежними, тому попередньо знаходимо умовні ймовірності $P(B/A)$ та $P(B/\overline{A})$:

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0,3}{0,7}=\frac{3}{7};$$

$$P(B/\bar{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{0,2}{1-0,7}=\frac{2}{3}.$$

Для моделювання події *A* обрано випадкове число ξ_1. Нехай $\xi_1 = 0,96$. Оскільки $\xi_1 > P(A)$, то подія *A* у випробуванні не настала.

Тепер розіграємо подію *B* за умови, що подія *A* у випробуванні не мала місця. Нехай випадкове число $\xi_2 = 0,22$. Отже, $\xi_2 < P(B/\bar{A})$ (0,22 < 2/3), тобто маємо, що подія *B* за випробування настала.

3.3. ПОСЛІДОВНІСТЬ СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ІМІТАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

У процесі створення та машинної реалізації математичних імітаційних моделей здійснюють такі (узагальнені) етапи[1]:

- побудова концептуальної моделі;
- побудова алгоритму згідно з концептуальною моделлю системи;
- створення комп’ютерної програми;
- машинні експерименти з моделлю системи.

3.3.1. Побудова концептуальної моделі

Побудова концептуальної моделі складається з таких кроків:

- постановка задачі моделювання;
- визначення вимог щодо первісної інформації та способів її отримання;
- формування гіпотез і припущень;
- визначення параметрів та змінних моделі;
- обґрунтування вибору показників і критеріїв ефективності системи;
- складання змістовного опису моделі.

У здійсненні постановки задачі моделювання економічних об’єктів і процесів використовується чітке формулювання цілей і задач дослідження реальної системи, обґрунтовується необхідність імітаційного (комп’ютерного) моделювання, обирається ме-

---

[1] *Варфоломеев В. И.* Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем: Практикум: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 2000.

тодика розв’язування задачі з урахуванням наявних ресурсів, визначаються необхідність і можливість декомпозиції задачі на окремі взаємопов’язані підзадачі тощо.

При зборі необхідної вихідної інформації треба звертати увагу на те, що, власне, від якості вихідної інформації про об’єкт дослідження і моделювання залежить як адекватність моделі, так і достовірність результатів моделювання.

Гіпотези при побудові моделі системи слугують для заповнення «прогалин» щодо розуміння та формалізації задачі. Припущення дають можливість провести необхідні спрощення моделі на підставі раціональних гіпотез. У процесі роботи з моделлю системи, як правило, можливим є багаторазове повернення до цього етапу залежно від отриманих результатів моделювання і нової інформації (розуміння) про об’єкт.

Під час визначення параметрів і змінних складається перелік вихідних і керуючих змінних, а також зовнішніх (екзогенних) і внутрішніх (ендогенних) параметрів системи.

Обрані показники і критерії ефективності системи повинні відображати мету (цілі) функціонування системи і являти собою функції змінних і параметрів системи.

Розроблення концептуальної моделі завершується складанням змістовного опису, котрий використовується як основний документ, що характеризує результати опрацювання концептуальної постановки задачі (розуміння її всіма суб’єктами, зацікавленими у результатах дослідження).

3.3.2. Побудова алгоритму згідно з концептуальною моделлю системи

Побудова алгоритму містить такі складові:

- побудова логічної схеми алгоритму;
- формування математичних співвідношень (аналітичних моделей);
- перевірка достовірності алгоритму.

Спочатку, як правило, створюють узагальнену схему моделюючого алгоритму, котра задає загальний порядок (хід) дій в імітаційному моделюванні досліджуваного процесу. Після цього розробляється детальна схема, кожний елемент якої перетворюється в оператор (групу операторів) програми.

Перевірка достовірності алгоритму повинна дати відповідь на запитання, наскільки адекватно і точно він відображає сутність модельованого процесу (у конкретній ситуації) та побудованої концептуальної моделі.

3.3.3. Створення комп'ютерної програми

Розроблення програми для ПК включає такі кроки:

- вибір обчислювальних засобів;
- програмування (чи налаштування відповідних параметрів існуючих програмно-методичних комплексів);
- тестування програмних засобів.

На останньому кроці необхідно, зокрема, оцінити тривалість виконання програми на комп'ютері (витрати часу) для здійснення однієї реалізації (прогону) модельованого процесу, що дасть змогу системному аналітикові правильно сформулювати вимоги щодо точності й достовірності результатів моделювання.

3.3.4. Проведення машинних експериментів з моделлю системи

На цьому етапі провадяться серійні обчислення за допомогою програми. Етап складається з таких кроків:

- планування машинного експерименту;
- проведення робочих обчислень;
- відповідне подання результатів моделювання (у табличній та графічній формах);
- подання рекомендацій щодо оптимізації режиму функціонування реальної системи.

Перед здійсненням робочих обчислень на комп'ютері доречно скласти план проведення експерименту з переліком комбінацій змінних і параметрів, за яких повинно відбутися моделювання системи. Завдання полягає у розробці оптимального плану експерименту, реалізація якого дозволить за порівняно невеликої кількості тестувань моделі отримати достовірні дані про закономірності функціонування реальної системи.

Результати моделювання можуть бути подані у вигляді таблиць, графіків, діаграм, схем тощо. Зазвичай найпростішою формою вважаються таблиці, хоча графіки ілюструють результати моделювання економічного об'єкта (системи) у більш наочній формі. Доцільно передбачити інтерактивний режим функціонування комплексу, виведення результатів на екран дисплея та на принтер.

Інтерпретація результатів моделювання має на меті перехід від інформації, отриманої в результаті машинного експерименту з моделлю, до висновків щодо процесу функціонування об'єкта-оригіналу[1].

---

[1] *Петров А. А.* Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. — М.: Наука, 1996.

3.4. МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ЯК СИСТЕМОТВІРНА ІМІТАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ МОДЕЛЮВАННЯ

Алгоритмічне (імітаційне) моделювання — це числовий метод дослідження систем і процесів за допомогою моделюючого алгоритму.

Кожного разу, коли на хід модельованого процесу впливає випадковий чинник, його вплив імітується за допомогою спеціально організованого розіграшу (жеребкування). Таким способом будується випадкова реалізація модельованого явища, яка є одним із результатів дослідження. За результатами окремого досліду, звичайно, не можна робити висновок щодо закономірностей досліджуваного процесу. Але за великої кількості реалізацій середні характеристики (математичне сподівання, мода, медіана), що їх виробляє (генерує) модель, набувають стійких властивостей, котрі посилюються зі зростанням кількості реалізацій (прогонів). Звісно, залишається певний ризик, який характеризується тим, що модель є гомогенною, існує неповнота даних тощо.

Кидання жеребка можна здійснити вручну (вибором із таблиці випадкових чисел), але зручніше це робити за допомогою спеціальних програм, що входять до складу програмного забезпечення комп'ютера. Такі програми називають *датчиками* чи *генераторами випадкових чисел*.

У складі трансляторів майже всіх алгоритмічних мов є стандартні процедури (чи функції), котрі генерують випадкові (точніше, псевдовипадкові) числа, що є реалізаціями послідовності випадкових чисел із рівномірним законом розподілу.

Наприклад, у складі транслятора мови Visual Basic — стандартна функція RND, що видає випадкові дійсні числа одинарної точності в інтервалі (0; 1). Звернення до цієї функції може мати вигляд ξ = RND, де ξ — можливе значення (реалізація) випадкової величини, яка рівномірно розподілена на інтервалі (0; 1).

Моделювання випадкових подій

1. Моделювання простої події

Нехай має місце подія A, імовірність настання котрої дорівнює $P(A)$. Потрібно обрати правило, у багаторазовому використанні якого частота появи події прямувала б до її ймовірності. Оберемо за допомогою датчика випадкових чисел, що мають рівномірний закон розподілу на інтервалі (0;1), деяке число ξ і визначимо ймовірність того, що $\xi < P(A)$. Для випадкового числа ξ, котре є реалізацією випадкової величини з рівномірним законом розподілу на інтервалі (0; 1), справедливою буде така залежність:

$$P(\xi < P(A)) = \int_0^{P(A)} f(x)dx = P(A).$$

Отже, імовірність потрапляння випадкової величини в інтервал (0; $P(A)$) дорівнює величині $P(A)$. Тому, якщо під час розіграшу число потрапило в цей інтервал, то слід вважати, що відбулася подія A. Протилежна подія ($\bar{A}$) відбудеться з імовірністю ($1 - P(A)$) у тому разі, коли $\xi \geq P(A)$.

Процедура моделювання простої події в імітаційній моделі описується алгоритмом, схема якого подана на рис. 3.2. (ДВЧ(ξ) — датчик випадкових чисел ξ, що відповідають рівномірному закону розподілу на інтервалі (0; 1).)

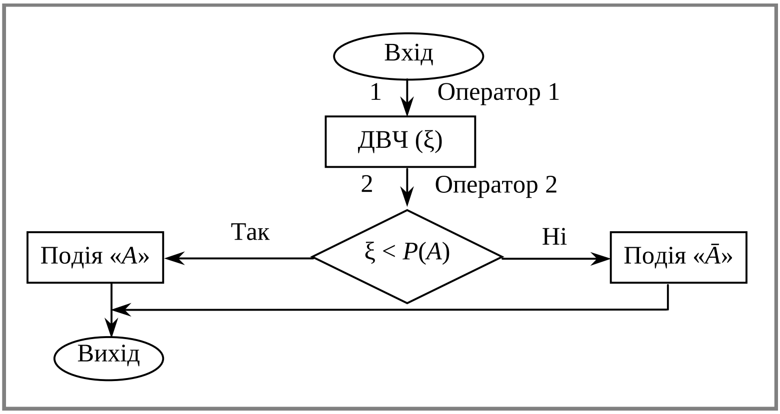


Рис. 3.2. Моделювання простої події

Оператор 1 звертається до датчика випадкових чисел, який генерує випадкове число ξ.

Оператор 2 здійснює перевірку умови $\xi < P(A)$. Якщо вона виконується, вважається, що відбулася подія A. У протилежному випадку вважається, що відбулася протилежна подія (A).

2. Моделювання повної групи несумісних подій

Нехай наявна повна група випадкових несумісних подій (ПГНП) $A_1, A_2, \ldots, A_k$ з імовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$. При цьому виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

Поділимо інтервал (0; 1) на k відрізків, довжини яких відповідно дорівнюють p_1, p_2, …, p_k.

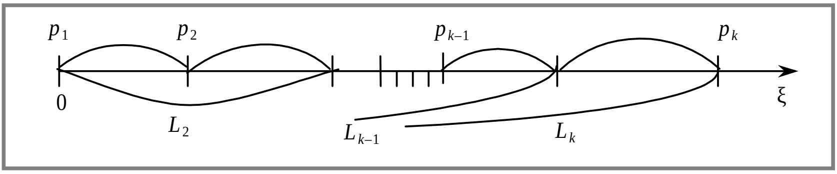


Рис. 3.3. Моделювання повної групи несумісних подій

Якщо випадкова величина ξ, яка генерується датчиком випадкових чисел, що відповідають рівномірному закону розподілу на інтервалі (0; 1), припадає, наприклад, на відрізок p_{k-1}, то це повинно означати, що відбулася подія A_{k-1}.

Справді, якщо позначити $L_j = \sum_{i=1}^{j} p_i$, то виявиться справедливим вираз $P(L_{k-2} < \xi < L_{k-1}) = \int_{L_{k-2}}^{L_{k-1}} d\xi = p_{k-1}$.

Процедура моделювання повної групи несумісних подій описується алгоритмом, схема якого наведена на рис. 3.4.

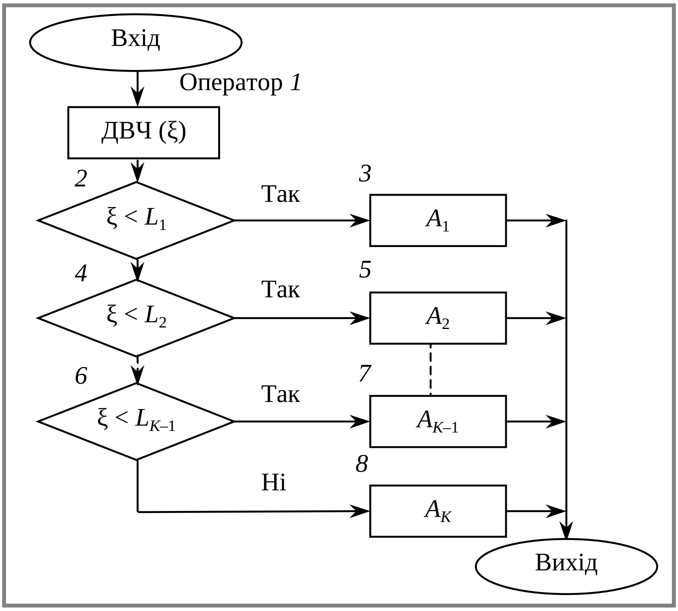


Рис. 3.4. Схема алгоритму моделювання повної групи несумісних подій

Оператор 1 звертається до генератора випадкових чисел, що відповідають рівномірному закону розподілу на інтервалі (0; 1). Оператор 2 перевіряє умову потрапляння випадкової величини ξ в інтервал (0; L_1). Якщо ця умова виконується, то вважається, що відбулася подія A_1. Якщо ця умова не виконується, то алгоритм передбачає перевірку умов потрапляння випадкової величини в інші інтервали.

3. Моделювання дискретної випадкової величини

Розподіл дискретної випадкової величини може бути поданий у вигляді таблиці

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Тут p_j — імовірність того, що випадкова величина x набуває значення x_j, $j = 1, \ldots, n$.

Накладається також умова:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1. \qquad (3.8)$$

Поділимо інтервал (0; 1) на n відрізків, довжини котрих дорівнюють заданим імовірностям. Якщо випадкове число ξ, що формується генератором випадкових чисел, котрі відповідають рівномірному закону розподілу на інтервалі (0; 1), потрапляє до інтервалу p_k, то випадкова величина x набуває значення x_k. Отже, під час моделювання дискретної випадкової величини фактично використовується та сама процедура, що й за моделювання повної групи несумісних подій.

4. Моделювання випадкових величин з рівномірним розподілом

Генератор випадкових чисел генерує послідовність реалізацій випадкової величини ξ з рівномірною функцією розподілу на інтервалі (0; 1). Здебільшого треба моделювати випадкові величини з рівномірним розподілом, які набувають значення в інтервалі (a; b).

Припустимо, що

$$\xi = F(x) = \frac{x-a}{b-a},$$

звідси

$$x = a + \xi(b-a).$$

На практиці використовується дещо модифікований спосіб. Замість меж інтервалу задаються: середнє значення випадкової величини $m(\xi)$ і величина (довжина) інтервалу Δx, у межах якої може набувати свої значення ця випадкова величина (з рівномірним законом розподілу). Визначення можливого значення (реалізації) випадкової величини з рівномірним розподілом можна здійснити згідно з виразом:

$$x = m(\xi) + \Delta x(\xi - 0{,}5).$$

5. Моделювання випадкових величин з нормальним законом розподілу

Згідно з центральною граничною теоремою теорії ймовірностей унаслідок додавання досить великої кількості однаково розподілених незалежних випадкових величин отримуємо випадкову величину, яка має нормальний закон розподілу.

Як показали дослідження, вже внаслідок складання більш ніж десяти випадкових незалежних величин з рівномірним розподілом в інтервалі (0; 1) отримуємо випадкову величину, котру з точністю, достатньою для більшості практичних задач, можна вважати розподіленою згідно з нормальним законом.

Процедура розіграшу нормально розподіленої випадкової величини полягає у такому:

А. Складаємо, наприклад, 12 незалежних випадкових величин, які мають рівномірний закон розподілу та які набувають значення в інтервалі (0; 1), тобто:

$$v = \sum_{i=1}^{12} \xi_i .$$

Використовуючи відомі теореми про математичне сподівання суми незалежних випадкових величин з однаковим законом розподілу та дисперсію цієї суми, легко обчислити для випадкової величини v математичне сподівання $m(v)$ та дисперсію $D(v)$:

$$m(v) = \sum_{i=1}^{12} m(\xi_i) = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6;$$

$$D(v) = \sum_{i=1}^{12} D(\xi_i) = 12\left(\frac{1}{12}\right) = 1;$$

$$\sigma(v) = \sqrt{D(v)} = 1.$$

Б. Нормуємо та центруємо випадкову величину v, тобто перейдемо до випадкової величини η, яка має нульове математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення $\sigma(\eta) = 1$.

$$\eta = \frac{[v - m(v)]}{\sigma(v)} = v - 6.$$

Від нормованої та центрованої випадкової величини η можна перейти до випадкової величини *y* із заданими параметрами *m*(*y*) і σ(*y*) згідно з таким виразом:

$$y = m(y) + \eta\sigma(y).$$

3.5. ПРИКЛАДИ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Будівництво підприємства

Підприємець збирається вкласти кошти в будівництво нового підприємства, котре випускатиме певну продукцію, що користується попитом на ринку. Аналогічну продукцію випускають і інші фірми, тому доведеться діяти в умовах конкуренції.

Існує можливість приблизно оцінити майбутні експлуатаційні витрати з випуску продукції, тобто вважати відомими математичне сподівання (чи середнє значення) і середньоквадратичне відхилення очікуваних витрат. Можна також припустити гіпотезу, за якою витрати матимуть нормальний закон розподілу із заданими параметрами.

Припускається, що місткість ринку (випадкова величина) має, наприклад, нормальний закон розподілу (з відомими параметрами — математичним сподіванням і середньоквадратичним відхиленням).

Гірші справи — стосовно до інформації для визначення характеристик тієї частки ринку, котру може зайняти це підприємство після введення його в експлуатацію. Припустимо, що єдине, що вдасться передбачити, — це середня величина частки цього ринку. Вид розподілу здебільшого невідомий, і немає достатніх підстав для того, щоб вважати розподіл нормальним.

У цьому випадку доречно використати розподіли з іншого їх класу (наприклад, рівномірний чи інтервально-рівномірний). Доцільно розглянути кілька варіантів розподілу та проаналізувати реакцію моделі на зміни як обраних функцій розподілу, так і їхніх параметрів.

За показник ефективності роботи підприємства доречно обрати, зокрема, прибуток від реалізації продукції, знаходячи максимум гарантованого прибутку за заданого ступеня одного з кількісних показників ризику. Якщо для цього є підстави, то береться гіпотеза, що випадкова величина прибутку має нормальний закон розподілу.

Отже, сформуємо *концептуальну модель*, яка враховує таке:

1. Випуск продукції пов'язаний з експлуатаційними витратами (випадкова величина R_{rach}), котрі мають (за гіпотезою) нормальний закон розподілу із заданими параметрами: математичним сподіванням витрат (m_{rach}) і середньоквадратичним відхиленням витрат (σ_{rach});

2. Місткість ринку, де має реалізуватись продукція підприємства, також є випадковою величиною (R_{ryn}), яка має (за припущенням) нормальний закон розподілу із заданими параметрами: математичним сподіванням місткості ринку (m_{ryn}) і середньоквадратичним відхиленням місткості ринку (σ_{ryn});

3. Частка підприємства на ринку є невизначеною і може бути задана деякою випадковою величиною з певною функцією розподілу (наприклад інтервально-рівномірною функцією);

4. Вважатимемо, що прибуток підприємства є випадковою величиною (R_{prof}), котра визначається з виразу:

$$R_{prof} = R_{ryn} \cdot d_{ryn} - R_{rach}, \tag{3.9}$$

де R_{prof} — випадкова величина прибутку підприємства; R_{ryn} — випадкова величина місткості ринку; d_{ryn} — випадкова величина частки ринку підприємства; R_{rach} — випадкова величина експлуатаційних витрат підприємства.

Результуючими характеристиками моделі вважатимемо:

- суму значень R^i_{prof} випадкової величини R_{prof} для N_p реалізацій (імітаційних прогонів):

$$S_{prof} = \sum_{i=1}^{N_p} R^i_{prof}; \tag{3.10}$$

- суму квадратів значень випадкової величини прибутку для N_p реалізацій (імітаційних прогонів):

$$S^2_{prof} = \sum_{i=1}^{N_p} \left(R^i_{prof}\right)^2. \tag{3.11}$$

Показником ефективності функціонування підприємства оберемо гарантований прибуток за заданого рівня ризику, який визначатимемо за формулою:

$$G_{prof} = m_{prof} - k_\alpha \cdot \sigma_{prof},$$

де G_{prof} — гарантований обсяг прибутку згідно із заданим значенням показника ризику α; m_{prof} — оцінка математичного сподівання прибутку

$$m_{prof} = \frac{S_{prof}}{N_p};$$

σ_{prof} — оцінка середньоквадратичного відхилення прибутку:

$$\sigma_{prof} = \sqrt{\frac{1}{N_p - 1}(S_{prof}^2 - N_p m_{prof}^2)}; \qquad (3.12)$$

k_α — квантиль нормального закону розподілу відповідно до заданого значення компоненти (α) вектора ризику, наприклад, якщо $\alpha = 0{,}1$, то $k_\alpha = 1{,}28$ (визначається за таблицями щільності нормального закону розподілу).

Вплив кожного з урахованих чинників імітується за допомогою спеціально організованого жеребкування (розігрування). Таким чином будується одна випадкова реалізація модельованого явища, котра являє собою один результат дослідження (один прогон). За великої кількості реалізацій досліджень (прогонів) середні характеристики (математичне сподівання, мода, медіана), що їх виробляє (генерує) модель, набувають стійких властивостей.

Для моделювання неперервних і дискретних випадкових величин x з відомими функціями розподілу можна використати генератор випадкових чисел, що генерує випадкове число ξ, а після цього, здійснюючи обчислення за відповідними формулами, отримати реалізацію x випадкової величини x.

Наприклад, моделювання випадкової величини з довільним розподілом можна здійснити за такою схемою.

Нехай є підстави подати (наближено) функцію розподілу випадкової величини x, яка задана на відрізку $[a_0, a_n]$, інтервально-постійною функцією щільності розподілу $f(x)$. Це означає, що відрізок розподіляється на n часткових відрізків так, щоб імовірність розподілу на кожному з них була (наближено) однаковою (рис. 3.5).

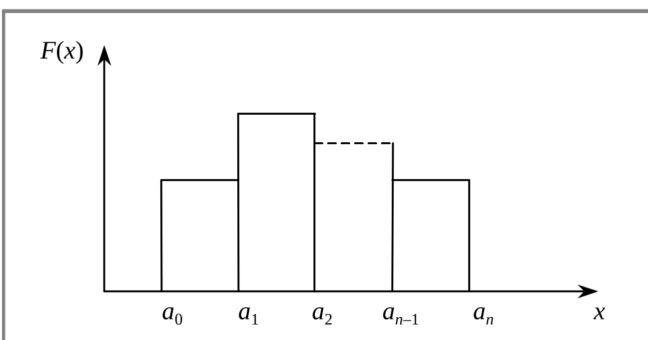


Рис. 3.5. Наближена інтервально-постійна функція щільності розподілу випадкової величини з довільним розподілом

Доцільно обрати величини a_k, $k = 0, 1, \dots, n$ так, щоб імовірності (P_k) потрапляння випадкової величини в будь-який частковий відрізок були однаковими, тобто:

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx = \frac{1}{n}, \; k = 1, \; \dots, n. \qquad (3.13)$$

З умови, що $f(x) = \text{const} = c_k$ на кожному частковому інтервалі, випливає, що випадкова величина X може бути визначена за формулою:

$$x_k = a_{k-1} + \xi(a_k - a_{k-1}), \quad k = 1, \dots, n, \qquad (3.14)$$

де ξ — реалізація випадкової величини, рівномірно розподіленої на інтервалі (0; 1); a_{k-1} — ліва межа часткового відрізка; a_k — права межа часткового відрізка.

Потрапляння у будь-який частковий інтервал можна розглядати як подію, що входить до складу повної групи несумісних подій. Тому процедура моделювання у загальному випадку полягає у такому:

1. За допомогою генератора випадкових чисел (ГВЧ), що виробляє величину ξ, моделюємо дискретну випадкову величину — номер інтервалу k.

2. Повторно розігруємо випадкову величину ξ і визначаємо значення (реалізацію) випадкової величини X за формулою (3.14). Блок-схема алгоритму показана на рис. 3.6.

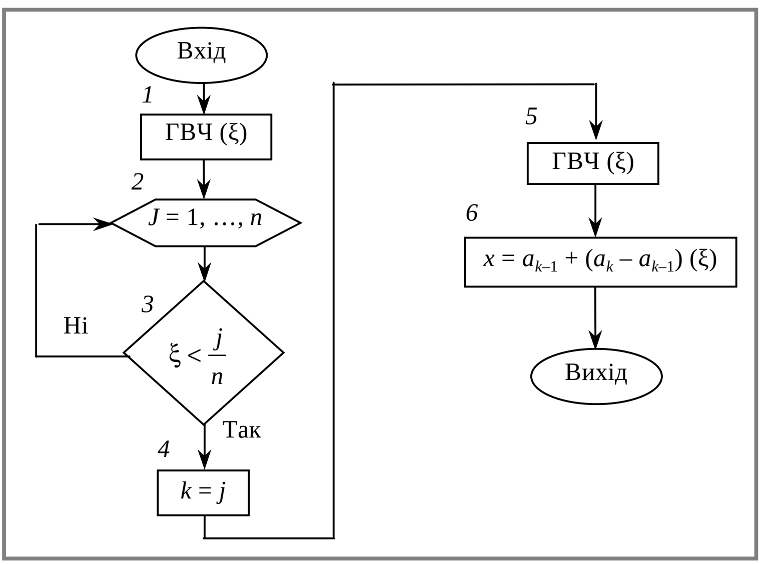


Рис. 3.6. Блок-схема алгоритму моделювання випадкової величини, яка має довільну функцію розподілу

Узагальнений алгоритм моделі

Загальний вигляд (макет) стартової форми (як зразок) наведено на рис. 3.7.

Уведення вихідних даних для подальших обчислень

Параметри	Середні значення	Середньоквадратичні відхилення
Експлуатаційні витрати	m_{rach}	σ_{rach}
Місткість ринку	m_{ryn}	σ_{ryn}

Кількість прогонів (випадкових реалізацій)	Кількість точок на графіку
N_p	$n + 1$

Координати точок

Номер точки (координата)	1	2	3	…	$n + 1$
Координата	a_0	a_1	a_2	…	a_n

Результати моделювання

Середній прибуток	Середньоквадратичне відхилення	Гарантований прибуток за заданого ризику
m_{prof}	σ_{prof}	G_{prof}

Рис. 3.7. Макет стартової форми

У макет включені такі об'єкти управління: кілька міток із назвами об'єктів; поля для коригування вихідних даних, а також поля для виводу результатів моделювання.

Узагальнена схема алгоритму обчислення величини G_{prof} наведена на рис. 3.8.

Подамо сутність операторів узагальненої схеми, наведеної на рис. 3.8.

Оператор 1 здійснює введення вхідних даних та всіх необхідних параметрів.

Оператор 2 є початком циклу прогонів випадкових реалізацій. Цикл завершується, коли $I = N_p$.

Оператор 3 звертається до процедури, що генерує можливе значення нормованих (нормалізованих) і центрованих випадкових величин, які розподілені згідно з нормальним законом розподілу.

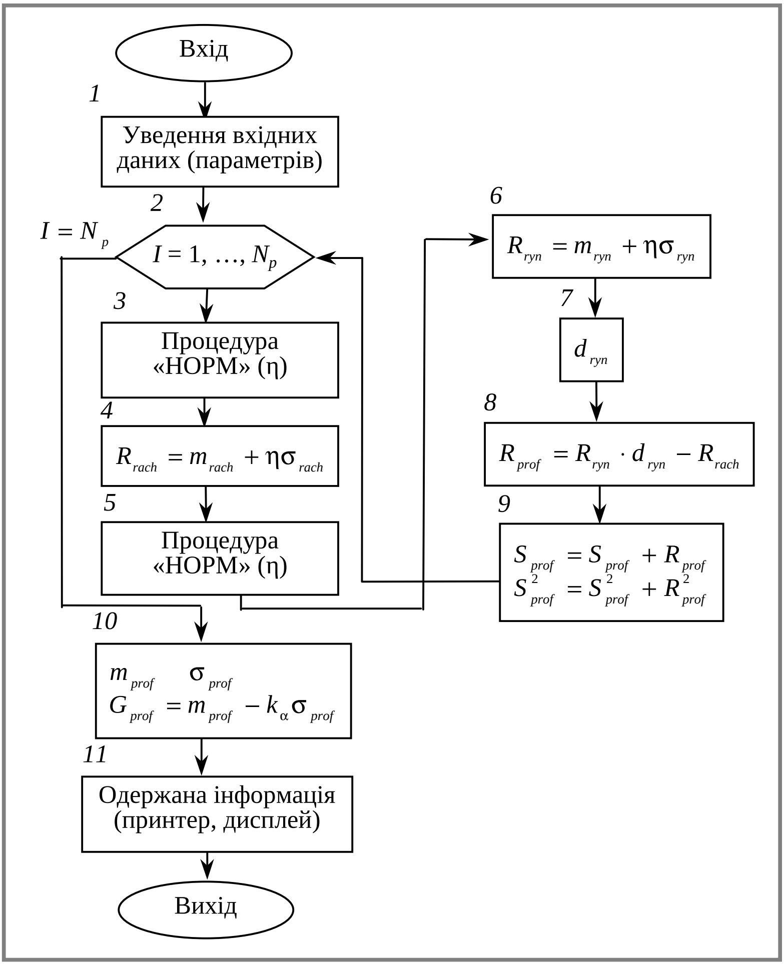


Рис. 3.8. Узагальнений алгоритм обчислення величини G_{prof}

Оператор 4 обчислює випадкове значення експлуатаційних витрат.

Оператори 5 і 6 аналогічно попередньому визначають випадкову величину місткості ринку.

Оператор 7 звертається до процедури, котра визначає реалізацію випадкового значення частки підприємства на ринку. Ця випадкова величина генерується, зокрема, згідно з описаною вище процедурою моделювання випадкових величин з довільним розподілом.

Оператор 8 визначає за формулою (3.9) обсяг випадкового значення величини прибутку для однієї реалізації модельованого процесу.

В операторі 9 здійснюється накопичення суми прибутків і суми квадратів прибутків для всіх прогонів і відповідних реалізацій цих випадкових величин (формули (3.10), (3.11)).

Після завершення випадкових реалізацій оператор 10 здійснює за наведеними вище формулами обчислення величин m_{prof}, σ_{prof}, G_{prof}.

Оператор 11 виводить результати моделювання на монітор (чи на принтер).

Числовий приклад

Нехай відомі такі дані:

m_{rach} — середнє значення експлуатаційних витрат (у грн): m_{rach} = 11 000;

σ_{rach} — середньоквадратичне відхилення експлуатаційних витрат: σ_{rach} = 11 000;

m_{ryn} — середнє значення місткості ринку: m_{ryn} = 2 780 000;

σ_{ryn} — середньоквадратичне відхилення місткості ринку: σ_{ryn} =250 000;

N_p — кількість випадкових реалізацій: N_p = 1000.

Змінюваними параметрами вважатимемо параметри закону розподілу частки підприємства на ринку.

Розгляньмо три варіанти розподілу.

Для першого варіанта припустимо, що кількість граничних точок $n = 2$ (діапазон зміни цієї випадкової величини складається з однієї ділянки). Закон розподілу є рівномірним. Нехай середнє значення частки ринку дорівнює 0,1. Оберемо такі значення координат граничних точок: a_0 = 0,099; a_1 = 0,101. Отже, для першого варіанта ступінь невизначеності досить невеликий. Частка підприємства на ринку практично постійна (становить 10 % його загальної місткості).

Для другого варіанта припустимо, що кількість граничних точок становить: $n = 6$ (діапазон складається з п’яти ділянок). Нехай маємо те саме середнє значення (0,1). Граничні точки розташовані симетрично відносно середнього значення. Оберемо такі значення їхніх координат:

$$a_0 = 0{,}035;\ a_1 = 0{,}075;\ a_2 = 0{,}095;\ a_3 = 0{,}105;\ a_4 = 0{,}125;\ a_5 = 0{,}165.$$

Імовірності розподілу на окремих ділянках визначатимемо за умови, що всі вони однакові й дорівнюють $\frac{1}{n-1}$. Тоді легко знайти відповідні значення щільності розподілу на кожній із п’яти ділянок:

$$f_1 = 5; \quad f_2 = 10; \quad f_3 = 20; \quad f_4 = 10; \quad f_5 = 5.$$

Вид розподілу подано на рис. 3.9.

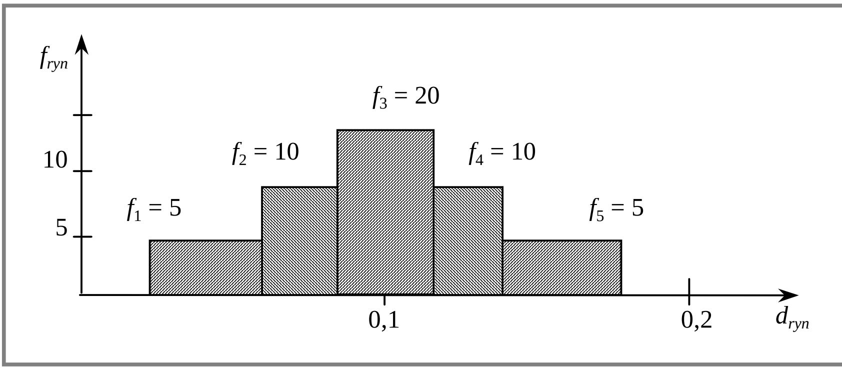


Рис. 3.9. Інтервально-рівномірний закон розподілу частки на ринку (другий варіант)

Отже, для другого варіанта частка підприємства на ринку характеризується значним ступенем невизначеності й зумовленого цим ризику. Випадкова величина цієї частки нерівномірно розподілена в діапазоні від 0,035 до 0,165.

Для третього варіанта відомо, що кількість граничних точок *n* дорівнює шести (діапазон складається з п’яти ділянок). Середнє значення (математичне сподівання) цієї випадкової величини нехай, як і в попередніх варіантах, становить 0,1. Граничні точки розташовані асиметрично відносно математичного сподівання. Відомі такі значення їхніх координат:

$$a_0 = 0{,}035; \; a_1 = 0{,}075; \; a_2 = 0{,}095; \; a_3 = 0{,}105; \; a_4 = 0{,}155; \; a_5 = 0{,}255.$$

Щільності розподілу на кожній із п’яти ділянок становлять відповідно:

$$f_1 = 5; \; f_2 = 10; \; f_3 = 20; \; f_4 = 4; \; f_5 = 2.$$

Дані щодо цих трьох варіантів стосовно частки підприємства на ринку можна подати таблицею (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

ПАРАМЕТРИ ЧАСТКОВО-РІВНОМІРНИХ РОЗПОДІЛІВ

Номер варіанта	Кількість точок	Координати точок (межі ділянок)					
		1	2	3	4	5	6
1	2	0,099	0,101	—	—	—	—
2	6	0,035	0,075	0,095	0,105	0,125	0,165
3	6	0,035	0,075	0,095	0,105	0,155	0,255

Результати моделювання подані в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3

РЕЗУЛЬТАТИ МОДЕЛЮВАННЯ

Номер варіанта	m_{prof}	σ_{prof}	G_{prof}
1	164,6	27,2	129,8
2	165,2	90,8	49,0
3	205,1	150,9	11,9

Аналіз даних табл. 3.3 показує, що зі збільшенням невизначеності та зумовленого цим ступеня ризику щодо частки підприємства на ринку гарантований прибуток зменшується через більший розкид (варіацію) випадкової величини прибутку.

Якщо відсутня додаткова інформація, то кращим є перший варіант. Можливі й інші стратегії прийняття рішення в умовах ризику.

3.6. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Послідовність розроблення математичних імітаційних моделей.
2. Поясніть функціонування генератора випадкових чисел з рівномірним розподілом.
3. Моделювання повної групи несумісних подій.
4. Способи моделювання дискретної випадкової величини.
5. Способи моделювання випадкових величин з нормальним розподілом.
6. Моделювання випадкових величин з обмеженим нормальним розподілом.
7. Моделювання випадкових величин з довільним розподілом.

8. Теоретичні засади статистичного моделювання економічних систем.
9. Дати означення імітаційного моделювання. Пояснити його сутність.
10. Інструменти, що їх надає ППП EXCEL для проведення імітаційних експериментів.

3.7. Теми рефератів

1. Побудова імітаційної моделі управління запасами.
   (До вихідних змінних належать такі величини:
   - середній добовий попит і середньоквадратичне відхилення добового попиту;
   - середній час постачання додаткової партії товару і його середньоквадратичне відхилення;
   - вартість зберігання одиниці товару на складі протягом доби;
   - вартість витрат на постачання одиниці товару;
   - витрати, пов'язані з дефіцитом кожної одиниці товару;
   - початковий рівень запасу товару;
   - період роботи складу;
   - критичний рівень запасу товару, за якого адміністратор складу має замовляти нову партію.)
2. Побудова імітаційної моделі прийняття рішень з використанням кількох критеріїв.
3. Побудова імітаційної моделі руху фондів на підприємстві.
4. Побудова імітаційної моделі управління фінансовими потоками комерційного банку.
5. Побудова імітаційної моделі формування раціональної структури джерел фінансування інвестицій.
6. Побудова імітаційної моделі оцінки ефективності лізингу.
7. Побудова імітаційної моделі вексельного обігу.
8. Імітаційне моделювання ризиків інвестиційних проектів.

3.8. Завдання для самостійної роботи

1. Випадкова похибка дохідності цінного папера «А» становить ± 10 %. Теоретично її можна розглядати як випадкову величину X, що має рівномірний закон розподілу.

А. Провести імітаційне моделювання значень випадкової величини X (100 прогонів).

Б. Визначити її математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення.

2. Фірма розглядає інвестиційний проект виробництва продукту «**Т**». Менеджери фірми вважають, що найсуттєвіший вплив на реалізацію проекту здійснює обсяг випуску *Q*, змінні витрати *V* і ціна *C*. Наближені діапазони змін цих параметрів (ключових параметрів) наведено в таблиці:

КЛЮЧОВИЙ ПАРАМЕТР ПРОЕКТУ (ціни у грн)

Показник	Сценарій		
	песимістичний	оптимістичний	імовірний
Обсяг випуску (*Q*)	800	1800	1400
Ціна за штуку (С)	20	50	30
Змінні витрати (*V*)	40	15	20

Значення решти параметрів і змінних можна вважати постійними (детермінованими).

ДЕТЕРМІНОВАНІ ПАРАМЕТРИ ПРОЕКТУ

Показник	Значення показника
Постійні витрати (*F*)	3000
Амортизація (*A*)	2000
Податок на прибуток (*T*)	40 %
Норма дисконту (*r*)	10 %
Термін проекту (*n*)	5
Початкові інвестиції (I_0)	30 000

Вважається, що за критерій обрано чисту приведену (теперішню) вартість проекту **NPV** (Net Present Value):

$$\text{NPV} = \sum_{t=1}^{n} \frac{NCF_t}{(1+r)^t} - I_0\,, \qquad (1)$$

де NCF_t — обсяг чистого потоку надходжень за період *t*;

З метою спрощення вважатимемо, що згенерований проектом потік оплат має вигляд ануїтету, тобто $NCF_t = NCF$ для будь-якого *t* і може визначатися з виразу:

$$NCF = [Q(C - V) - F - A](1 - T) + A\,. \qquad (2)$$

Потрібно провести аналіз власного ризику проекту (100 імітаційних прогонів) з використанням відповідних функцій ППП EXCEL.

3. Припустимо, що для ключових параметрів з попереднього прикладу встановлені експертні оцінки ймовірностей сценаріїв та отримані такі значення.

КЛЮЧОВІ ПАРАМЕТРИ ПРОЕКТУ

Показник	Сценарій			
	поганий $P = 0{,}15$	песимістичний $P = 0{,}1$	оптимістичний $P = 0{,}5$	імовірний $P = 0{,}5$
Обсяг випуску (Q)	1000	800	1800	1400
Ціна за штуку (С)	30	20	50	40
Змінні витрати (V)	30	40	15	20

А. Провести аналіз власного ризику проекту (100 імітацій) на підставі використання генератора випадкових чисел.

Б. Здійснити статистичний аналіз взаємозалежності між ключовими змінними.

В. Перевірити гіпотезу щодо нормального закону розподілу вихідних даних і отриманих результатів.

4. Розв’язати попередній приклад, припустивши гіпотезу щодо дискретного розподілу значень ключових змінних.

5. Час, упродовж якого інспектор податкової служби перевіряє квартальний звіт (t), є випадковою величиною, розподіленою відповідно до закону Вейбула. Середній час, що витрачається на перевірку, дорівнює $\bar{t} = 20$ хв. Коефіцієнт варіації величини t дорівнює $CV_t = 0{,}52$. Необхідно змоделювати для заданих умов випадкове число t (кількість прогонів дорівнює 10).

6. Періодичність перевірки підприємств податковою інспекцією — випадкова величина (Δt), яка має закон гама-розподілу. Середній інтервал перевірки становить $\overline{\Delta t} = 2{,}5$ місяця. Коефіцієнт варіації величини Δt дорівнює $CV = 0{,}38$. Треба змоделювати для заданих умов можливі моменти перевірок підприємства податковою інспекцією (число прогонів узяти рівним 10).

7. Використовуючи умови попередньої задачі, визначити кількість перевірок податковою інспекцією за перший рік роботи підприємства.

4

РОЗДІЛ

ПРИКЛАДНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

4.1. ОРГАНІЗАЦІЯ РЕКЛАМНОЇ КАМПАНІЇ

Нехай деяка фірма (підприємство, установа) починає рекламувати новий товар чи послугу. Ясно, що прибуток від майбутнього продажу повинен перекривати витрати на цю кампанію. Ясно також, що спочатку витрати можуть перевищувати прибуток, бо лише невелика частка потенційних покупців буде інформована щодо новинки. Згодом, у міру збільшення обсягів продажу, можна вже розраховувати на помітний прибуток, і, врешті, настане момент, коли ринок насититься, і надалі рекламувати товар не буде сенсу.

Модель рекламної кампанії ґрунтується на таких основних гіпотезах. Розглядається величина dN/dt — швидкість зміни в часі кількості споживачів, котрі дізналися про товар і мають намір і кошти купити його (t — час, що минув з початку рекламної кампанії), $N(t)$ — кількість уже поінформованих клієнтів. Вважається, що dN/dt пропорційна кількості покупців, які ще не знають про цей товар (послуги), тобто величині

$$\alpha_1(t)\ (N_0 - N(t)),$$

де N_0 — загальна кількість потенційних платоспроможних покупців, $\alpha_1(t) > 0$ характеризує інтенсивність рекламної кампанії (що фактично визначається витратами на рекламу в даний момент часу).

Припускається також, що ті, хто дізнався про товар, так чи інакше поширюють отриману інформацію серед необізнаних, виступаючи в ролі додаткових рекламних «агентів» фірми. Їхній внесок дорівнює величині

$$\alpha_2(t)(N(t)(N_0 - N(t))).$$

Він буде тим більшим, чим більша кількість агентів. Величина $\alpha_2(t) > 0$ характеризує ступінь спілкування покупців між собою (вона може бути встановлена опитуванням).

У результаті отримаємо рівняння

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)](N_0 - N(t)). \qquad (4.1)$$

Якщо $\alpha_1(t) >> \alpha_2(t)\ N(t)$, то з (4.1) отримаємо модель типу моделі Мальтуса (див. розд. 2, п. 16), якщо ж $\alpha_1(t) << \alpha_2(t)\ N(t)$, — рівняння логістичної кривої (див. розд. 2, п. 18).

Аналогія є цілком зрозумілою, бо в побудові даної моделі та моделі зростання чисельності популяції використовувалася та сама ідея «насичення»: швидкість зростання в часі деякої величини пропорційна добутку поточного значення цієї величини $N(t)$ на різницю $((N_0 - N(t))$ між її рівноважним (популяція) чи граничним (покупці) й поточним значеннями.

Аналогія між обома процесами закінчується, якщо в деякий момент часу величина стає нульовою чи навіть від'ємною (для цього необхідно, щоб один чи обидва коефіцієнти $\alpha_1(t)$, α_2 стали від'ємними). Подібний негативний ефект досить часто зустрічається в рекламних кампаніях і повинен націлювати їх організаторів на те, щоб чи змінити характер реклами, чи зовсім відмовитися від неї. Заходи з метою збільшення популярності товару можуть залежно від значень величин спрямовуватися на поліпшення результатів як прямої, так і опосередкованої реклами.

Модель (4.1) не має розв'язків, що дорівнюють нулеві в кінцевий момент часу. Якщо розглянути модель (4.1) в околі точки $N(t = 0) = N(0) = 0$ ($t = 0$ — момент початку рекламної кампанії), вважаючи, що $N << N_0$, $\alpha_2(t)N << \alpha_1(t)$, то рівняння (4.1) набере вигляду:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1(t) N_0,$$

а його розв'язок —

$$N(t) = N_0 \int_0^t \alpha_1(t) dt, \tag{4.2}$$

що задовольняє, природно, початкову умову, якщо $t = 0$.

З (4.2) відносно легко вивести співвідношення між рекламними витратами та прибутком з початку рекламної кампанії.

Позначимо через p величину прибутку від одиничного продажу, якою б вона була без витрат на рекламу. Припустимо для спрощення, що кожен покупець купує лише одну одиницю товару. Коефіцієнт $\alpha_1(t)$ за своїм змістом означає кількість рівнозначних рекламних дій в одиницю часу (наприклад, розміщення однакових афіш). Через s позначимо вартість (ціну) елементарного акту реклами. Тоді сумарний прибуток дорівнюватиме:

$$P = pN(t) = pN_0 \int_0^t \alpha_1(t) dt, \tag{4.3}$$

а витрати —

$$S = s\int_0^t \alpha_1(t)dt.$$

Прибуток перевищує витрати на рекламу за умови $pN_0 > s$, і коли реклама є дієвою й недорогою, а ринок досить місткий, то виграш досягається з перших же кроків кампанії (в дійсності між оплатою реклами, рекламною дією й наступною купівлею має місце *лаг* — затримка в часі, котра може бути врахована лише в більш деталізованих моделях). У випадку не дуже ефективної чи дорогої реклами фірма із самого початку несе збитки. Але це не привід, щоб відмовитися від реклами. Справді, вираз (4.3) та отримана на його підставі умова $pN_0 > s$ справедливі лише за малих значень $N(t)$, коли функції P та S зростають у часі за однаковими законами. Зі збільшенням $N(t)$ відкинуті в (4.1) складові стають помітними, зокрема, посилюється дія опосередкованої реклами. Тому функція $N(t)$ може стати «швидшою» функцією часу, ніж у формулі (4.3). Цей нелінійний ефект у зміні величини $N(t)$ за незмінного темпу зростання витрат дає можливість відшкодувати фінансову невдачу початкової стадії рекламної кампанії.

Пояснимо це твердження на частковому випадку рівняння (4.1) з постійними коефіцієнтами α_1, α_2.

Виконаємо заміну змінних:

$$\overline{N} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + N.$$

Тоді (4.1) зводиться до логістичного рівняння

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = \alpha_2 \overline{N}\,(\overline{N}_0 - \overline{N}),\ \ \overline{N}_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + N_0, \tag{4.4}$$

яке має розв’язок

$$\overline{N}(t) = \overline{N}_0\left[1 + (\overline{N}_0\alpha_2 / \alpha_2 - 1)\exp(-\overline{N}_0\alpha_2 t)\right]^{-1}. \tag{4.5}$$

Тут $\overline{N}(0) = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$, отже, $N(0) = 0$, і початкова умова виконується.

З (4.4) видно, що похідна функції $\overline{N}(t)$ і, отже, функція $N(t)$ за умови $t > 0$ може бути більшою, ніж її початкове значення (за умови, що $\overline{N}_0 > 2\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ чи $N_0 > \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$). Максимум похідної по $\overline{N}$ досягається, коли $\overline{N} = \dfrac{\overline{N}_0}{2}$, $N = \left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} + N_0\right)/2$:

$$\left(\frac{d\overline{N}}{dt}\right)_{\max} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{\max} = \alpha_2 \frac{\overline{N}_0^2}{4} = \alpha_2 \frac{(\alpha_1 / \alpha_2 + N_0)^2}{4}.$$

У цей період поточного, тобто отримуваного в одиницю часу прибутку, маємо:

$$P_{\max} - p\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\max} = p\,\alpha_2 \frac{(\alpha_1 / \alpha_2 + N_0)^2}{4}.$$

Віднімаючи від $P_{\max}$ початковий поточний прибуток

$$P_0 = p\left(\frac{d\overline{N}}{dt}\right)_{t=0} = p\,\alpha_1 N_0\,,$$

отримаємо:

$$P_{\max} = P_0 = p\,\frac{\left(\alpha_1 / \sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2}\,N_0\right)^2}{4},$$

тобто різниця між початковим і максимальним поточним прибутками може бути досить значною. Сумарний (інтегральний) економічний ефект від кампанії (його необхідною умовою є, очевидно, виконання нерівності $P_{\max} = p\,\frac{\left(\alpha_1 / \sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2}\,N_0\right)^2}{4} > \alpha_1 S$), визначається всім її перебігом, характеристики котрого обчислюються з (4.4), (4.5) за допомогою квадратури (інтегрування).

Як випливає з (4.4), починаючи з деякого моменту рекламування стає невигідним. Дійсно, коли $\overline{N}(t)$ наближається до $\overline{N}_0$, рівняння (4.4) можна записати у вигляді:

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = \alpha_2 \overline{N}_0 (\overline{N}_0 - \overline{N}). \qquad (4.6)$$

Його розв’язок прямує до граничного значення $\overline{N}_0$ за умови $t \to 0$ (а функція $N(t) \to N_0$) згідно з повільним експоненційним законом. В одиницю часу з’являється надто мала кількість нових покупців, і одержуваний прибуток за будь-яких умов не може перекрити додаткових витрат.

Аналогічні характеристики обчислюються для рівняння (4.1) та різних його узагальнень, що широко використовуються також для опису впровадження технологічних та інших новацій. Наведений вище аналіз стосується низки актуальних задач мікроекономічного рівня.

4.2. ВЗАЄМОЗАЛІК БОРГІВ ПІДПРИЄМСТВ

Будь-яка досить значна за своїми масштабами економічна система містить у собі десятки тисяч підприємств (фірм, корпорацій тощо), які обмінюються між собою товарами та послугами. Навіть дрібна фірма, що має відносно невелику кількість партнерів, опосередковано поєднана (через зв'язки прямих та опосередкованих партнерів) з величезною кількістю підприємств, що утворюють систему, і її процвітання безпосередньо залежить від їхнього стану.

Взаємозалежність усіх ланок економічної системи добре проявляється через проведення розрахунків між підприємствами за поставлену продукцію. Отримавши від своїх клієнтів виручку за товар, підприємство витрачає її на закупівлю сировини та обладнання в інших фірм, на заробітну плату (тобто на купівлю робочої сили), на рекламу тощо, що є необхідним для його нормального функціонування. Отже, в економічний обіг залучається велика кількість партнерів даного підприємства.

Насправді ж між постачанням товару та оплатою за нього завжди існує затримка в часі. Її мінімальне значення визначається суто технічними причинами, бо потрібен певний час на транспортування та розфасування товару, здійснення банківських операцій тощо.

Однак можливі ситуації, коли з якихось економічних, фінансових, соціальних, психологічних, політичних та інших причин час затримки сплати (постачання) стає порівнянним з часом обігу фінансів, а абсолютне значення (обсяг) невиконаних сплат чи поставок — порівнянним з обсягом вільних обігових коштів підприємства. У цьому разі виникає так звана *криза несплат*, котра може спричинити кризу всієї економічної системи.

Підприємство, що не отримало гроші за поставлену продукцію (чи заплатило за товар, але не отримало його), не в змозі розрахуватися зі своїми постачальниками (оскільки обсяг його боргів рівний чи перевищує обсяги його вільних коштів). У свою чергу постачальники не розраховуються зі своїми клієнтами, ті — зі своїми і так далі. Виникають довгі ланцюжки несплат, що пронизують усю систему. Вони, очевидно, можуть складатися з N ланок, а загальна кількість їх досягає числа близько $N!$ (N — кількість підприємств).

Пояснимо сутність проблеми на простому числовому прикладі для системи, що складається з трьох підприємств, кожне з яких має вільні кошти, що дорівнюють одній фінансовій умовній одиниці, а основні фонди дорівнюють 10 одиницям. Нехай перше підприємство винне другому 100 одиниць, друге винне третьому 100 одиниць, а третє — першому також 100 одиниць. Сумарний абсолютний борг підприємств дорівнює 300 одиницям і порівняно з їхніми фондами (30 одиниць) є величезним. У той же час фінансовий стан цієї системи є непоганим, оскільки сумарний «борг» кожного підприємства, окремо взятого, дорівнює нулеві. Очевидно, процедура взаємозаліку полягає в одномоментному анулюванні (погашенні) усіх боргів: оголошується, що ніхто нікому не винен, і партнери продовжують функціонувати, будучи вільними від боргового тягаря.

Подібну операцію, виконану «вручну», неможливо, звичайно ж, реалізувати для великої кількості підприємств. Необхідні більш глибокі підходи, для розгляду котрих треба формалізувати задачу.

Нехай економічна система складається з N підприємств, які можуть мати взаємні борги. Позначимо борги n-го підприємства m-му підприємству через x_{nm}, де $1 \le n$, $m \le N$ ($x_{nn} < 0$, якщо перше підприємство (n) винне другому (m), і $x_{nm} > 0$ — у протилежному випадку). Ясно, що

$$x_{nm} = - x_{nm}, \quad x_{nn} = 0,$$

тобто сукупність боргів описується кососиметричною матрицею розмірності $N \times N$ з нульовою діагоналлю ($x_{nn} = 0$, бо підприємство не може бути винне само собі). Сума всіх взаємних боргів обчислюється за формулою:

$$X = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} | x_{nm} |. \quad (4.7)$$

Величина X (4.7) є однією з інтегральних кількісних характеристик фінансового стану системи, якщо вона має порядок, однаковий із сумою всіх вільних коштів підприємства (X_0), тобто:

$$X \ge X_0 = \sum_{n=1}^{N} x_n . \quad (4.8)$$

Ситуація, що описується нерівністю (4.8), власне, означає кризу несплат (тут $x_n \ge 0$ — індивідуальні власні засоби підприємств).

Ще однією важливою характеристикою є баланс кредитів і боргів (сальдо) кожного підприємства:

$$S_n = \sum_{m=1}^{N} x_{nm} . \quad (4.9)$$

Зазначимо, що, як видно з (4.9), можливими є варіанти $S_n > 0$; $S_n < 0$; $S_n = 0$. Якщо $S_n > 0$, то підприємство в певному розумінні є кредитором підприємств-боржників, тобто тих, у кого $S_n < 0$ (якщо $S_n = 0$, то таке підприємство вважається «нейтральним» щодо боргів). Якщо $|S_n| < x_n$, то індивідуальний фінансовий стан підприємства є, по суті, нормальним, оскільки його реальні сумарні борги (чи кредити) менші, ніж його вільні засоби (кошти). Аналогічно сумарне абсолютне сальдо системи

$$S = \sum_{n=1}^{N} |S_n| \qquad (4.10)$$

є макропоказником її можливого фінансового «здоров'я». Якщо $S < X_0$, то вільних коштів у системі більше, ніж дійсних боргів, і потенційно вона може успішно функціонувати. Між величинами X та S завжди існує певне співвідношення. Для будь-якої довільної матриці боргів виконується нерівність:

$$X \geq S, \qquad (4.11)$$

тобто сумарний борг не може бути меншим за сумарне сальдо.

Завдання щодо погашення взаємних боргів полягає в тому, щоб, знаючи матрицю X, відшукати матрицю «нових» боргів X', для котрої б виконувалася умова $X' < X$. Очевидно, що ідеальним її розв'язком був би такий, щоб $X' = S$, тобто щоб нерівність (4.10) стала рівнянням. Зазначимо, що тоді для такої, що є безпечною по суті, системи з $S \leq X_0$ виконувалось би співвідношення $X' = S \leq X_0$, і після взаємозаліку вона могла б нормально функціонувати (хоча зменшення обсягів X у будь-якому випадку є сприятливим).

Будуючи математичну модель процедури взаємозаліків, використовуватимемо низку операцій. Перша — це відмова, на певному етапі, від детального розгляду множини індивідуальних боргів і відповідних зв'язків між підприємствами. Перехід з мікрорівня на макрорівень.

Зазначимо, що процедура моніторингу ланцюжків для N підприємств має принциповий недолік. Розгляньмо спочатку ланцюжок, у якому кожне підприємство з першого до M-го ($M \leq N$) винне іншому однакову суму, і таку ж суму винне M-те підприємство першому (рис. 4.1).

Ланцюжок є замкненим, і розв'язок є очевидним — усі борги в ланцюжку погашаються. Нехай тепер M-те підприємство не винне нічого 1-му (рис. 4.2).

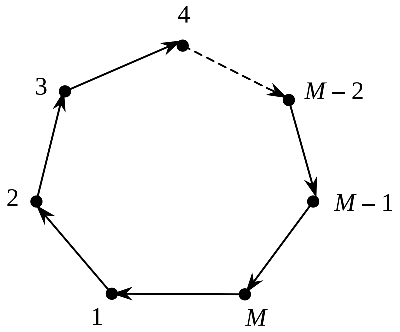


Рис. 4.1

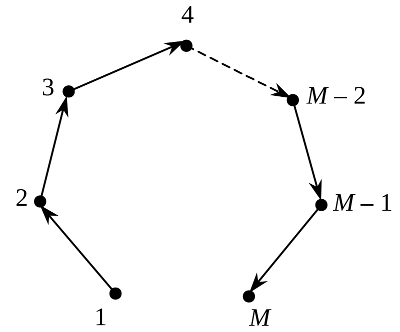


Рис. 4.2

Ланцюжок розімкнений, і цей метод є непридатним. У той же час просте рішення полягає в тім, що борги підприємств з другого до (*M* – 1)-го не анулюються, а борг першого переадресовується *M*-му (рис. 4.3).

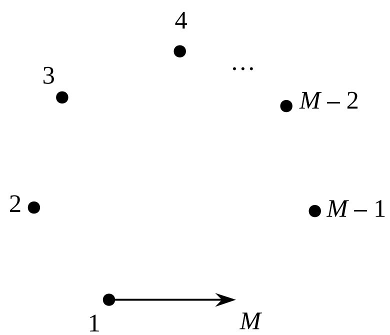


Рис. 4.3

Економічний сенс переадресації відповідає суті вексельного обігу, коли боргове зобов'язання змінює своїх хазяїв, і в результаті у боржника (перше підприємство) з'являється новий кредитор (*M*-не підприємство).

На відміну від ситуації з боргами в ланцюжках повна система боргів по всіх ланцюжках є замкненою, бо розглядаються взаємні борги. Справді, з властивості $x_{nm} = -x_{mn}$ маємо, що

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} x_{nm} = 0$$

для будь-якої сукупності несплат. Враховуючи, що $S_n = \sum_{m=1}^{N} x_{nm}$, з останнього рівняння дістаємо

$$\sum_{n=1}^{N} S_n = 0, \qquad (4.12)$$

або сума додатних сальдо підприємств дорівнює за абсолютною величиною сумі від'ємних сальдо, тобто

$$\sum_{S_n>0} S_n = -\sum_{S_n<0} S_n = \frac{S}{2}. \qquad (4.13)$$

Отже, якщо розглядати на макроекономічному рівні систему взаємних боргів, то вона має властивість «симетричної консервативності».

Рівняння (4.13) пояснює структуру для побудови математичної моделі ідеального взаємозаліку, який відбувається за таких умов:

1) усі борги x_{nm} відомі й визнаються підприємствами;

2) після проведення взаємозаліку сальдо підприємств S_n залишаються незмінними: $S'_n = S_n$, тобто індивідуальний фінансовий стан кожного з них не змінюється;

3) частина боргів x_{nm} списується, а частина переадресовується, тобто у підприємств можуть як з'явитися нові боржники та кредитори, так і частково зникнути старі.

Зміст макропроцедури взаємозаліку полягає в тому, що замість величин x_{nm} розглядаються величини S_n. Підприємства з $S_n < 0$ оголошуються боржниками (в обсязі свого сальдо), а підприємства з $S_n > 0$ — кредиторами (в тих самих обсягах). Після цього борги підприємств з $S_n < 0$ певним чином розподіляються між кредиторами, тобто будується нова система боргів x_{nm}. У цьому разі виконується друга умова і досягається рівність $X' = S$, тому розв'язок задачі якоюсь мірою є раціональним. Таких розв'язків, взагалі кажучи, може бути багато, бо розподіляти борги між кредиторами можна різними способами. Наведемо два найпростіших.

Перший можна подати за допомогою формули, згідно з якою нові борги обчислюються через старі:

$$x'_{nm} = \frac{S_n|S_m| - S_m|S_n|}{S}. \qquad (4.14)$$

Згідно з (4.14) борг будь-якого підприємства (обсяг якого S_n, якщо $S_n < 0$) між підприємствами-кредиторами розподіляється у частках, пропорційних обсягам їхнього сальдо (що дорівнюють S_m, якщо $S_m > 0$). Підприємству, що має більше за обсягом позитивне сальдо, нараховується від кожного з боржників більша частка його боргів, у сумі вони дають величину S_m. Для підприємств із нульовим сальдо взаємозалік зводиться до погашення всіх їхніх боргів і всіх боргів їм. Зазначимо, що в (4.14) для нових боргів маємо x'_{nm}, коли $S_n < 0$, $S_m < 0$ чи коли $S_n > 0$, $S_m > 0$ (після взаємозаліку боржники не винні боржникам, а кредитори — кредиторам). Це означає, що кількість отриманих фінансових зв'язків між підприємствами значно менша за максимально можливу, коли кожне підприємство є одночасно і боржником, і кредитором будь-якого іншого, а матриця боргів не має нульових елементів (окрім, звичайно, діагональних).

Другий спосіб ґрунтується на тому, що кількість зв'язків може бути значно зменшена, якщо провести попереднє впорядкування підприємств згідно з абсолютними значеннями їхніх сальдо та встановити безпосередні зв'язки між боржниками й кредиторами одного масштабу (великі з великими, малі з малими). Ця процедура допускає просту геометричну інтерпретацію. На рис. 4.4 на верхній прямій лінії описано розподіл сальдо кредиторів (у спадній послідовності). Довжина відрізків цієї прямої дорівнює обсягові сальдо кожного підприємства $S_p > 0$, $1 < p < N$, а її загальна довжина, очевидно — $S/2$.

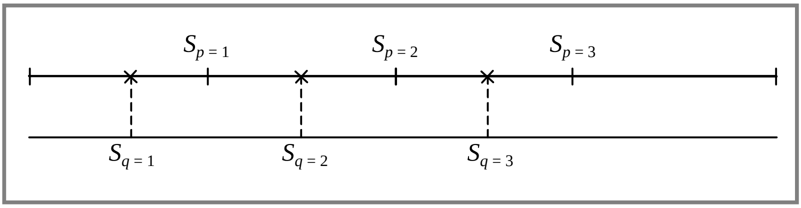


Рис. 4.4

На нижній прямій описано розподіл сальдо боржників $S_q < 0$, $1 < q < N$, $p + q \leq N$ (сальдо взяті з оберненим знаком) також у спадній послідовності. Її довжина згідно з (4.13) також дорівнює $S/2$. Штрихові лінії, що проведені з вузлів нижньої прямої, поділяють «пряму кредиторів» на q відрізків, що дорівнюють обсягам боргу кожного підприємства. Цей борг або дістається одному кредиторові, або ділиться між кількома відповідно до розташування вузлів верхньої прямої відносно даного відрізка.

Описаний алгоритм є раціональним за критерієм $X' = S$ і, очевидно, оптимальним за кількістю зв'язків, що залишилися після взаємозаліку.

Приклад взаємозаліку в системі з $N = 10$ і початковою матрицею боргів з 90 ненульовими недіагональними елементами наведено в таблиці 4.1. Кінцева матриця містить лише 14 ненульових елементів. У спеціальних випадках в одного боржника залишається один кредитор, і навпаки.

Таблиця 4.1

ПРИКЛАД ВЗАЄМОЗАЛІКУ В СИСТЕМІ З *N* = 10 І ПОЧАТКОВОЮ МАТРИЦЕЮ БОРГІВ З 90 НЕНУЛЬОВИМИ НЕДІАГОНАЛЬНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

№ з/п	1	2	3	4	6	6	7	8	9
Початкова матриця (*X* = 3729)									
2	25								
3	–1	–20							
4	4	25	–2						
5	25	–450	25	30					
6	–15	150	–30	20	–928				
7	3	–40	3	3	5	25			
8	1	–22	–2	–2	4	–15	5		
9	10	322	–15	–25	498	–800	–10	20	
10	1	–25	–2	1	–20	15	–1	–3	30
Кінцева матриця (*X’* = *S* = 62)									
2	2								
3	0	0							
4	0	0	0						
5	0	0	0	0					
6	0	0	0	0	–28				
7	1	0	0	0	0	0			
8	0	–7	0	0	0	0	0		
9	0	–18	0	0	–2	0	0	0	
10	0	0	0	0	0	4	0	0	0

Зазначимо, що наведені та інші процедури взаємозаліку мають сенс лише за виконання умов 1—3, тобто коли є відповідна угода між підприємствами. Причини, що не дозволяють дотримуватися даної угоди, можуть бути досить різноманітними — від небажання сплачувати борги, тому що це вигідно боржникові, до наслідків санкцій міжнародних чи інших організацій, коли фінансові кошти підприємств «заморожуються».

4.3. МОДЕЛЬ ОЦІНЮВАННЯ РИНКОВОЇ ВАРТОСТІ ПІДПРИЄМСТВА

4.3.1. Загальні аспекти

Проблема оцінювання майна підприємств набула особливої актуальності у зв'язку з їх приватизацією, передачею в оренду, створенням спільних підприємств тощо. Важливо оцінити майно під час підрахунку національного багатства, перебудови податкової системи. У країнах з розвинутою ринковою економікою стягуються податки на капітал (майно) у різноманітних формах. Крім того, у зв'язку з динамікою майна його потрібно весь час переоцінювати. Тому переоцінювання є не разовою, а постійною процедурою.

Приймаючи рішення про купівлю об'єкта (підприємства) та його пристосування для ведення тієї чи іншої діяльності, підприємець (покупець, інвестор) оцінює майбутні доходи від функціонування об'єкта, загальний (інтегральний) дисконтований дохід і порівнює його зі своїми інтегральними дисконтованими капітальними вкладеннями.

Важливим етапом у таких розрахунках є визначення норми дисконту R, за допомогою якої порівнюються різночасові витрати та доходи. Під нормою дисконту мають на увазі очікувану норму віддачі на альтернативні та доступні на ринку інвестиційні можливості з урахуванням ризику. Часто знаходять величину R додаванням норми безризикової віддачі (наприклад, норми річного доходу за державними цінними паперами) і так званої премії за ризик.

Фінансисти постійно розв'язують завдання визначення теперішньої вартості грошових засобів (Present Value — PV) та їхньої майбутньої вартості (Future Value — FV), тобто вартості грошей з урахуванням доданих відсоткових виплат. Зміст фінансових розрахунків зводиться до того, щоб за відомою теперішньою вартістю грошових ресурсів визначити майбутні розміри виплат, і навпаки — за відомими майбутніми доходами обчислити теперішню вартість ресурсів.

У першому випадку на теперішню вартість нараховується відсоткова ставка, у другому — з майбутньої вартості відраховується (віднімається) дисконтна (облікова) ставка.

Для підрахунку майбутньої вартості існує проста формула:

$$\mathrm{FV} = K(1 + R)^n, \qquad (4.15)$$

де K — початкова сума; R — річна ставка відсотка; n — кількість років.

У свою чергу, теперішню вартість грошей визначають за формулою

$$\text{PV} = \frac{F}{(1+R)^n}, \quad (4.16)$$

де F — майбутній дохід, що надійде через n років; R — річна ставка дисконту; n — кількість років.

Обчислити PV та FV нескладно.

Рекомендуємо визначити, наприклад, ту суму грошей, яку фірма має покласти до банку, коли ставка складного відсотка є 12 % річних, щоб через 15 років зняти з рахунка 100 тис грн, потрібних, скажімо, для купівлі нового обладнання.

Відповідь: 18 270 грн.

Проте набагато частіше фінансовому менеджерові доводиться вирішувати складніші проблеми. Є випадки, коли він змушений визначити теперішню вартість ануїтету (Annuit) — послідовності виплат за певні регулярні проміжки часу. Ануїтетом можуть бути виплати (або інвестиції) щорічні, щопіврічні, щоквартальні, щомісячні. Кожну окрему виплату, що входить до складу ануїтету, називають його членом. Теперішню вартість річного ануїтету можна обчислити за формулою

$$\text{PV} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{(1+R)^i}, \quad (4.17)$$

де n — кількість років; F_i — суми, що виплачуються за i-й проміжок часу; R — ставка дисконту.

З'ясуємо, наприклад, що вигідніше: одержати 50 тис. грн відразу чи протягом п'яти років, щороку по 12 тис. грн за умови, що річна ставка становить 10 %?

Насамперед потрібно визначити теперішню вартість ануїтету за формулою (4.17):

$$\frac{12\ 000}{(1+0{,}1)^1} + \frac{12\ 000}{(1+0{,}1)^2} + \frac{12\ 000}{(1+0{,}1)^3} + \frac{12\ 000}{(1+0{,}1)^4} + \frac{12\ 000}{(1+0{,}1)^5} = 454\ 929 \ \text{(грн).}$$

Виконавши обчислення, побачимо, що оскільки 50 000 > 45 492, то вигідніше одержати відразу 50 тис. грн готівкою, аніж протягом п'яти років щороку — по 12 тис. грн.

Для полегшення фінансових розрахунків широко використовують таблиці, де містяться значення відсоткового чинника теперішньої вартості ануїтету (PVIFA). Для того щоб підрахувати теперішню вартість ануїтету, достатньо лише перемножити величину виплат (якщо F_i однакові для всіх $i = 1, \ldots, n$) на значення обраного відсоткового чинника:

$$\text{PFA} = a \cdot \text{PVIFA},$$

де a — величина відсоткового чинника ануїтету. Так, у щойно розглянутому прикладі замість процедури підсумовування теперішньої вартості всіх п’яти членів ануїтету досить виконати таку операцію:

$$12\,000 \cdot 3{,}791 = 45\,492,$$

де 3,791 — відсотковий чинник теперішньої вартості ануїтету.

У розрахунках лімітних цін на майно підприємств важливу роль відіграє встановлення науково обґрунтованої норми (ставки) дисконту R, під якою розуміють норму доходу на альтернативні та доступні на ринку інвестиційні можливості з приблизно таким самим рівнем ризику. Це норма віддачі на вкладений капітал, яка може стимулювати інвесторів до відповідних внесків.

Існує просте правило: високий ризик означає високу ставку дисконту (капіталізації), малий ризик — низьку відповідну ставку.

Загалом для оцінювання дисконтних ставок використовують такі принципи:

1) з двох майбутніх надходжень вищу дисконтну ставку має те, що надійде пізніше;

2) чим нижчий сподіваний рівень ризику, тим нижчою має бути ставка дисконту;

3) якщо загальні відсоткові ставки на ринку зростають, зростатимуть і дисконтні ставки.

Інвестори нерідко визначають ставку дисконту R, додаючи до ставки (норми) безризикової віддачі R_j (наприклад, норми річного доходу за державними цінними паперами) так звану премію за ризик.

4.3.2. Спрощені моделі врахування ризику у величині норми дисконту

У літературі характеризують ризик як діяльність щодо прийняття рішень, пов’язану з подоланням невизначеності в ситуації неминучого вибору, в ході якої можна кількісно оцінити, зокрема, ймовірність досягнення очікуваного результату, невдачі та відхилення від мети.

Якщо спостерігається мінливість доходів, то чим більше коливаються (відхиляються) доходи, тим вищий ризик. Цю мінливість часто вимірюють за допомогою стандартного відхилення.

Зв'язок між величиною очікуваного доходу R і ступенем ризику обчислюється, зокрема, за формулою

$$R = R_j + k\sigma_p, \qquad (4.18)$$

де R_j — безпечна ставка доходу; σ_p — стандартне відхилення заданої комбінації цінних паперів з ризиковими та безризиковими активами.

Щоб виконувати математичні розрахунки рівня ризику, потрібно знати теорію ймовірностей, математичне моделювання та розуміти, як ризик портфеля цінних паперів і доходи поєднуються у своїй взаємозалежності. Розроблено також модель оцінювання капітальних активів (МОКА), тобто модель, що пов'язує прогнозований ризик зі сподіваними доходами від проекту.

МОКА поділяє ризик на дві складові: диверсифікований та недиверсифікований. Ідеться про тісний зв'язок між доходами окремих власників цінних паперів і загальними доходами ринку цінних паперів. Ці доходи, узяті окремо для акцій або для всього ринку, складаються з доходів від капітальних вкладень та дивідендів.

Науковці довели, що фондова біржа — високоефективний механізм, бо вона швидко поєднує всю наявну інформацію. Якщо це так, то мінливість ринку має загальний визначник для оцінювання рівня ризику (або мінливості) індивідуальних активів і цінних паперів. Цей рівень ризику визначається чутливістю доходів від акцій до ситуації на ринку. Рівняння, що спрощено відбиває залежність між дохідністю R та дохідністю ринку, має вигляд

$$R = \beta R_m + a + e, \qquad (4.19)$$

де β — коефіцієнт, що визначає міру чутливості або ризикованість акцій порівняно із загальною дохідністю ринку; R_m — дохідність ринку; a — деяка константа; e — значення помилки.

У більш спрощеній моделі МОКА величини a та e прирівнюються до нуля.

Зрозуміло, що МОКА дає змогу легко порівнювати ризикованість окремих акцій. Проте важливою передумовою є те, що дисперсія навколо лінії (4.19) не повинна бути великою. Якщо дисперсія велика, слід ураховувати додаткові елементи ризику, скористатися нелінійними моделями.

Модель лінії надійності ринку (ЛНР) показує, що необхідна величина дохідності активів складається з безпечної ставки та премії за ризик. Якщо оцінювати ризик за допомогою коефіцієнта β, то формулу для визначення необхідної дохідності акцій (ставки доходу) можна подати так:

$$R = R_j + \left(R_m - R_j\right)\beta,$$

де R_j — безпечна ставка; R_m — середня дохідність ринку; β — бета, або недиверсифіковуваний ризик.

Безумовною перевагою МОКА та ЛНР є простота. Це корисний інструмент для оцінювання цінних паперів, який дає змогу визначити необхідну ставку доходу (дисконтну ставку), а останню можна використати для знаходження теперішньої вартості цінних паперів.

Замість того щоб теперішню вартість сподіваних доходів знаходити за формулою

$$\mathrm{PV} = \frac{\mathrm{FV}_n}{(1 + R_j)^n}, \qquad (4.20)$$

доцільніше скористатися спрощеною залежністю

$$\mathrm{PV} = \frac{\mathrm{FV}_n}{[1 + R_j + (R_m - R_j)\beta]^n}, \qquad (4.21)$$

де FV_n — майбутня вартість сподіваних доходів; n — кількість років.

Зрештою, який би метод не застосовувався для врахування ризику — стандартне відхилення чи показник β, — обидва створюють підґрунтя для оцінювання активів.

МОКА та ЛНР не такі вже й бездоганні, можливі й інші суттєві чинники, що впливають на визначення ставки дисконту. Те саме стосується й використання статистичних рядів за певний період часу, тобто це не найкращий спосіб визначення сподіваних доходів.

4.3.3. Імовірнісна модель впливу чинників ризику[1]

Постановка задачі. Процес одержання доходу від функціонування об’єкта характеризується інтенсивністю (швидкістю) $x(t)$. Тоді дохід, одержуваний за досить малий інтервал часу $(t, t + dt)$, буде $x(t)dt$. Вважатимемо відомою інтенсивність одержання доходу $x(0) = X$ на початку функціонування об’єкта (у момент часу $t = 0$). На подальшу динаміку цього показника впливають дві групи чинників.

[1] *Смоляк С. А.* Учет риска при установлении нормы дисконта // Экономика и математические методы. — 1992. — Т. 28. — Вып. 5—6. — С. 794.

1. *Фізична зношуваність основних засобів.* Припустимо, що залежно від віку основних засобів дохід зменшується лінійно:

$$x(t) = X - bt\ . \tag{4.22}$$

Відомо, що об’єкт доцільно експлуатувати доти, поки дохід від нього не від’ємний. Тому в кінці терміну експлуатації (у рік T) має бути $x\ (T) = 0$. Звідси

$$X = bT \quad \text{або} \quad b = \frac{X}{T}. \tag{4.23}$$

2. *Різного роду випадкові чинники, що зумовлюють ризик використання об’єкта.* Якби їх впливу не було або він був неістотним, то за відомої норми дисконту дохід від функціонування об’єкта обчислювався б за формулою:

$$V = \int_0^T x(t)e^{-Rt}dt = \frac{X}{R} - \frac{b(1-e^{RT})}{R^2}. \tag{4.24}$$

Вважатимемо відомими (виокремимо) три типи випадкових чинників, що впливають на дохідність об’єкта: випадкові «збої» у виробництві; різкі зміни економічного середовища («катастрофи»); випадкові коливання цін, податків та обсягів попиту.

Щоб адекватно відобразити ці чинники в нормі дисконту R, потрібно виконати два варіанти розрахунку дохідності від розглядуваного об’єкта.

У першому, що використовує норму дисконту R, згадані випадкові чинники взагалі не беруться до уваги, а інтегральний дисконтований дохід оцінюється згідно з (4.24).

У другому, що спирається на «безризикову» норму R_j, ці чинники включаються безпосередньо у відповідну модель випадкового процесу зміни інтенсивності доходу.

Тоді значення норми дисконту R, яке враховує чинники ризику, доцільно зробити такими, щоб обидва варіанти розрахунків однаково оцінювали ефективність функціонування об’єкта.

Розгляньмо докладніше моделювання доходу з урахуванням перелічених чинників ризику.

Випадкові «збої» у виробництві. Нехай у момент t об’єкт характеризувався деякою інтенсивністю одержання доходу $x(t)$. Тоді протягом наступного малого інтервалу часу dt або відбудеться «збій» у виробництві з імовірністю ωdt, або об’єкт функціонуватиме «нормально» з імовірністю $1 - \omega dt$. Якщо «збій» відбувся, то на його усунення потрібен деякий час τ (вважатимемо цю величину малою, але не нескінченно малою), а також знадобляться додаткові витрати ξ, взагалі кажучи, випадкові.

Вважатимемо, що після цього виробництво повертається до свого попереднього стану, тобто «збій» не зменшує часу функціонування об’єкта.

«Катастрофи». Поряд з даним покупцем (власником об’єкта) той самий вид діяльності здійснюють інші підприємці. Може статися так, що хтось із них розробить новий ефективний спосіб (технологію) виробництва відповідної продукції, у зв’язку з чим ціна на продукцію різко впаде. Тоді подальше функціонування першого об’єкта вже не забезпечуватиме доходу, що для підприємця стане економічною катастрофою. Аналогічна ситуація можлива й тоді, коли істотно зміниться чинне податкове законодавство або політична ситуація в регіоні.

Нехай імовірність такої «катастрофи» в інтервалі $(t, t + dt)$ дорівнює kdt, де k — інтенсивність «катастроф», що не залежать від t. Оцінювати ймовірність таких ситуацій можливо лише експертно, з урахуванням результатів аналізу науково-технічного прогресу у відповідній виробничій галузі (підгалузі) і прогнозу економічної та політичної ситуації.

Оскільки величини k і τ — малі, «катастрофи» у період існування наслідків «збою» вважатимемо неможливими.

Коливання цін податків та обсягів попиту. Протягом періоду функціонування об’єкта ціни на продукцію, яка виготовляється, сировину, матеріали, комплектувальні вироби, а також обсяги попиту та ставки податку можуть змінюватися. Під впливом цих чинників інтенсивність одержуваного доходу також випадково коливатиметься. Якщо припустимо, що в момент оцінювання об’єкта були правильно визначені розміри доходу, то коливання інтенсивності $x(t)$, зумовлені групою розглянутих щойно чинників, матимуть нульове математичне сподівання, але характеризуватимуться певним розкидом (дисперсією). Природно сподіватися, що в малому інтервалі часу випадкові коливання $x(t)$ мають малу дисперсію, а інтенсивність $x(t)$ не залежить від розмірів таких коливань у попередні відрізки часу.

З огляду на це можна припустити, що ці коливання описуються моделлю вінерівського випадкового процесу, тобто що інтенсивність доходу в близькі моменти часу t і $t + dt$ задовольняє співвідношення

$$x(t + dt) = x(t) + \sigma d\omega(t), \qquad (4.25)$$

де σ — середньоквадратичне відхилення випадкових коливань інтенсивності доходу $x(t)$ за одиницю часу (середній квадрат таких коливань за час dt дорівнюватиме за цих умов $\sigma^2 dt$; $\omega(t)$ — звичайний вінерівський випадковий процес.

Математичне сподівання доходу в разі урахування чинників ризику. Позначимо через $V(x)$ значення математичного сподівання інтегрального дисконтованого доходу (за норми дисконту R_j) від експлуатації об'єкта до закінчення терміну його функціонування (випадкова величина). Нехай у початковий момент виробництво функціонувало «нормально», а інтенсивність одержуваного доходу була x. Очевидно, що $V(0) = 0$. Природно розглядати випадок, коли $x > 0$. Зауважимо, що для визначенні $V(x)$ не має значення, який, власне, момент часу брати за початковий. Це дає змогу дисконтувати доходи до моменту $t = 0$.

Розгляньмо малий інтервал часу $(0, dt)$. Тут можливі три ситуації.

1. З імовірністю $\omega\, dt$ станеться збій у виробництві. На усунення його наслідків знадобляться витрати (випадкова величина), дисконтована величина яких ξ. Виробництво нормалізується через випадковий проміжок часу τ (випадкова величина), після чого об'єкт перейде до нормального стану, якому відповідає математичне сподівання інтегрального дисконтованого доходу $V(x)$. У цьому разі різночасові доходи зводяться до часу повної ліквідації наслідків «збою». Якщо звести дохід до моменту $t = 0$, то величину $V(x)$ слід помножити на відповідний дисконтуючий коефіцієнт $e^{-R_j x}$.

За припущення, що час ліквідації «збою» випадковий і підлягає експоненціальному закону розподілу із середнім значенням θ, математичне сподівання M дисконтуючого коефіцієнта можна подати у вигляді

$$q = M\tau e^{-R_j\tau} e^{-(\tau/\theta)}(d\tau/\theta) = \frac{1}{(1+R_j\theta)}. \qquad (4.26)$$

Вважаючи, що додаткові витрати в процесі усунення наслідків збою відбуваються рівномірно, а їх величина за одиницю часу становить z, знайдемо математичне сподівання дисконтованих витрат, пов'язаних з одним «збоєм»:

$$C = M_\tau[\xi] = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\tau z e^{-R_j t} dt \right\} e^{-(\tau/\theta)} (d\tau/\theta) = z\theta(1+R_j\theta) = zq\theta. \qquad (4.27)$$

2. Упродовж інтервалу $(0, dt)$ часу з імовірністю kdt відбудеться економічна катастрофа. У такому разі виробництво зупиниться, а тому інтегральний дисконтований дохід від наступного функціонування об'єкта набуде нульового значення.

3. На інтервалі (0, dt) з імовірністю $1 - (\omega + k)dt$ об'єкт функціонуватиме «нормально». Тоді за час dt дохід становитиме $x(t)dt$, після чого інтенсивність його одержання зміниться на величину bdt за рахунок фізичного старіння основних засобів, а також згідно з (4.25) — на $\sigma d\omega(t)$ під впливом випадкових коливань цін і (або) податків. Тому в момент часу dt об'єкт характеризуватиметься інтенсивністю доходу $x - bdt + \sigma d\omega(t)$. Цьому відповідає інтегральний дисконтований (до моменту 0, а не $d(t)$) дохід, що дорівнює

$$V(x - bdt + \sigma d\omega(t)e^{-R_j dt}.$$

Ураховуючи ймовірність кожної з розглянутих ситуацій і той стан, у якому перебуває об'єкт після них, можна записати вираз для математичного сподівання інтегрального дисконтованого доходу від функціонування об'єкта:

$$V(x) = \omega dt M_{\xi}[-\xi + e^{-R_j \tau} V(x) + kdt] +$$
$$+ [1 - (\omega + k)dt] M_{\xi}[xdt + V(x - bdt + \sigma d\omega(t)e^{-R_j dt}].$$

З урахуванням (4.25), (4.27) це рівняння з точністю до малих величин порядку, вищого за перший, можна замінити таким:

$$V(x) = \omega dt M_{\xi}[-C + qV(x)] + xdt +$$
$$+ [1 - (\omega + k + R_j)dt] M_{\xi}[V(x) - bdt + \sigma d\omega(t))]. \quad (4.28)$$

Припустимо, що функція V досить гладка, і за умови $x > 0$ її друга похідна $V''(x)$ існує і є неперервною. Тоді, розклавши останній співмножник у ряд Тейлора і врахувавши, що величина $d\omega(t)$ має нульове значення математичного сподівання та дисперсію ϖdt, знайдемо:

$$V(x) = [-C + qV(x)]\omega dt + xdt + [1 - (\omega + k + R_j)dt] \times$$
$$\times [V(x) - bdtV'(\dot{x}) + (\sigma^2 / 2)dtV''(\ddot{x}) + 0 \cdot d(t)].$$

Звідси маємо рівняння

$$(\sigma^2 / 2)V'' - bV' - bV + X - C\omega = 0, \quad (4.29)$$

де

$$\delta = R_j + k + (1 - q)\omega. \quad (4.30)$$

Лінійна функція

$$V_0(x) = (x - C\omega)/(\sigma - b/\sigma^2) \quad (4.31)$$

є одним із розв'язків цього рівняння. Загальний розв'язок (4.29) записують як суму $V_0(x)$ і розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$(\sigma^2/2)V'' - bV' - \sigma V = 0. \tag{4.32}$$

Очевидно, що (4.32) має два лінійно незалежних розв'язки — $e^{\lambda x}$ і $e^{\mu x}$. Тут

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= -\left\{\sqrt{b^2 + 2\sigma^2\delta} - b\right\}/\sigma^2 \\ \mu &= -\left\{\sqrt{b^2 + 2\sigma^2\delta} - b\right\}/\sigma^2 \end{aligned}\right\}. \tag{4.33}$$

Величини λ, μ — це корені відповідного характеристичного рівняння.

Отже, загальний розв'язок (4.29) має вигляд:

$$V(x) = V_0(x) + Ce^{\lambda x} + C^0 e^{\mu x}.$$

З (4.33) бачимо, що $\mu > 0 > \lambda$. Отже, коли $C^0 \neq 0$, то функція $V(x)$, якщо $x \to +\infty$, експоненціально зростатиме до $+\infty$ або експоненціально спадатиме до $-\infty$. Порівнюючи з детермінованим випадком, бачимо, що функція $V(x)$ має зростати не швидше за $x(t)$. Це можливо лише тоді, коли $C^0 = 0$.

Згідно з умовою $V(0) = 0$ маємо $C = -V_0(x)$. Далі запишемо

$$V(x) = x/\delta - (C\omega/\delta + b/\delta^2)\,[1 - e^{\lambda x}]. \tag{4.34}$$

Зокрема, математичне сподівання інтегрально дисконтованого доходу від функціонування об'єкта з моменту, коли почалася на ньому відповідальна діяльність, після того як придбав його у власність даний підприємець, можна обчислити за формулою (4.34) за умови, що $x = X$, тобто

$$V(X) = \frac{X}{\delta} - \left(\frac{C\varpi}{\delta} + \frac{b}{\delta^2}\right)\left[1 - e^{\lambda x}\right].$$

Агрегування впливу випадкових чинників у один показник. Зауважимо, що коли $\omega = k = \sigma = 0$ і $R_j = R$, то формула (4.34) перетворюється у формулу (4.24). Очевидно, що реальна динаміка доходу підприємства не завжди збігається з лінійною моделлю (4.22).

Тоді зручніше обмежитися прогнозуванням динаміки середнього значення доходу, агрегувавши в один показник усю наявну інформацію про вплив випадкових чинників.

У розвинутих країнах вплив чинників ризику і невизначеності враховується, по суті, встановленням відповідної норми дисконту (про що вже йшлося раніше).

Для того щоб обчислення за формулами (4.24) і (4.34) з нормами дисконту R і R_j давали однакові результати, має задовольнятися рівняння

$$\frac{X}{\delta} - (C\omega/\delta + b/\delta^2)[1 - e^{\lambda x}] = \frac{X}{R} - \frac{b(1 - e^{-RT})}{R^2}. \qquad (4.35)$$

Уведемо такі позначення:

$$C\omega/X = \gamma,\ \ \delta(\sigma T/X)^2 = n,\ \ \delta T = \alpha,\ \ RT = \rho\ . \qquad (4.36)$$

Співвідношення (4.35) можна подати у вигляді:

$$\frac{\alpha - (1 + \alpha\gamma)\left[1 - e^{-2\alpha/(1+\sqrt{1+2n})}\right]}{\alpha^2} = \frac{\rho - 1 + e^{-\rho}}{\rho^2}. \qquad (4.37)$$

Отже, щоб визначити невідому норму дисконту, потрібно спочатку згідно з вихідною інформацією знайти ρ (розв'язок рівняння (4.37)) і, нарешті, обчислити R:

$$R = \frac{\rho}{T} = \delta\left(\frac{\rho}{\alpha}\right). \qquad (4.38)$$

Це означає, що норма дисконту R з урахуванням ризику відрізняється від δ коригуючим коефіцієнтом $f = \frac{\rho}{\alpha}$. Значення цього коефіцієнта, як бачимо, залежить лише від α, γ та n.

Можна поглиблено проаналізувати вплив кожного з уведених чинників ризику.

Сформулюймо такий важливий висновок з побудованої моделі: норму дисконту R, знайдену розглянутим способом, не можна подати ні у вигляді сум безризикової складової R_j та деякої надбавки, яка враховує ризик (премія за ризик) і є незалежною від R_j, ні у вигляді добутку цієї складової і якогось більшого від одиниці коефіцієнта, який не залежить від R_j і враховує ризик.

Умовний приклад розрахунків норми дисконту з урахуванням чинників ризику. За одиницю вимірювання часу візьмемо один рік. Вважатимемо, що «збої» у виробництві виникають у середньому один раз на рік: $\varpi = 1$, а час на ліквідацію наслідків збою підлягає експоненційному закону розподілу із середнім значенням θ = 0,04 (приблизно двом тижням). Припустимо, що витрати, пов'язані з ліквідацією наслідків «збою», пропорційні витратам в одиницю часу, причому кожен день «збою» не лише призводить до відсутності відповідного доходу, а й потребує додаткових витрат, що становлять 50 % початкового доходу *X*. За даних передумов із (4.26) та (4.27) знайдемо:

$$q = 1/(1+R_j\theta) = 1/(1+0{,}04R_j);$$

$$C = zq\theta = 0{,}02X/(1+0{,}04R_j).$$

Поява нових технологій, упровадження яких зробить розглядуване виробництво збитковим, можна вважати малоймовірним. Якщо припустити, що такі «революції» в технології відбуваються в середньому три рази за сторіччя, то можна брати $k = 0{,}03$.

Запишемо співвідношення для параметрів, які входять до рівняння (4.37):

$$\delta = R_f + 0{,}03 + \frac{0{,}04R_f}{(1+0{,}04R_f)},$$

$$\gamma = C\frac{\varpi}{X} = \frac{0{,}02}{(1+0{,}04R_f)},$$

$$n = \delta\left(\sigma\left(\frac{T}{X}\right)\right)^2, \quad \alpha = \delta T, \quad \rho = R_f T.$$

У цьому разі *R* залежатиме лише від R_f і *T* та співвідношення $S = \frac{\sigma}{X}$.

Порівнювання значень *R* та R_j підтверджує висновок про неадитивність і немультиплікативність впливу чинників ризику на норму дисконту.

4.4. МОДЕЛЬ ВИБОРУ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПРОЕКТУ З МНОЖИНИ АЛЬТЕРНАТИВНИХ ВАРІАНТІВ

Інвестиційна діяльність є однією з необхідних умов сталого зростання економіки, а також ефективного функціонування, конкурентоспроможності, розвитку більшості підприємств. Вона здійснюється у формі опрацювання інвестиційної програми, окремих інвестиційних проектів та на підставі моніторингу й управління щодо її реалізації.

Реальні інвестиції фінансуються за рахунок коштів акціонерного товариства, бюджету, іноземних інвесторів, власних засобів, а також кредитів банків. У даний час більшість підприємств не має власних джерел фінансування капітальних вкладень. У цих умовах дедалі більшого значення набувають науково обґрунтовані розрахунки щодо оцінки економічної ефективності інвестиційних проектів та їх відбору з низки попередньо опрацьованих альтернативних варіантів для фінансування та реалізації.

Інвестиції — це тимчасова відмова економічного суб’єкта від споживання наявних у його розпорядженні ресурсів (коштів) і використання цих коштів для зростання свого добробуту в майбутньому.

Інвестиційний проект — це план чи програма заходів, пов’язаних зі здійсненням капітальних вкладень з метою наступного повернення коштів та отримання прибутку. Проект має бути науково обґрунтованим, відповідати існуючим вимогам. Це, зокрема, обґрунтування економічної доцільності, обсягів і термінів здійснення капітальних вкладень, наявність необхідної проектно-кошторисної документації, розробленої згідно з чинним законодавством.

Інвестиційний процес — це розгорнута в часі реалізація інвестиційного проекту. Початком інвестиційного процесу є прийняття рішення щодо інвестицій, а завершенням — або досягнення всіх намічених цілей, або вимушена зупинка в здійсненні проекту.

Для оцінювання ефективності інвестиційних проектів треба, зокрема, здійснювати:

- збір та опрацювання первинної інформації;
- моделювання потоків продукції, ресурсів, коштів;
- урахування результатів аналізу фінансового стану підприємства, котре реалізує інвестиційний проект;
- виявлення впливу реалізації інвестиційного проекту на довкілля;
- приведення майбутніх різночасових доходів і витрат до умов їх співвимірності;
- урахування впливу чинника інфляції;
- урахування невизначеності та зумовленого цим ризику;
- порівняння результатів (вигід) і витрат з орієнтацією на досягнення сподіваної норми прибутку.

У науковій літературі з інвестиційного аналізу наводиться низка показників оцінки економічної ефективності (привабливості) інвестиційних проектів. Одним із важливих показників є чиста поточна (теперішня) вартість (NPV — Net Present Value):

$$\mathrm{NPV} = \sum_{t=0}^{n} \frac{\mathrm{NCV}_t}{(1+R)^t}, \tag{4.39}$$

де NCV_t — чистий потік грошових засобів упродовж t-го інтервалу планованого періоду (NCV_t може бути як додатним, так і від’ємним); R — ставка дисконту, що враховує ризик; t — порядковий номер інтервалу планування за умови, що початок реалізації проекту взято за нуль.

Інтервальні потоки коштів визначаються, зокрема, за формулою:

$$\mathrm{NCV}_t = \Pi\mathrm{p}_t + A_t - I_t - T_t,\ \ t = 1, \ldots, n, \tag{4.40}$$

де $\Pi\mathrm{p}_t$ — валовий прибуток за t-й інтервал планування; A_t — амортизаційні відрахування; I_t — інвестиційні витрати; T_t — податки; для $t = 0$, $\mathrm{NCV}_0 = -I_0$, I_0 — початкові інвестиції. Як правило, до останнього за часом прогнозованого чистого потоку грошових засобів NCV_n входить також залишкова вартість активів (основного та обігового капіталу), яка повертається. Прибутки за t-й інтервал планування залежать від обсягів валового доходу та витрат, які є функціями передовсім від обсягів виробництва та реалізації продукції. Зазначимо, що на відміну від (4.40) можуть бути різні, більш детальні модифікації для обчислення NCV_t $t = 1, \ldots, n$.

У низці наукових праць аналізуються змінні та параметри функції витрат на кожному конкретному t-му кроці (інтервалі t) реалізації проекту. Ідеться й про те, що ставка дисконту (R) також залежить від певних чинників. Існують різні способи й методи прогнозування змінних та параметрів, які необхідні для визначення NPV.

Фінансово-економічне обґрунтування інвестиційного проекту передбачає, зокрема, прогнозування трьох основних грошових потоків: потоку інвестицій, поточних (операційних) сплат і потоку надходжень. Жоден із цих потоків неможливо абсолютно точно передбачити (спланувати, спрогнозувати), бо на етапі обґрунтування проекту немає (і не може бути) вичерпної інформації, зокрема, стосовно до майбутнього стану ринку. Ціни та обсяги реалізації продукції, ціни на сировину та матеріали, решта грошово-вартісних параметрів за фактом їх здійснення у майбутньому можуть значно відрізнятися від прогнозованих, планових значень, котрі оцінюються з погляду сьогоднішнього дня.

Отже, у загальному випадку NPV є функцією багатьох змінних (x_j, $j = 1, \ldots, m$), більшість з яких можна трактувати як випадкову (чи розпливчасту, нечітку) величину, тому і функція цих змінних (NPV) є випадковою або розпливчастою (нечіткою) величиною, тобто

$$\mathrm{NPV} = f(x_1, \ldots, x_m, t). \tag{4.41}$$

Неусунена інформаційна невизначеність тягне за собою невідворотний ризик, яким обтяжені інвестиційні рішення. Завжди залишається можливість (ризик) того, що проект, визнаний привабливим і таким, що принесе в майбутньому прибутки, виявиться de facto менш привабливим або навіть збитковим, бо досягнуті у ході інвестиційного процесу значення (реалізація) низки змінних і параметрів як випадкових величин можуть відхилитися від запланованих або ж під час оцінювання проекту взагалі не враховувались. Отже, необхідно аналізувати та враховувати ризик, яким обтяжені інвестиційні проекти.

Існують численні методи аналізу ризиків, що дозволяє інвесторові (керівництву підприємства) приймати раціональні рішення в умовах невизначеності. Але ці методи ще не містять строго обґрунтованих правил. Це пояснюється, зокрема, тим, що опрацьовані на даний час методи аналізу ризику ґрунтуються на досить абстрактних концепціях, які на практиці складно подати в кількісній формі. На нашу думку, ці проблеми ще тривалий час залишатимуться актуальними.

Для економічного аналізу інвестиційних ризиків у економічній науковій літературі рекомендується використовувати методи аналізу беззбитковості та динамічності, методи визначення необхідної норми прибутку, методи визначення обсягів NPV та ймовірності песимістичного й оптимістичного варіантів можливої реалізації проекту тощо.

Зазначимо, що інвестор ніколи не матиме у своєму розпорядженні детермінованої всеосяжної оцінки міри ризику, оскільки рівень різноманіття чинників зовнішнього та внутрішнього середовища щодо проекту завжди перевищує управлінські (пізнавальні) можливості особи, яка приймає рішення, і, зрештою, може здійснитися найменш очікуваний сценарій перебігу подій (чи навіть такий, що взагалі не був урахований у проекті), котрий може зруйнувати інвестиційний процес. Тому інвестор зобов'язаний докладати значних зусиль до підвищення рівня своєї поінформованості, намагатися всебічно аналізувати, вимірювати та враховувати ризикованість своїх інвестиційних ініціатив як на стадії розроблення проекту, так і в процесі його реалізації. Якщо ступінь ризику зростатиме до недопустимих значень, а інвестор про це не турбуватиметься, він приречений діяти наосліп, що може призвести до невдачі.

На нашу думку, доцільно дати таке означення ризику щодо економічних об'єктів, процесів (проектів).

> ***Ризик****, яким обтяжена економічна діяльність, — це економічна категорія, що відображає характерні особливості сприйняття заінтересованими суб'єктами економічних відносин об'єктивно існуючих невизначеності та конфліктності, іманентних процесам цілепокладання, управління, прийняття рішень, оцінювання.*

Наголосимо, що ризик має діалектичну об'єктивно-суб'єктивну структуру. Оцінка ризику є багатовимірною величиною, що характеризує можливі відхилення від цілей, від бажаного (очікуваного) результату, можливу невдачу (збитки) з урахуванням впливу контрольованих (керованих) і неконтрольованих (некерованих) чинників, прямих і зворотних зв'язків.

Це означення ризику, який є характерним феноменом ринкової економіки, ґрунтується на системному підході до цієї економічної категорії, вказує на необхідність ретельного аналізу впливу на об'єкти (процеси) оцінювання та керування багатьох внутрішніх та зовнішніх чинників, вплив надсистеми, а також урахування ставлення до ризику суб'єктів господарювання (суб'єктів ризику).

Наведена дефініція вказує також на необхідність урахування діалектичної об'єктивно-суб'єктивної структури ризику, здійснюючи його якісний та кількісний аналіз, визначаючи кількісну оцінку міри ризику, моделюючи його та управляючи ним. Наголосимо, що міра ризику є векторною величиною W:

$$W = \{w_1, ..., w_N\}, \quad (4.42)$$

одна група компонент якої кількісно характеризує ризик як об'єктивну категорію, решта — як суб'єктивну, коли враховується ставлення до ризику його суб'єктів.

Способи (методи) оцінювання інвестиційного ризику пов'язані з описом інформаційної невизначеності вихідних даних проекту. Якщо вихідні параметри мають імовірнісний опис, то показники ефективності інвестицій трактуються як випадкові величини зі своїми імплікативними ймовірнісними розподілами. Однак чим менш статистично забезпечені ті чи інші параметри, чим меншою є інформативність контексту відомостей (інформації) про стан (зсуви) ринкового середовища, чим нижчий рівень інтуїтивної активності експертів, тим складніше обґрунтовувати будь-які типи ймовірностей в інвестиційному аналізі. Інструментом, який дедалі частіше використовується для вимірювання можливостей (очікувань), які не можна звести до жорстко детермінованих, є теорія нечітких множин. Опубліковано чимало наукових праць, у яких ця теорія використовується в інвестиційному аналізі.

Як відомо, на стадії якісної оцінки ризику інвестиційного проекту, зокрема, його чинники аналізують і класифікують за різними ознаками. До зовнішніх чинників ризику (безпосереднього та опосередкованого впливу) належать: стосунки з постачальниками і покупцями; конкуренція; законодавство, що регулює підприємницьку діяльність; податкова система; не передбачені заздалегідь дії органів державного управління та місцевого самоврядування; економічний стан галузі, до якої належить проект; міжнародна економічна та політична ситуація; стихійні лиха тощо.

До внутрішніх чинників ризику можна віднести ті, що пов’язані з неефективним управлінням підприємством, виробничою діяльністю, ресурсами та їх використанням тощо.

Серед видів і типів інвестиційних ризиків виокремлюють такі: кредитні ризики; ризики, що виникають на першій стадії інвестиційного процесу; підприємницькі ризики, пов’язані з реалізацією проекту; ризики країни тощо.

На даний час у методичних рекомендаціях та наукових статтях для врахування невизначеності, неповноти інформації та зумовленого цим ризику в оцінюванні величини NPV нерідко пропонується використовувати математичне сподівання випадкових величин, якими насправді є прогнозовані потоки коштів NCV_t, $t = 1, \ldots, n$, а ризик пропонується враховувати лише в оцінюванні ставки дисконту (R). Зокрема, робиться висновок, що ставка дисконту може слугувати узагальнюючим показником для врахування впливу різних видів і типів ризику, якими обтяжений інвестиційний проект. Ставка дисконту включає премію за ризик, бо ця премія є додатковим прибутком, необхідним інвесторові понад той рівень, який можуть принести безризикові інвестиції. Премію за ризик, як правило, вважають постійною величиною (константою) впродовж періоду реалізації проекту. У низці наукових праць звертається увага на деякі недоліки, притаманні такому підходу, наприклад:

По-перше, ризик інвестиційного проекту залежить від часу відведеного для кожного інтервалу планування (етапу): підготовчого етапу, етапу реалізації, етапу функціонування. Кожен етап містить перелік характерних для нього чинників ризику. Водночас існують чинники, негативний вплив яких посилюється з плином часу та які підвищують ризик проекту (навіть у межах певної стадії). Тому величина премії за ризик повинна коригуватись у кожен із t, $t = 1, \ldots, n$ інтервалів планування.

По-друге, враховувати ризик у вигляді премії — надбавки до безризикової ставки дисконту, — охопивши всі чинники, дуже складно. Зазначимо, що в цьому випадку відповідні величини R_t, $t = 1, \ldots, n$ доречно трактувати як випадкові, бо насправді премія за ризик, що входить до складу R_t, може адекватно трактуватися лише як випадкова (чи нечітка) величина.

У низці праць вплив зовнішніх чинників ризику пропонується враховувати, здійснюючи обчислення витрат на виробництво продукції і доходу від її реалізації. А вплив внутрішніх чинників — за рахунок збільшення ставки дисконту на величину премії за ризик, тобто

$$R_t = R_t^0 + R_t^P, \tag{4.43}$$

де R_t^0 — безризикова ставка дисконту в t-му інтервалі планування (реалізації проекту, $t = 1,\dots, n$); R_t^P — премія за ризик у t-му інтервалі (випадкова величина).

У будь-якому з наведених вище та інших альтернативних підходів показники, які використовуються для оцінки привабливості й ефективності інвестиційних проектів (зокрема NPV), необхідно вважати випадковими (чи розпливчастими) величинами.

Один із способів урахування невизначеності кожного варіанта інвестиційного проекту з низки альтернативних варіантів — це формування певного класу очікуваних сценаріїв перебігу подій у ході реалізації інвестиційного процесу та вибір із цієї множини двох крайніх сценаріїв (оптимістичного та песимістичного), за котрих NPV (як випадкова величина) досягає своїх максимального і мінімального значень. Після цього очікуваний ефект оцінюється за критеріями Гурвиця з обраним параметром згоди (λ). У низці випадків використовується максимінний підхід (критерій Вальда). Такий підхід відображає максимальну несхильність суб’єкта прийняття рішень до ризику і, безперечно, мінімізує ризик інвестора під час обрання одного (найкращого) з K згенерованих альтернативних варіантів проекту. Але в умовах використання цього підходу очевидно, що більшість проектів буде відхилена, тобто існує небезпека виникнення паралічу ділової активності, виникає ризик невикористаних можливостей. Окрім цього, втрачається значна частина інформації, бо з низки L згенерованих сценаріїв для кожного з K альтернативних варіантів проекту в разі використання імітаційного моделювання орієнтуються лише на два крайніх (оптимістичний та песимістичний).

Розраховуючи NPV згідно з (4.41), необхідно брати до уваги те, що змінні та параметри x_j, $j = 1, \dots, m$ є випадковими величинами. Для оцінювання інтервалів їх змін, вироблення гіпотез щодо законів їх розподілу як випадкових величин, а також урахування та оцінювання кореляційних зв’язків між цими змінними використовують статистичну інформацію, експертні оцінки, а також методи імітаційного моделювання. Відповідний алгоритм імітаційної моделі, послідовність кроків його реалізації та їх опис подаються в низці праць. Результати імітаційного моделювання можуть бути подані у вигляді дискретного чи неперервного закону розподілу показника ефективності проекту (чистої поточної вартості) як випадкової величини. Далі здебільшого обчислюють математичне сподівання випадкової величини NPV (m(NPV)) та середньоквадратичне відхилення (σ(NPV)) як ступінь ризику. З низки згенерованих альтернативних варіантів інвестиційного проекту (припустимо, що їх кількість дорівнює K) обирають той (k^0), для котрого коефіцієнт варіації ($\mathrm{CV}(\mathrm{NPV}_k)$) як ще один показник вектора оцінки міри ризику досягає свого мінімального значення, тобто

$$k^0 = \mathrm{Arg}\min_{k=1,\ldots,K}(\mathrm{CV}(\mathrm{NPV}_k)), \tag{4.44}$$

де

$$\mathrm{CV}(\mathrm{NPV}_k) = \frac{\sigma(\mathrm{NPV}_k)}{m(\mathrm{NPV}_k)}, \ \ k = 1, \ldots, K. \tag{4.45}$$

Зазначимо, що в багатьох випадках інвестиційний проект вважають ефективним, якщо сподіване значення m(NPV) є не меншим від суб’єктивно заданого (нормативного) проектного рівня m^* (m^* може набувати як від’ємних, так і додатних значень). Цей рівень залежить від стратегічних і тактичних цілей інвестора, від ролі, що її повинен відігравати даний проект у загальній стратегічній інвестиційній програмі тощо (в найпоширенішому випадку припускається, що $m^* = 0$). Отже, обирається той (k^0) з K альтернативних варіантів проекту, для котрого

$$k^0 = \mathrm{Arg}\max_{k=1,\ldots,K} m(\mathrm{NPV}_k). \tag{4.46}$$

Ясно, що має виконуватись умова:

$$m(\mathrm{NPV}_{k^0}) \geq m^*. \tag{4.47}$$

Можливий і такий випадок, коли жоден із множини варіантів Z, яка складається з K альтернативних інвестиційних проектів, не задовольняє умову:

$$m(\mathrm{NPV}_k) \geq m^*, \ \ k = 1, \ldots, K. \tag{4.48}$$

У цьому разі генеруються додаткові альтернативні варіанти проекту.

Відбір найкращого варіанта проекту k^0 може також здійснюватися згідно з умовою (4.44). Але у загальному випадку може статися так, що для всіх k ($k \in Z$), $m(\mathrm{NPV}_k) < 0$, якщо $m^* < 0$. Тоді формула (4.45) не спрацьовує. Пропонується ввести модифікований коефіцієнт варіації ($\tilde{\mathrm{C}}\tilde{\mathrm{V}}$):

$$\tilde{\mathrm{C}}\tilde{\mathrm{V}}(\mathrm{NPV}_k) = \begin{cases} \dfrac{\sigma(\mathrm{NPV}_k)}{m(\mathrm{NPV}_k) + \varepsilon}, & \text{якщо } m(\mathrm{NPV}_k) \geq 0; \\ \sigma(\mathrm{NPV}_k)\left|m(\mathrm{NPV}_k)\right|, & \text{якщо } m(\mathrm{NPV}_k) < 0; \ k \in Z, \end{cases} \tag{4.49}$$

де ε — задане число (ε > 0).

Треба наголосити, що деякі з описаних вище підходів можна узагальнити з урахуванням того, що показники ефективності (привабливості) інвестиційних проектів, отримані в результаті імітаційного моделювання, є випадковими величинами, вони можуть мати асиметричні закони розподілу. У цих випадках для оцінювання ризику доречно враховувати лише несприятливі відхилення реалізації випадкової величини NPV від значення її математичного сподівання (m(NPV)). Одним із таких показників ступеня ризику може обиратися семіваріація (SV). Для дискретної випадкової величини NPV її можна подати за формулою:

$$\mathrm{SV} = \sum_{l=1}^{L} p_l \cdot d_l^2, \tag{4.50}$$

де L — обсяг вибірки (кількість імітаційних прогонів); d_l — несприятливі відхилення реалізації випадкової величини від її сподіваного значення, тобто

$$d_l = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \mathrm{NPV}_l \geq m(\mathrm{NPV}), \\ \mathrm{NPV}_l - m(\mathrm{NPV}), \text{якщо } \mathrm{NPV}_l < m(\mathrm{NPV}), l = 1, ..., L. \end{cases} \tag{4.51}$$

Семіквадратичне відхилення (SSV) обчислюється за формулою

$$\mathrm{SSV} = \sqrt{\mathrm{SV}}. \tag{4.52}$$

За аналогією з коефіцієнтом варіації вводиться й такий показник ступеня ризику, як коефіцієнт семіваріації:

$$\mathrm{CSV}(\mathrm{NPV}) = \frac{\mathrm{SSV}(\mathrm{NPV})}{m(\mathrm{NPV})}. \tag{4.53}$$

Ураховуючи те, що ризик має діалектичну об’єктивно-суб’єктивну структуру, пропонуємо формувати так зване ефективне значення (B_m^+) відповідного економічного показника (зокрема

NPV), що враховує також рівень несхильності суб’єктів інвестування до ризику:

$$B_m^+(\alpha) = m(\text{NPV}) - \tau(\alpha)\,\sigma(\text{NPV}), \qquad (4.54)$$

де $\tau(\alpha)$ — коефіцієнт, який є функцією від α ($\tau(\alpha) > 0$), а α є одним із показників ступеня ризику; $\alpha = 1 - \gamma$, тут γ — імовірність того, що значення випадкової величини NPV перебуватимуть у межах відповідного довірчого інтервалу. За заданим ступенем ризику α можна знайти таке $\tau = \tau(\alpha)$, що

$$P\{|\,m(\text{NPV}) - \text{NPV}| > \tau(\alpha)\sigma(\text{NPV})\} \le \alpha = \frac{1}{\tau^2(\alpha)}. \qquad (4.55)$$

Якщо враховувати лише несприятливі відхилення відносно бази — математичного сподівання m(NPV) випадкової величини NPV, що оцінюються за допомогою семіквадратичного відхилення SSV(NPV), то за ефективну оцінку випадкової величини NPV береться показник $\tilde{B}_m^+(\alpha)$:

$$\tilde{B}_m^+(\alpha) = m(\text{NPV}) - \tau(\alpha)\,\text{SSV}(\text{NPV}). \qquad (4.56)$$

Отже, на нашу думку, можна запропонувати здійснювати відбір найкращого (у певному розумінні) інвестиційного проекту з множини Z, що складається з K згенерованих альтернативних варіантів проекту, за допомогою процедури їх покрокового відбору, яка реалізується за такою послідовністю основних кроків.

Крок 1. Обчислюється для кожного альтернативного варіанта (з множини Z) як одна з компонент вектора ризику — імовірність набування випадковою величиною NPV від’ємних значень:

$$P(\text{NPV} < 0) = p. \qquad (4.57)$$

Якщо екзогенно задана величина цього показника ступеня ризику p^*, то для подальшого розгляду залишаються всі ті альтернативні проекти з множини Z, для яких

$$p_k < p^*,\ k \in Z_1,\ (Z_1 \subset Z). \qquad (4.58)$$

Усі інші — відхиляються.

Крок 2. Обчислюється значення математичного сподівання ($m(\text{NPV}_k)$) для всіх варіантів проекту $k \in Z_1$. Якщо екзогенно (нормативно) задається мінімально допустима величина математичного сподівання m^*, то для подальшого розгляду залишаються лише ті альтернативні варіанти з множини Z_1, для котрих виконується умова (4.48). Таким чином формується множина Z_2 альтернативних варіантів ($Z_2 \subset Z_1$).

Зазначимо, що у випадку асиметричного розподілу згенерованої множини реалізацій випадкової величини NPV для кожного з K альтернативних варіантів проекту за базу доречно обирати не лише математичне сподівання m(NPV), а й (або) моду Mo(NPV) та (або) медіану Me(NPV). Якщо окрім цього задані (екзогенно) відповідні величини (нормативи) допустимих значень цих характеристик (Mo*, Me*), то множину Z_2 альтернативних варіантів формують з тих варіантів множини Z_1, для котрих виконуються (спільно чи окремо) такі умови:

$$\begin{gathered} m(\mathrm{NPV}_k) \geq m^*, \\ \mathrm{Mo}(\mathrm{NPV}_k), \geq \mathrm{Mo}^*, \\ \mathrm{Me}(\mathrm{NPV}_k) \geq \mathrm{Me}^*, \text{ для } k \in Z_1. \end{gathered} \tag{4.59}$$

Крок 3. На цьому кроці для кожного з альтернативних варіантів (з множини Z_2) обчислюються такі компоненти вектора ризику, як: семіквадратичне відхилення випадкової величини NPV згідно з виразом (4.52); модальне семіквадратичне відхилення $\mathrm{SSV_{Mo}}$(NPV):

$$\mathrm{SSV_{Mo}}(\mathrm{NPV}) = \sqrt{\sum_{l=1}^{L} d_l^2 p_l}, \tag{4.60}$$

де

$$d_l = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \mathrm{NPV}_l \geq \mathrm{Mo}(\mathrm{NPV}), \\ \mathrm{NPV}_l - \mathrm{Mo}(\mathrm{NPV}), \text{ якщо } \mathrm{NPV}_l < \mathrm{Mo}(\mathrm{NPV}), \ l = 1, \ldots, L. \end{cases} \tag{4.61}$$

Значення показника медіанного семіквадратичного відхилення $\mathrm{SSV_{Me}}$(NPV) обчислюється за формулою:

$$\mathrm{SSV_{Me}}(\mathrm{NPV}) = \sqrt{\sum_{l=1}^{L} d_l^2 p_l}, \tag{4.62}$$

де

$$d_l = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \mathrm{NPV}_l \geq \mathrm{Me}(\mathrm{NPV}), \\ \mathrm{NPV}_l - \mathrm{Me}(\mathrm{NPV}), \text{ якщо } \mathrm{NPV}_l < \mathrm{Me}(\mathrm{NPV}), \ l = 1, \ldots, L. \end{cases} \tag{4.63}$$

Можна також увести до розгляду та врахування й такі нормативні показники ступеня ризику (порогові значення), як α_1^*, α_2^*, α_3^*. Ступінь ризику α_1^* — це задана суб'єктом ризику ймовірність того, що випадкова величина NPV виявиться меншою ніж її ефективне значення B_m^+ за математичним сподіванням, тобто $P\{\text{NPV} < B_m^+(\alpha_1^*)\} = \alpha_1^*$. Величина $B_m^+(\alpha_1^*)$ обчислюється за формулою (4.54), коли $\tau(\alpha) = \tau(\alpha_1^*)$.

Аналогічно: ступінь ризику α_2^* — це задана екзогенно ймовірність того, що випадкова величина NPV виявиться меншою, ніж її ефективне значення за модою $B_{\text{Mo}}^+(\alpha_2^*)$:

$$P\{\text{NPV} < B_{\text{Mo}}^+(\alpha_2^*)\} = \alpha_2^*, \tag{4.64}$$

де

$$B_{\text{Mo}}^+(\alpha_2^*) = \text{Mo(NPV)} - \tau(\alpha_2^*)\text{SSV}_{\text{Mo}}(\text{NPV}). \tag{4.65}$$

Ступінь ризику α_3^* — це задана екзогенно ймовірність того, що випадкова величина *NPV* виявиться меншою, ніж її ефективне значення за медіаною $B_{\text{Me}}^+(\alpha_3^*)$:

$$P\{\text{NPV} < B_{\text{Me}}^+(\alpha_3^*)\} = \alpha_3^*, \tag{4.66}$$

де

$$B_{\text{Me}}^+(\alpha_3^*) = \text{Me(NPV)} - \tau(\alpha_3^*)\text{SSV}_{\text{Me}}(\text{NPV}). \tag{4.67}$$

Можна також задати нормативи ефективних значень за математичним сподіванням (β_m^*), за модою (β_{Mo}^*), за медіаною (β_{Me}^*).

Ті з альтернативних варіантів інвестиційного проекту, які утворюють множину Z_2 і для яких виконуються умови

$$B_m^+(\text{NPV}_k, \alpha_1^*) \ge \beta_m^*, \quad k \in Z_2 \tag{4.68}$$

і (або)

$$B_{\text{Mo}}^+(\text{NPV}_k, \alpha_2^*) \ge \beta_{\text{Mo}}^*, \quad k \in Z_2, \tag{4.69}$$

і (або)

$$B_{\text{Me}}^+(\text{NPV}_k, \alpha_3^*) \ge \beta_{\text{Me}}^*, \quad k \in Z_2, \tag{4.70}$$

становлять множину альтернативних варіантів Z_3 ($Z_3 \subset Z_2$).

Якщо ця множина порожня, то необхідно генерувати інші альтернативні варіанти інвестиційного проекту або знизити нормативно задані вимоги щодо ступеня допустимого ризику, прийнявши менш жорсткі відповідні нормативні показники, на підставі яких формуються множини Z_1, Z_2, Z_3 на відповідних кроках покрокового (селекційного) відбору перспективних альтернативних варіантів проекту. Якщо ж множина Z_3 складається лише з одного з альтернативних проектів, то його й слід обрати.

Ураховуючи одночасне виконання умов (4.68)—(4.70), можна також отримати суперечливі варіанти рішень.

У випадку, коли множина Z_3 складається з кількох альтернативних варіантів інвестиційного проекту, переходимо до наступного кроку. На останньому кроці можна обрати той із альтернативних проектів, для якого виконуються умови:

$$k^0 = \operatorname{Arg} \max_{k \in Z_3} B_m^+ (\mathrm{NPV}_k, \alpha_1^*), \qquad (4.71)$$

або

$$k^0 = \operatorname{Arg} \max_{k \in Z_3} B_{\mathrm{Mo}}^+ (\mathrm{NPV}_k, \alpha_2^*), \qquad (4.72)$$

або

$$k^0 = \operatorname{Arg} \max_{k \in Z_3} B_{\mathrm{Me}}^+ (\mathrm{NPV}_k, \alpha_3^*). \qquad (4.73)$$

Можливі й інші критерії та показники ступеня ризику щодо вибору кращого з множини альтернативних варіантів інвестиційного проекту для їх використання на цьому завершальному кроці селекційного відбору. До розгляду також доречно брати й інші показники ефективності інвестиційних проектів (термін окупності, індекс дохідності, внутрішня ставка дохідності тощо), які теж трактуються як випадкові величини. Відповідно вводяться і додаткові компоненти вектора міри ризику з огляду на поставлені цілі, узяту систему гіпотез та врахування ставлення до ризику суб'єкта прийняття інвестиційних рішень.

4.5. ПРОГНОЗУВАННЯ ОБСЯГІВ ПОДАТКОВИХ НАДХОДЖЕНЬ З УРАХУВАННЯМ РИЗИКУ

Спинімося на деяких питаннях прогнозування обсягів надходжень податків, які ґрунтуються на даних, що характеризують тенденції зміни загальноекономічних показників розвитку країни, галузей народного господарства, конкретного регіону, та методичних підходах щодо прогнозування, які публікуються в спеціальній економічній літературі.

Проаналізуймо деякі результати прогнозування податкових надходжень, ухвалених на їх підставі планів надходжень, а також ступені їх виконання. Окрім того, розглянемо динаміку реальних податкових надходжень, тобто надходжень, приведених до реальних величин з урахуванням індексу цін.

Проаналізуймо затверджені в установленому порядку планові показники за основними видами податків: ПДВ (податок на додану вартість), ППГ (прибутковий податок з громадян), ППП (прибутковий податок з підприємств), а також надходження до зведеного бюджету (НЗБ) (табл. 4.2)

Таблиця 4.2

ВИКОНАННЯ ПЛАНОВИХ НАДХОДЖЕНЬ ЗА ОСНОВНИМИ ПОДАТКАМИ ТА ЗВЕДЕНОГО БЮДЖЕТУ УКРАЇНИ, ***млрд грн****

Показник	1997 р.			1998 р.			1999 р.		
	План	Факт.	Виконання, %	План	Факт.	Виконання, %	План	Факт.	Виконання, %
ПДВ	8,455	7,602	89,9	8,756	7,238	82,7	8,640	10,561	122,2
ППП	3,815	5,689	149,2	2,327	5,620	241,4	4,700	6,125	130,3
ППГ	3,460	3,293	95,2	3,528	3,560	100,9	3,940	4,436	112,6
НЗБ	30,430	27,150	89,2	29,761	28,441	95,6	34,252	32,512	94,4

*Діяльність податкової служби України за 1999 рік. — К., 1999.

Зазначимо, що податкові надходження становили у зведеному бюджеті у 1997 році 68 %, у 1998 — 75, у 1999 — 76,5 %. Неважко помітити, що обсяги фактичних надходжень до зведеного бюджету істотно відрізняються від планових. Та недовиконання дохідних статей зведеного бюджету не завжди відбувається лише за рахунок недовиконання обсягів податків. Податок на додану вартість у 1997/1998 роках збирався відповідно лише на 89,9 і 82,7 % запланованих обсягів.

Якщо використовувати дані Держкомстату щодо динаміки номінального ВВП і дані про реальний ВВП за даними незалежної організації UEPLAG, то можна розрахувати обсяг державного навантаження на економіку як відношення НЗБ до ВВП (табл. 4.3).

Таблиця 4.3

ДИНАМІКА НОМІНАЛЬНОГО І РЕАЛЬНОГО ВВП ТА ДЕРЖАВНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ЕКОНОМІКУ УКРАЇНИ*

Показник	1996 р.	1997 р.	1998 р.	1999 р.

ВВП, *млрд грн*:				
номінальний	78,1	86,952	94,823	118,318
реальний, *%*	78,1	78,9	71,4	74,24
відносний, *%**	100	99,6	96,3	95,6
Державне навантаження на економіку, *%*	—	31,2	30,0	27,5

* Тенденції української економіки. Березень 2000 / TACIS. Українсько-європейський консультаційний центр з питань законодавства [UEPLAG], 2000.

На перший погляд, обсяг державного навантаження на економіку України в останні роки є відносно невеликим (у 1999 році — 27,5 %). Однак реальну оцінку впливу оподаткування на економіку країни можна одержати, якщо нормувати обсяг державного навантаження на обсяг відносного ВВП, що визначається як відношення ВВП даної країни до середньосвітового. Виникає також питання щодо адекватності оцінок обсягу ВВП до реально існуючого, оскільки офіційна ставка не враховує внеску «тіньового» сектору економіки. В урядовій програмі «Україна 2010 року» припускається, що з урахуванням «тіньового» сектору економіки ВВП у розрахунку на душу населення становив 2000 дол. США на кінець 1999 року, і ця цифра береться як початкова база зростання економіки України на найближче десятиліття. Однак кількісні оцінки «тіньового» сектору економіки України, обчислені за допомогою економетричної моделі рівноваги попиту і пропозиції на грошову масу, не підтвердили цю гіпотезу. З’ясувалося, що обсяг реального ВВП на душу населення в Україні перебуває в проміжку 800—1200 дол. США.

Як наслідок нераціонального податкового навантаження маємо, що обсяг надходжень характеризується їхнім суттєвим зниженням у реальних цінах за досліджуваний проміжок часу (табл. 4.4).

Таблиця 4.4

НОМІНАЛЬНІ І РЕАЛЬНІ ПОДАТКОВІ НАДХОДЖЕННЯ, ПРИВЕДЕНІ ДО РІВНЯ ЦІН 1997 р.*

Надходження	1997 р.			1998 р.			1999 р.		
	Номінальні	Індекс цін	Реальні	Номінальні	Індекс цін	Реальні	Номінальні	Індекс цін	Реальні
по Києву	3,577	1	3,577	4,248	1,078	3,941	4,031	1,369	2,943

по Україні	23,523		23,523	23,568		21,86	23,209		16,953

[*] Бюлетень НБУ України. — 2000. — № 1.

Як відомо, прогнози поділяють: на оперативні — до одного місяця; короткострокові — до одного року; середньострокові — до п'яти років і довгострокові — понад п'ять років. Здійснення та використання прогнозів з різними часовими горизонтами визначається природою прогнозованих процесів. В умовах нестійкого характеру економічних процесів на практиці, по суті, можуть бути реалізовані лише два види прогнозів — оперативний і короткотерміновий.

У прогнозуванні податкових надходжень, на нашу думку[1], необхідно брати до уваги, зокрема, фактичні динамічні ряди надходжень податків за попередні періоди. Треба також мати на увазі, що показники за минулі періоди потрібно в багатьох випадках коригувати, що потребує вивчення конкретних економічних особливостей даного періоду з урахуванням величини ставок оподаткування, зміни податкової бази тощо.

Відомо, що прогнозування будь-якого економічного показника пов'язане з похибкою прогнозу, величина якої визначає ступінь ризику планів (рішень), які ґрунтуються на прогнозованих економічних показниках.

Розгляньмо категорію податкового ризику як одну зі складових багатофакторної оцінки надійності прийняття рішень щодо обсягів планових податкових надходжень на базі їхніх прогнозованих обсягів.

Кількісна оцінка міри економічного ризику (зокрема ризику податкових надходжень) є багатовимірною величиною — вектором $G = (q_1, \ldots, q_n)$, компоненти якого формуються залежно від мети дослідження, узятої системи гіпотез, суб'єктивного чинника, котрий характеризує ставлення суб'єкта ризику до невизначеності, конфліктності тощо. Одна група компонент цього вектора характеризує ризик як об'єктивну економічну категорію, решту — які враховують ставлення до ризику суб'єкта прийняття рішень — доречно розглядати як суб'єктивні складові міри ризику.

У статистичному моделюванні та прогнозуванні вводяться та аналізуються такі поняття, як середній та емпіричний ризики. За показник ступеня середнього ризику зазвичай обирається математичне сподівання квадрата різниці між розрахунковими і фа-

---

[1] *Вітлінський В. В., Скрипник А. В., Терещенко Л. О.* Концепція ризику в прогнозуванні податкових надходжень // Вчені записки КНЕУ. — Вип. 3. — 2001. — С. 289—298.

ктичними значеннями прогнозованого економічного показника. Мінімізація ступеня середнього ризику дозволяє найбільш обґрунтовано виявити закономірності й реально існуючі суттєві взаємозв'язки. У порівнянні альтернативних математичних моделей прогнозування кращою вважають ту з них, котрій відповідає мінімальне значення середнього ризику. Це стосується і моделей прогнозування податкових надходжень.

На підставі прогнозованих обсягів податкових надходжень визначають планові обсяги, котрі, взагалі кажучи, припускаються дещо меншими, ніж середнє значення прогнозованого обсягу. Отже, крім об'єктивної складової, треба також увести суб'єктивну складову міри ризику, за яку доречно, на наш погляд, обрати ймовірність недовиконання запланованого обсягу податкових надходжень, обчисленого на базі їхнього прогнозованого обсягу. Очевидно, що ступінь ризику (імовірності) недовиконання планового обсягу податкових надходжень повинен бути якомога меншим. Відсоток недовиконання планових податкових надходжень у свою чергу може розглядатися як ще один із показників суб'єктивної оцінки міри ризику. Він задається нормативно залежно від ставлення суб'єкта прийняття рішень до ризику та до обсягів прогнозованих величин, котрі задаються певним інтервалом значень (інтервальний прогноз).

Доречно також увести до розгляду як одну з компонент векторної оцінки міри ризику показник ризику невикористаних можливостей, котрий характеризує міру відхилення запланованого обсягу податкових надходжень від максимально можливого прогнозованого обсягу надходжень, здійсненого на підставі використання адекватних математичних моделей.

Наголосимо, що всі ці складові міри податкового ризику необхідно використовувати комплексно, системно.

Порядок моделі ARIMA задається трьома параметрами: порядок авторегресії p; порядок оператора різниці d для приведення процесу до стаціонарного вигляду; порядок моделі ковзного середнього q.

Модель ARIMA (якщо d = 0) запишеться у вигляді:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + ... + \Phi_p y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - ... - \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

де y_t — величина досліджуваного процесу на час t (t = 1, 2, ... T); θ_1, θ_2, …, θ_q — коефіцієнти моделі ковзного середнього; Φ_1, Φ_2, Φ_p — авторегресійні коефіцієнти; δ — параметр, що визначає середнє значення; T — кількість періодів спостережень; ε_t — «білий шум».

Іншими словами, модель ARIMA ґрунтується на прогнозуванні значення відповідного економічного показника на час t на підставі значень, які спостерігалися у попередні періоди. Кількість необхідних попередніх спостережень визначається порядком авторегресії. Крім того, використовують похибки, одержані в процесі прогнозування попередніх значень. Кількість цих похибок визначається порядком моделі ковзного середнього. Авторегресійна складова і модель ковзного середнього утворюють модель ARMA, яку можна використати для прогнозування стаціонарного випадкового процесу, тобто процесу, де математичне сподівання, дисперсія та моменти вищих порядків не залежать від часу. На жаль, у більшості часових рядів економічних показників випадки існування стаціонарних випадкових процесів трапляються рідко. Для приведення процесу до стаціонарного вигляду, як правило, використовується оператор різниці, і, відповідно, модель ARMA перетворюється в модель ARIMA.

Ще одна особливість, яка проявилася у результаті аналізу статистичних характеристик рядів податкових надходжень, — це відсутність значущого зв'язку між надходженнями в сусідні місяці. Якщо побудувати авторегресійну функцію надходжень за окремими типами податків, то виявиться, що зв'язок між суміжними у часі значеннями відносно незначний (дискретність рядів дорівнює одному місяцю). Здебільшого автокореляційна функція має екстремум, якщо значення величини лага — 12 місяців. З року в рік у певні місяці надходження перевищують середній рівень, а в інших — навпаки. Це вказує на існування циклічності, період якої дорівнює 1 року (12 місяцям). Наприклад, найкращим чином обсяг надходження на січень наступного року можна визначити, якщо відомі надходження за січень попередніх років. Цю особливість процесу добре описує модель ARIMAS m, n, l, де параметри m, n, l мають зміст, аналогічний параметрам p, d, q моделі ARIMA зі зрушеннями на 12 кроків.

Перший етап побудови моделі ARIMA*ARIMAS полягає в тому, що за видом авторегресійної функції, яка включає в себе дані про характер тренду, наявність циклічності, порядок авторегресійного і ковзного середнього, здійснюється вибір параметрів моделі.

Вибір моделі може здійснюватися на підставі зниження показника ризику згідно з обраною моделлю на базисному інтервалі.

За використання моделі ARIMA розраховуються такі похибки:

1. MSE — середній квадрат похибки:

$$\text{MSE} = \sum_{i=1}^{T} (x(i) - \hat{x}(i))^2 / T,$$

де $x(i)$ — фактичні значення показника в i-му періоді; $i = 1, \ldots, T$, $\hat{x}(i)$ — прогнозовані значення цього показника в i-му періоді;

2. MAE — середня абсолютна похибка:

$$\text{MAE} = \sum_{i=1}^{T} \left| x(i) - \hat{x}(i) \right| / T.$$

3. MPD — середня відсоткова похибка:

$$\text{MPD} = \sum_{i=1}^{T} \frac{(x(i) - \hat{x}(i))}{x(i)} 100\,\% / T.$$

4. MAPE — середня абсолютна відсоткова похибка:

$$\text{MAPE} = \sum_{i=1}^{T} \left| \frac{x(i) - \hat{x}(i)}{x(i)} \right| 100\,\% / T.$$

Окрім того, під час побудови моделі враховуються похибки оцінок коефіцієнтів моделі Ф і θ, тобто модель вважається адекватною, якщо всі її параметри будуть значущими на 95 % рівня довіри (чи 5 % ступеня ризику).

На основі даної методики були проаналізовані ряди податкових надходжень по окремих районах м. Києва на підставі щомісячних даних з 1996 до 1999 року (за винятком грудня 1999 року), тобто $T = 47$. Були також отримані прогнозовані щомісячні значення на 2000 рік по Києву.

Надходження по м. Києву загалом з метою зниження похибки прогнозу визначались як сума прогнозів податкових надходжень по окремих районах. Для районів, де критерій мінімуму похибки конфліктував з критерієм значущості відповідних коефіцієнтів, було знайдено два варіанти прогнозів — песимістичний та оптимістичний, що дозволило по м. Києву загалом одержати два прогнозних значення — 5,17 млрд грн (песимістичний прогноз) і 5,4 млрд грн (оптимістичний прогноз). Отримані також обсяги фактичних податкових надходжень за перших три місяці 2000 року, котрі становлять 1,264 млрд грн. Прогнозований обсяг згідно з оптимістичним варіантом дорівнює 1,285 млрд грн. А згідно з песимістичним — 1,245 млрд грн. Іншими словами, оптимістичний варіант прогнозу перевищує фактичну величину на 1,7 %, а песимістичний виявився меншим за фактичний на 1,5 %, що свідчить про достовірність прогнозу. Що стосується достовірності прогнозу на друге півріччя 2000 року, то на основі існування взаємозв'язку щодо темпів зростання грошової маси, темпів інфляції можна зробити припущення, що оптимістичний варіант прогнозу в номінальних цінах буде також дещо перевищений, хоча тенденція зменшення реальних надходжень скоріше всього збережеться.

Розгляньмо постановку задачі розрахунку похибки прогнозу. Доцільно обчислити ступінь ризику, що пов'язаний з моделлю прогнозування податкових надходжень по Києву, як один зі складових векторної оцінки міри податкового ризику за умови, що прогнозована величина розраховується як сума прогнозованих обсягів надходжень по окремих районах.

Нехай прогнозована величина обсягів податкових надходжень по Києву загалом $\hat{x}(T+l)$ дорівнює сумі прогнозних значень надходжень:

$$\hat{x}_l(T+l), \hat{x}_2(T+l), \ldots, \hat{x}_n(T+l),$$

тобто

$$\hat{x}(T+l) = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i(T+l),$$

де l — горизонт прогнозу, $\hat{x}_i(T+l)$ — обсяг податкових надходжень по i-му району м. Києва, $(n-1)$ — кількість міських районів $i = 1, \ldots, n-1$, $(n-1) = 14$; $\hat{x}_n(T+l)$ — надходження від загальноміських комунальних служб; n — індекс, яким позначаються загальноміські комунальні служби ($n = 15$). Кожна з прогнозованих величин містить у собі похибку прогнозу, яка визначається похибкою на базовому інтервалі.

Дисперсія загальної суми прогнозованих надходжень по м. Києву дорівнює:

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_{15}^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + \ldots \\ \ldots + 2\rho_{1415}\sigma_{14}\sigma_{15}. \quad (4.74)$$

Оскільки похибки прогнозування на базі моделі ARIMA являють собою «білий шум» (мають нормальний закон розподілу), то коефіцієнти кореляції цих похибок дорівнюють нулю ($\rho_{ij} = 0 (i \neq j)$) супроти коефіцієнтів кореляції похибок статистичних даних, у яких існував прямий взаємозв'язок між надходженнями у кожному з районів, що значною мірою визначалося впливом макроекономічних показників, загальних для всіх районів.

У нашому випадку коваріаційна матриця набуває діагонального вигляду, а дисперсія та середньоквадратичне відхилення (похибка) прогнозу дорівнює:

$$D(x) = \sum_{i=1}^{15} \sigma_j^2; \quad \sigma(x) = \sqrt{D(x)}. \tag{4.75}$$

Як величину дисперсії прогнозу можна використати величину MSE, помножену на коефіцієнт C:

$$C = \frac{T}{T - (p + q + m + l)}.$$

У нашому випадку маємо такі дані: $T = 47$, $p + q + m + l = 8$, звідси $C = 47/39 \approx 1{,}21$.

Визначимо як одну з компонент вектора податкового ризику ймовірність можливого недовиконання планових податкових надходжень.

Ризик 10 %-го недовиконання планового показника за прогнозування на один крок дорівнюватиме:

$$P(x \le 0{,}9x_p) = 1 - \Phi\left(\frac{0{,}1}{V}\right),$$

де V — аналог коефіцієнта варіації:

$$V = \frac{\sigma}{x_p}, \tag{4.76}$$

σ — похибка прогнозу, отримана на базовому інтервалі; x_p — прогнозоване значення податкових надходжень; $\Phi(x)$ — функція Лапласа.

Розрахуємо величину ризику щомісячних сумарних надходжень для однокрокового прогнозу.

Прогнозована величина щомісячних надходжень для м. Києва загалом на 2000 рік $x_p = 430$ млн грн. Обчислимо величини σ та V відповідно до виразів (4.75) та (4.76) ($\sigma = 12{,}3$ млн грн; $V = 12{,}3/430 = 0{,}029$). Величина ступеня ризику як імовірність недоотримання податкових надходжень по м. Києву становить:

$$P(x \le 0{,}9x_p) = 1 - \Phi(0{,}1/0{,}029) = 1 - \Phi(3{,}5) = 0{,}00023.$$

Для одного з районів Києва середня прогнозована величина щомісячних надходжень на 2000 рік дорівнює 63,2 млн грн, а величина похибки прогнозу становить відповідно 3,9 млн грн. $V = 3{,}9/63{,}2 = 0{,}0625$. Відповідно значення однієї із суб’єктивних компонент вектора міри податкового ризику (ймовірне недовиконання надходжень) дорівнює:

$$P(x \le 0{,}9x_p) = 1 - \Phi(0{,}1 / 0{,}0625) = 1 - \Phi(1{,}6) = 0{,}055.$$

Наведені розрахунки свідчать, зокрема, про те, що коли б прогноз здійснювався за сумарним масивом надходжень у попередні роки, то похибка на базовому інтервалі була б такою: $\sigma^2 = 1{,}5 \times 10^9$, або σ = 38,7 млн грн. Відповідно: V = 38,7/430 = 0,09. Ступінь ризику дорівнював би:

$$P(x \le 0{,}9x_p) = 1 - \Phi(0{,}1 / 0{,}09) = 1 - \Phi(1{,}11) = 0{,}134.$$

Цей ефект пояснюється тим, що випадкові (не систематичні) похибки прогнозів по окремих районах взаємно компенсуються, чого не відбувається у використанні для прогнозування показників по місту загалом (за інтервалами).

Звідси можна зробити висновок про доцільність поділу прогнозування загальної суми податкових надходжень на порайонні складові. Обчислимо ступінь ризику на 1 %-му рівні можливого невиконання середнього прогнозованого обсягу податкових надходжень по м. Києву загалом:

$$P(x \le 0{,}99x_p) = 1 - \Phi(0{,}01x_p / \sigma) = 1 - \Phi(0{,}01 / 0{,}029) =$$

$$= 1 - \Phi(0{,}344) = 0{,}367.$$

Як бачимо, ступінь податкового ризику недовиконання прогнозованих податкових надходжень на 1 %-му рівні залишився значним. Тому, на нашу думку, є сенс установити планове значення надходжень дещо меншим від прогнозованого: $x_{пл} = kx_p$, де $x_{пл}$ — плановий обсяг податкових надходжень, k — коригуючий коефіцієнт (відношення обсягів планових надходжень до прогнозованих).

Розгляньмо ризик недовиконання планових податкових надходжень на 10 %-му рівні (k = 0,9):

$$P(x \le 0{,}9x_{пл}) = p(x \le 0{,}81x_p) = 1 - \Phi(0{,}19x_p / \sigma) =$$

$$= 1 - \Phi(0{,}19 / V) \approx 0.$$

Ризик на рівні 1 %-го недовиконання планових надходжень у цьому випадку також значно зменшився:

$$P(x \le 0{,}99x_{пл}) = P(x \le 0{,}891x_p) = 1 - \Phi(0{,}109 / 0{,}029) =$$

$$= 1 - \Phi(3{,}75) \approx 0{,}001.$$

Практичну користь також має обернена задача: на якому рівні (меншому від середньопрогнозованого) потрібно встановити планові надходження, щоб зменшити ризик 10 %-го недоотримання запланованих обсягів податкових надходжень, наприклад, до ступеня $p = 0{,}0001$.

Припустимо, що:

$$1 - \Phi(x) = 0{,}0001 \Rightarrow \Phi(x) = 0{,}9999.$$

Звідси отримаємо:

$$x = \Phi^{-1}(0{,}9999) = 3{,}72.$$

Оскільки величина планових надходжень $x_{\text{пл}} = kx_p$, то з виразу

$$(x_p - 0{,}9kx_p)V / \sigma = 3{,}72$$

отримаємо:

$$k = (1 - 3{,}72V) / 0{,}9 = 0{,}99.$$

Отже, щоб зменшити ризик 10 %-го невиконання планових надходжень до 0,0001, потрібно встановити плановий обсяг надходжень на 1 %-му рівні нижчим за їхній середній прогнозований обсяг.

Запропонований підхід дозволяє за відомою (заданою) величиною компоненти векторної оцінки міри ризику (імовірності недовиконання надходжень) розрахувати величину планових надходжень як частку від їхнього прогнозованого обсягу.

Усі наведені міркування стосуються компоненти векторної оцінки міри ризику прогнозу на один крок. Відомо, що за збільшення прогнозного інтервалу похибка прогнозу також збільшується. Знайдемо похибку в прогнозуванні податкових надходжень на один рік (12 кроків).

Дисперсія похибки прогнозування на l кроків визначається як:

$$\Delta^2 = (\psi_0^2 + \psi_1^2 + ... + \psi_{l-1}^2)\sigma^2,$$

де σ^2 — похибка прогнозу на базовому інтервалі; $\psi_0^2, \psi_1^2, \psi_{l-1}^2$ — коефіцієнти подання моделі ARIMA як процесу ковзного середнього.

Оскільки коефіцієнти ψ_l невідомі, то похибка на річному інтервалі розраховується за їх максимально можливих значень, які за умовою стаціонарності процесу не перевищують 1, тобто:

$$\Delta^2 = \sigma^2(1+2+...+12) = 78\sigma^2 \Rightarrow \Delta = 12{,}3\sqrt{78} = 108{,}6 \text{ млн грн.}$$

Відповідне значення величини $V = \dfrac{\Delta}{x_p}$ за прогнозного значення надходжень по Києву на 2000 рік $x_p = 5004{,}4$ млн грн дорівнює $V = \dfrac{108{,}5}{5004{,}4} \approx 0{,}022.$

Розрахуємо величину податкового ризику недовиконання планових надходжень у прогнозуванні на один рік та його зниження введенням коригуючого коефіцієнта (табл. 4.5).

Таблиця 4.5

СТУПІНЬ РИЗИКУ (ЙМОВІРНІСТЬ) НЕДОВИКОНАННЯ ПЛАНОВИХ НАДХОДЖЕНЬ

Відсоток недовиконання	k = 1,000	k = 0,995	k = 0,990	k = 0,985	k = 0,980
0	0,50000	0,41000	0,34500	0,25000	0,18400
1	0,32400	0,25000	0,18400	0,13000	0,08900
2	0,18100	0,13000	0,08700	0,05800	0,03600
3	0,08700	0,05800	0,03500	0,02100	0,01300
4	0,03500	0,02100	0,01200	0,00640	0,00360
5	0,01200	0,00640	0,00340	0,00160	0,00090
6	0,00340	0,00160	0,00090	0,00035	0,00017
7	0,00074	0,00035	0,00016	0,00006	0,00003
8	0,00015	0,00006	0,00010	0,00000	0,00000
9	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
10	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Нехай

$$P(x') = P\left(x \le \left(1 - \frac{x'}{100}\right)x_{\text{пл}}\right),$$

де x' — величина недовиконання планових показників у відсотках.

У формулі для розрахунків імовірності недовиконання обсягу планових податкових надходжень використовуються таблиці розподілу Лапласа:

$$P(x') = 1 - \Phi((1 - k + x'k/1000)/V).$$

Як випливає з розрахунків (див. табл. 4.5), 10 %-ве недовиконання прогнозу, отриманого за допомогою моделі ARIMA по м. Києву, трапляється рідко. Наголосимо, що навіть 1 %-ве недовиконання (як ступінь ризику) становить значну величину (50 млн грн). Звідси як нормативний, на наш погляд, краще ввести ступінь ризику 1 %-го недовиконання планових надходжень. Відповідно отримаємо такі значення ймовірності недовиконання залежно від коефіцієнта k:

$$P(1{,}00) = 0{,}326; \quad P(0{,}995) = 0{,}252; \quad P(0{,}99) = 0{,}184;$$
$$P(0{,}985) = 0{,}13; \quad P(0{,}98) = 0{,}089.$$

Як бачимо з наведених розрахунків, використання коригуючого коефіцієнта k дозволяє зменшити ризик як імовірність 1 %-го недовиконання планових надходжень установленням планового обсягу податкових надходжень як частки від їхнього середнього прогнозованого обсягу.

Треба пам’ятати, що запропонована методика вказує лише на необхідність зниження планових обсягів надходжень щодо прогнозованих. Але за цих умов виникає ризик невикористаних можливостей, оскільки у такому підході і обсяг надходжень, і видаткова частина бюджету будь-якого рівня ієрархії управління буде (під час планування) скорочена. Тому пропонується також більш загальний підхід до визначення планових обсягів податкових надходжень.

Якщо розглядати, як про це вже йшлося вище, ще одну компоненту векторної оцінки міри ризику, а саме — показник ступеня ризику невикористаних можливостей, то, на наш погляд, доречно ввести до розгляду інтегрований (комплексний) показник ступеня ризику як міру відхилення від цілей для знаходження планового обсягу податкових надходжень на підставі їхнього прогнозованого обсягу. За визначеного на етапі прогнозування, середнього прогнозованого обсягу надходжень x_p та отриманої оптимістичної (максимальної) оцінки обсягу надходжень x_p^* інтегрований показник ступеня ризику будується, зокрема, так:

$$R(k,\lambda)=\lambda R_1(kx_p, x_p^*)-(1-\lambda)R_2(kx_p),$$

де $R(k, \lambda)$ — інтегрований показник ступеня ризику; $R_1(kx_p, x_p^*)$ — показник ступеня ризику невикористаних можливостей; $R_2(kx_p)$ — показник ступеня ризику як імовірність недовиконання планових надходжень. Зазначимо, що коефіцієнт $k > 0$ не обов’язково повинен бути меншим за одиницю.

Величина $\lambda (0 \le \lambda \le 1)$ визначається залежно від пріоритетів, які вказують на те, що важливіше з погляду людей, котрі приймають відповідні рішення, не допустити недовиконання планових надходжень чи не запланувати надмірно низький бюджет.

4.6. ПОЛІТИЧНИЙ РИЗИК, ВАЛОВИЙ ВНУТРІШНІЙ ПРОДУКТ ТА ЗОВНІШНІЙ БОРГ

Світ — цілісний (цілісна система), тому важливо враховувати те, що такі царини суспільного буття, як економіка, політика, культура, взаємодіють і взаємопроникають. Важливо розрізняти їх, але розрізняти означає не ізолювати, а передусім долати плутанину та враховувати їх взаємозалежність (взаємозв'язок). Розгляньмо взаємозв'язок (оцінку) ступеня політичного ризику та деяких ключових макроекономічних показників.

Питання політичного ризику сьогодні стає особливо важливим для аналізу економічного потенціалу країни, її економічної безпеки. Сфера впливу політичного ризику на даний момент є досить широкою, виявляючись у втраті патентних і авторських прав, обмеженні прав особи на землю та інші ресурси, обмеженні доступу до певних ринків тощо. Це пояснюється тим, що політичне середовище досить тісно пов'язане з економікою. Дедалі частіше політична боротьба точиться за прийняття тих чи інших економічних рішень або методів (способів) їх здійснення. Однак слід пам'ятати, що політичний ризик породжується невизначеністю, нестабільністю урядового курсу стосовно до бізнесу, інвестиційної, інноваційної політики, зволіканням з раціональним вирішенням нагальних питань на рівні законодавства або непослідовністю рішень, конфліктністю між основними гілками влади тощо.

Існує низка методик кількісної оцінки політичного ризику. В основному це — експертні оцінки. До них належать: індекси, що їх обчислює Інститут Ханера (політичний ризик тут градуюється за шкалою від 0 до 25 умовних одиниць), експертна шкала на базі моделі Ханера (від 0 до 100 умовних одиниць), «Принцмодель» (від –125 до +125), індекси BERI (від 0 до 100) тощо. Розгляньмо одну з найпоширеніших методик оцінки політичного ризику — методику німецької фірми BERI (Інститут інформації ризику в бізнесі). Згідно з даною методикою рівень політичної стабільності (чи нестабільності, тобто політичний ризик) визначається за допомогою індексу BERI. Його кількісним вимірюванням займаються близько 100 експертів, які чотири рази впродовж року за допомогою експертних оцінок аналізують основні аспекти політичної та економічної ситуації в країні. Анкета, яку заповнюють (анонімно) фахівці з різних країн, містить 15 оцінних деталізованих кількісних критеріїв. Кожне питання оцінюється за бально-відсотковою шкалою та має п'ять варіантів відповіді: 0 — дуже добре, 1 — добре, 2 — задовільно, 3 — погано, 4 — неприйнятно. Чим більша кількість зібраних балів, тим вища ймовірність політичного ризику. Форма анкети подана в таблиці 4.6[1].

[1] Основы экономической безопасности (Государство, регион, предприятие, личность) / Под ред. Е. А. Олейникова. — М.: ЗАО «Бизнес-школа "Интел-Синтез"», 1997. — С. 78.

Таблиця 4.6

АНКЕТА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ІНДЕКСУ BERI

№ з/п	Питання	Питома вага питання в інтегрованому показнику, %	Країна (бали щодо відповідного показника)			
1	Політична стабільність у країні та її вплив на економічне життя	12				
2	Ставлення до іноземних інвестицій та прибутку	6				
3	Ступінь та варіанти націоналізації	6				
4	Імовірність та ступінь девальвації валюти	6				
5	Стан платіжного балансу	6				
6	Бюрократизм	4				
7	Темп зростання ВВП (ВНП)	10				
7а	Темп зростання ВНП (нижче 3 % у рік)	2,5				
7б	Темп зростання ВНП (від 3 % до 6 %)	5				
7в	Темп зростання ВНП (від 6 % до 10 %)	7,5				
7г	Темп зростання ВНП (вище 10 %)	10				
8	Конвертованість валюти	10				
9	Аналіз виконання договірних зобов’язань	6				
10	Витрати на заробітну плату з урахуванням рівня продуктивності праці	8				
11	Можливість використання експертних і консалтингових послуг	2				
12	Організація зв’язку та транспорту	4				
13	Стосунки з державними органами	4				
14	Умови отримання короткострокового кредиту	8				
15	Умови отримання і використання довгострокового кредиту та власний капітал	8				
Усього		**100**				

Відомим є також розподіл міри політичного ризику на 9 ступенів. Політичний ризик пов'язується з обсягом зовнішнього боргу і можливостями країни своєчасно його виплатити. Оскільки обидва показники (зовнішній борг та політичний ризик) є одними з основних критеріїв оцінки рейтингу країни на світовому ринку, було б доцільно оцінювати їх комплексно, з урахуванням їх взаємозв'язку. Пропонуємо такий варіант оцінювання взаємодії політичного ризику з допустимим рівнем зовнішнього боргу.

Використовуючи кількісну оцінку (рейтинг) політичного ризику, можна знайти його кореляційно-регресійний зв'язок із зовнішнім боргом країни. Так, на основі статистичних даних щодо економічного і політичного стану України можна побудувати економетричну модель залежності ступеня політичного ризику від обсягу зовнішнього боргу. Для опису цієї залежності доречно використовувати криві зростання. На підставі аналізу відповідних даних неважко дійти висновку, що цю залежність досить адекватно опише модель, яка має такий вигляд:

$$R_p = \alpha + \beta\sqrt{B} + u . \qquad (4.77)$$

де R_p — ступінь політичного ризику; B — рівень зовнішньої заборгованості, α і β — коефіцієнти регресії; u — випадкова величина.

Аналізуючи наявні дані, можна скласти відповідну таблицю (табл. 4.7). Останній стовпчик містить показник політичного ризику, який оцінено за допомогою моделі (4.77). Як легко пересвідчитися, відхилення теоретичних даних, отриманих за її допомогою, від даних, отриманих методом BERI, здебільшого не є значним. Після визначення коефіцієнта детермінації, який для нашого випадку становить R^2 = 0,903549, та після виконання F-тесту можна твердити, що модель (4.77) є адекватною. Окрім цього коефіцієнт розбіжності, запропонований Г. Тейлом, також є незначним, що підтверджує адекватність даної моделі:

$$v = \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} (\hat{y}_t - y_t)^2}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} y_t^2}} = 0{,}14 .$$

Зазначимо, що у випадку ідеального прогнозування v = 0.

Отже, запропоновану модель (4.77) можна застосовувати для подальшого аналізу.

Таблиця 4.7

ЗОВНІШНЯ ЗАБОРГОВАНІСТЬ ТА ПОЛІТИЧНИЙ РИЗИК УКРАЇНИ за 1993—2000 рр.

Рік	Зовнішній борг, *млрд дол.* (*B*)*	Політичний ризик (R_p)**	Політичний ризик (оцінений на базі моделі)
1993	0.396	52	52.01289
1994	3.624	55	56.3249
1995	4.828	59	57.31828
1996	8.217		59.58277
1997	8.839		59.94317
1998	9.555		60.34267
1999	11.472	61	61.34393
2000	12.438		61.81668

* Статистичні дані взяті зі звітів Міністерства фінансів.
** Дані взяті з розрахунку політичного ризику для країн за методом BERI.

З огляду на прийнятність даної моделі ($\alpha \approx 49.88$; $\beta \approx 3.38$) побудуємо криву (рис. 4.5) залежності величини політичного ризику від зовнішнього боргу (яка має сенс у певних інтервалах значень обсягу зовнішнього боргу та кількісної оцінки ступеня політичного ризику).

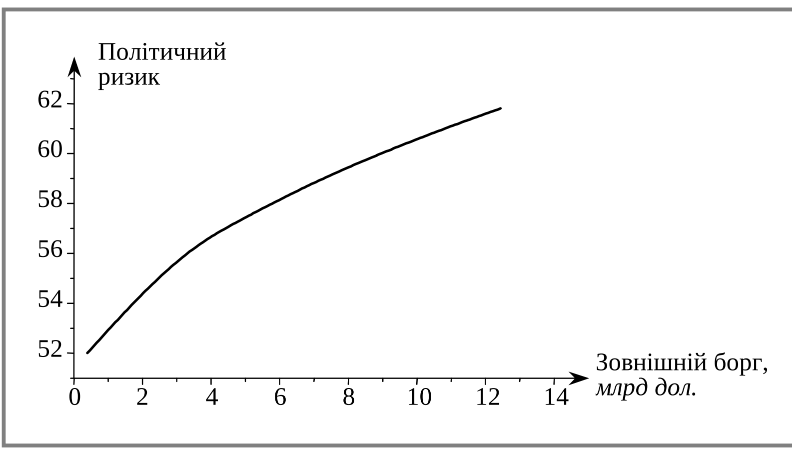


Рис. 4.5. Залежність ступеня політичного ризику від обсягу зовнішнього боргу

Розгляньмо дев'ять ступенів прояву політичного ризику: Пр-1, ..., Пр-9. Припустимо, що за Пр-1 борг становить B_1; Пр-2 — B_2; Пр-9 — B_9. Причому $B_1 < B_2 < \ldots < B_9$ та Пр-1 < < Пр-2 <...< Пр-9.

Значний інтерес становить оцінка обсягу зовнішнього боргу залежно від оцінки ступеня політичного ризику.

Подана на рис. 4.6 площина обсягу зовнішнього боргу щодо ступеня політичного ризику є критично допустимим рівнем обсягу зовнішнього боргу держави за заданого (бажаного) ступеня політичного ризику. Точка, що розташована вище неї, є попередженням про високий політичний ризик і, як наслідок, політичну та економічну кризу (відсутність необхідного обсягу інвестицій, несприятливу асиметрію торговельних відносин з іншими країнами тощо). Дане твердження є слушним за умови справедливості гіпотези, за якою решта важливих макроекономічних показників є сталою. Для оцінювання політичного ризику з цього погляду бажано брати некласичні показники ступеня ризику: семіваріацію та семіквадратичне відхилення.

Визначити залежність зовнішнього боргу від політичного ризику можливо, використавши модель[1]:

$$B = (Im - Ex) + (T - G) + e$$

за умови, що

$$\mathrm{Ex} = M\left[Y(R_p)\right] - C - I - G + M\left[\mathrm{Im}(R_p)\right], \tag{4.78}$$

де B — зовнішній борг; Im — імпорт; Ex — експорт; T — прибутки держави; G — видатки держави; e — випадкова величина (відхилення); Y — валовий внутрішній продукт; C — невиробниче (особисте) споживання; I — валові інвестиції; $M[Y(R_p)]$ та $M[\mathrm{Im}(R_p)]$ — математичне сподівання залежності валового внутрішнього продукту та імпорту (відповідно) від політичного ризику R_p; $M\,[\cdot]$ — оператор математичного сподівання.

За допомогою моделі (4.78) та з урахуванням умови платоспроможності, яку запропонували М. Бурда та Ч. Виплош[2], можна також визначити критично допустимий рівень зовнішньої заборгованості з урахуванням ступеня політичного ризику.

---

[1] *Маханець Л. Л.* Зовнішній борг і політичний ризик // Фінанси України. — 2000. — № 2. — С. 64—69.

[2] *Бурда М., Виплош Ч.* Макроекономіка: Європейський контекст / Пер. з англ. — К.: Основи, 1998. — С. 614.

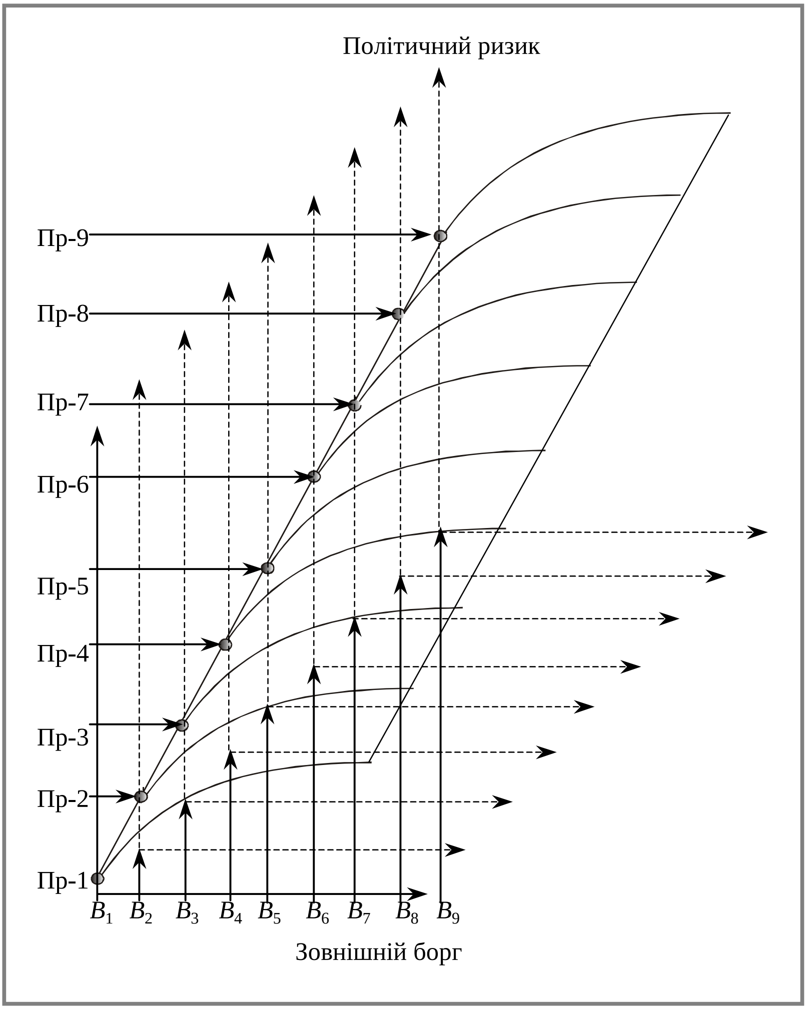


Рис. 4.6. Площина обсягу зовнішнього боргу стосовно до ступеня політичного ризику

Умова платоспроможності має такий вигляд:

$$B - F \leq \frac{\text{Ex} - \text{Im}}{1 + i^*}, \qquad (4.79)$$

де B — зовнішній борг; F — приватні зарубіжні активи; Ex та Im — експорт та імпорт; i^*— відсоткова ставка (як правило, LIBOR).

Використовуючи модель (4.78), з нерівності (4.79) отримаємо:

$$B \le \frac{M[Y(R)] - C - I}{1 + i^*} + F . \quad (4.80)$$

Доречно також установити залежність ступеня політичного ризику від зміни ВВП (ΔY). Можна твердити, що чим більший обсяг приросту ВВП (ΔY), тим меншим повинен бути політичний ризик (звичайно, за решти рівних умов).

Виходячи зі статистичних даних щодо стану української економіки, кореляційну залежність ступеня політичного ризику від зміни ВВП можна подати як:

$$R_p = -0{,}2413 \times \Delta Y^2 - 2{,}8714 \times \Delta Y + 59{,}89 + u , \quad (4.81)$$

де R_p — ступінь політичного ризику; ΔY — зміна обсягу ВВП; u — випадкова величина.

Відповідні дані фактичного ступеня політичного ризику (обчисленого згідно з індексом BERI) та ступеня політичного ризику, оціненого за запропонованою вище кореляційною залежністю (4.81), наводяться в таблиці 4.8.

Таблиця 4.8

ЗМІНА ВВП ТА ПОЛІТИЧНИЙ РИЗИК за 1993—2000 рр.

Рік	Зміна ВВП, %*	Політичний ризик**	Політичний ризик (оцінений)
1993	–14.2	52	52.00815
1994	–22.9	55	–0.89507
1995	–12.2	59	59.00599
1996	–10		64.474
1997	–3.2		66.60757
1998	–1.7		64.07402
1999	–0.4	61	60.99995
2000	6		33.9748

* Статистичні дані взяті зі звітів Business Central Europe, September, 2001.
** Дані взяті з розрахунку політичного ризику для країн методом BERI.

Як бачимо, в 1994 році сталося різке падіння ВВП, що погіршує результати наших розрахунків. Тому для виведення залежності політичного ризику від зміни ВВП абстрагуймося від інформації за цей рік, згладжуючи дані.

Після проведеного вище аналізу можна визначити оцінку залежності (взаємозв'язку) ступеня політичного ризику від двох чинників (зміни ВВП та зовнішньої заборгованості), яка матиме вигляд:

$$R_p = 51.34 + 3.07\sqrt{B} - 0.004\Delta Y^2 . \qquad (4.82)$$

У нашому випадку коефіцієнт детермінації становить $R^2 =$ = 0,937932, а оцінний коефіцієнт детермінації $\widehat{R}^2$ =0,917243. Виконаний *F*-тест та коефіцієнт розбіжності за Г. Тейлом *v* (*v* = 0,30 для даної залежності) підтверджують, що модель є адекватною.

Знаючи оцінку залежності зміни обсягу валового внутрішнього продукту від ступеня політичного ризику та умову платоспроможності (фіксуючи решту інших показників), можна побудувати графік залежності ступеня політичного ризику від зміни ВВП і зовнішнього боргу (рис. 4.7).

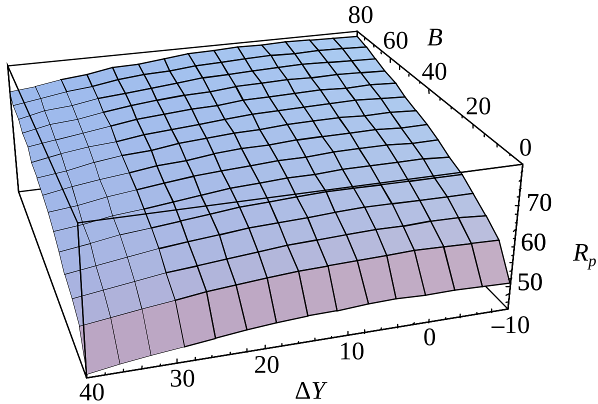


Рис. 4.7. Оцінка залежності ступеня політичного ризику від зміни обсягу ВВП та зовнішнього боргу

Оцінка залежності ступеня політичного ризику від зміни обсягів ВВП та зовнішнього боргу подана поверхнею (заштрихована частина). З рис. 4.7 видно, що під час зростання зовнішнього боргу *B* відбувається зростання ступеня політичного ризику R_p. Водночас зі зростанням ВВП (ΔY) ступінь політичного ризику знижується. Визначивши цю залежність, можна прогнозувати гранично допустиму величину зовнішнього боргу за бажаного (прогнозованого) рівня ВВП і заданого ступеня політичного ризику. Для цього оцінювання та аналізу доречно використовувати як один із варіантів модель (4.82) та відповідну, зображену на рис. 4.7, поверхню, котра є оцінкою обсягу зовнішнього боргу за певного, визначеного (прогнозованого) значення оцінки ступеня політичного ризику та прогнозованого обсягу зміни ВВП. Рівень зовнішньої заборгованості, що його держава матиме за бажаного ступеня політичного ризику та прогнозованої зміни ВВП, знаходиться на заштрихованій поверхні (рис. 4.7). Зазначимо, що для підвищення рейтингу на міжнародній арені держава прагне знизити ступінь свого політичного ризику. З рисунка випливає, що за великих значень ΔY (що означає економічне зростання) країна може допустити і великий зовнішній борг за відносно малого ступеня політичного ризику (у світовій практиці це справджується для США). За від'ємного ΔY та низького рівня зовнішньої заборгованості ступінь політичного ризику є досить високим (згідно з нашою моделлю — від 50 і вище).

Зі зростанням зовнішніх кредитів (позичок) (для $\Delta Y < 0$) політичний ризик різко підвищується.

З урахуванням (4.82) можна побудувати ізокванти ризику за R_p = const = C), перетворивши відповідним чином (4.82):

$$C = \alpha + \beta\sqrt{B} + \gamma\Delta Y^2. \tag{4.83}$$

Або після певних перетворень

$$B = \left(\frac{C - \gamma\Delta Y^2 - \alpha}{\beta} \right)^2. \tag{4.84}$$

Припустимо, що C набуває значень 50, 55, 60, 65 тощо. Тоді карта ізоквант (4.84) має вигляд:

$$B = 0.0\,000\,017\Delta Y^4 - 0.19, \quad \text{якщо} \quad C = 50,$$
$$B = 0.0\,000\,017\Delta Y^4 - 1.42, \quad \text{якщо} \quad C = 55,$$
$$B = 0.0\,000\,017\Delta Y^4 - 7.96, \quad \text{якщо} \quad C = 60,$$
$$B = 0.0\,000\,017\Delta Y^4 - 19.8, \quad \text{якщо} \quad C = 65,$$
$$B = 0.0\,000\,017\Delta Y^4 - 36.94, \quad \text{якщо} \quad C = 70.$$

Слід зауважити, що необхідно брати:

$$\Delta Y^4 = \begin{cases} \Delta Y^4, \text{ якщо } \Delta Y \geq 0, \\ -\Delta Y^4, \text{ якщо } \Delta Y < 0. \end{cases}$$

З урахуванням вищенаведених міркувань можна побудувати карту ізоквант ризику (рис. 4.8).

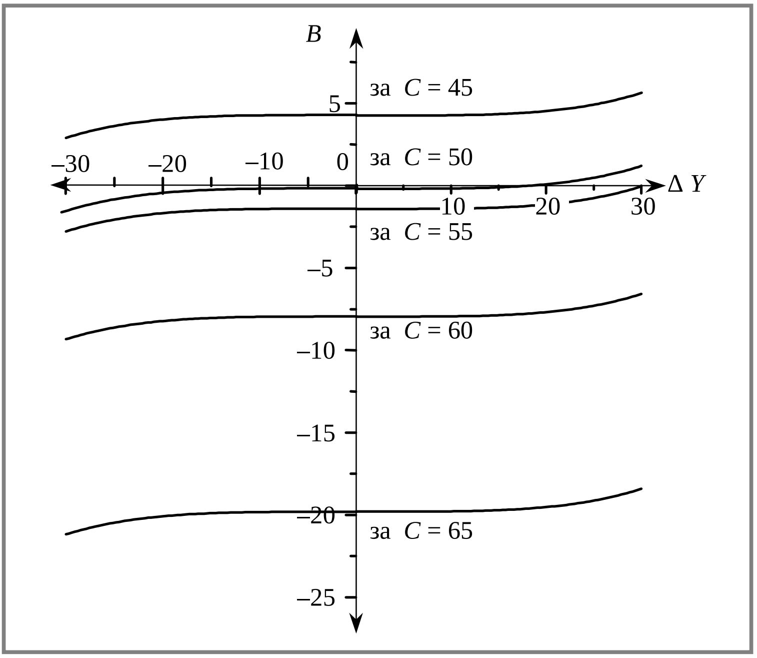


Рис. 4.8. Карта ізоквант ризику

Карта ізоквант ризику дозволяє прогнозувати зміну зовнішнього боргу з урахуванням бажаного ступеня політичного ризику та прогнозованої зміни ВВП.

Таким чином, запропонована модель дає можливість визначити інтервал зміни рівня зовнішньої заборгованості, який не веде державу до боргової кризи.

Отже, прогнозуючи рівень соціального становища, стабільності політичного курсу, ступінь конфліктності між гілками влади, індекс інфляції тощо, тобто ступінь політичного ризику, а також прогнозуючи обсяг приросту ВВП, можна прогнозувати і раціональний рівень зовнішньої заборгованості, який відповідає значенням прогнозованих чинників і який може собі дозволити уряд. Більший обсяг зовнішніх боргів призведе до зростання ступеня політичного ризику (щодо прогнозованого, бажаного), зниження рейтингу держави на міжнародній арені та до пов’язаної з цим низки негативних явищ (наприклад зниження інвестиційної привабливості).

4.7. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Поясніть, що спільного мають та чим відрізняються наведені в даному розділі економіко-математичні моделі.
2. Охарактеризуйте основні гіпотези та припущення, покладені в основу побудови моделі рекламної кампанії.
3. Цілі та припущення, які становлять підґрунтя кількісного аналізу проблеми взаємозаліку боргів підприємств.
4. Висвітліть концептуальні положення (гіпотези), покладені в основу моделі оцінювання ринкової вартості підприємств.
5. Сутність методологічних та методичних аспектів, покладених в основу моделі вибору інвестиційного проекту з множини альтернативних варіантів.
6. Поясніть сутність концептуальних засад, на які спирається проблематика прогнозування обсягів податкових надходжень з урахуванням ризику.

4.8. Завдання для самостійної роботи

1. Альтернативні підходи у моделюванні оцінювання ринкової вартості підприємств. Наведіть приклади.

2. Поясніть сутність та математичний апарат урахування фактора часу в фінансових операціях.

3. Поясніть сутність методології та методики аналізу і врахування ризику фінансових операцій. Наведіть приклади.

4. Методи коригування норми дисконту з урахуванням ризику. Їх сутність.

5. Поясніть, як обчислюються майбутні грошові потоки у вигляді серії сплат довільної величини, що генеруються початковими інвестиціями. Наведіть приклади.

6. Основні принципи та кроки імітаційного моделювання інвестиційних ризиків. Наведіть приклади.

7. Назвіть основні методи аналізу інвестиційних проектів. Поясніть, у чому полягає сутність методу чистої теперішньої вартості та що покладено в основу математичної моделі цього методу.

8. Основні аспекти врахування взаємозв’язків між політичним ризиком, валовим внутрішнім продуктом та зовнішнім боргом країни. Назвіть основні підходи щодо моделювання та опрацювання цих залежностей.

9. Сутність моделі вибору інвестиційного проекту з множини альтернативних варіантів. Розв’язання прикладних задач, побудова алгоритму та створення комп’ютерної програми, що реалізує багатокрокову процедуру послідовного відсіювання альтернативних варіантів проекту та вибір одного з них. Розв’язання конкретних прикладів. Аналіз отриманих результатів.

5 РОЗДІЛ ВИРОБНИЧІ ФУНКЦІЇ

5.1. ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Нагадаймо, що економіко-математичні моделі вирізняються серед інших математичних моделей тим, що об’єктом моделювання є економічні процеси, а сама модель відображає економічні взаємозв’язки та відносини, що існують у реальній дійсності (в реальних процесах та явищах). Здійснюючи ідентифікацію та інтерпретацію економіко-математичних моделей, використовують економічні показники.

Кожна економіко-математична модель реального явища характеризується:

а) об’єктом моделювання;

б) системним описом об’єкта;

в) цілями щодо побудови моделі;

г) принципами моделювання;

д) апаратом моделювання;

є) способами ідентифікації й інтерпретації результатів.

Об’єктом моделювання може бути або реальна господарська система, або один чи кілька процесів, що розвиваються в такій системі. Для побудови моделі треба не просто вказати найменування об’єкта, а й дати його опис у вигляді системи, тобто виявити суттєві грані його взаємодії із зовнішнім середовищем, його структуру. Моделі, що відображають (заміщують) один і той самий об’єкт з різних поглядів, слід вважати різними.

Нагадаймо також, що поняття адекватності моделі має кілька різних граней. *По-перше*, можна вести мову про адекватність моделі щодо досліджуваного реального процесу, розуміючи під цим ступінь відповідності його характеристик характеристикам об’єкта. *По-друге*, потрібно оцінювати адекватність моделі щодо поставленої задачі (цілей).

Апарат моделювання визначається типом математичних конструкцій, що використовуються для побудови моделі. Найпоширенішими є моделі, побудовані за допомогою апарату лінійної алгебри, регресійного аналізу, лінійних диференційних рівнянь. Інколи кажуть про специфічний апарат — «апарат виробничої функції». Вибір того чи іншого апарату економіко-математичного моделювання значною мірою ґрунтується на гіпотезах, що покладені в основу побудови моделі.

5.2. ЗАГАЛЬНЕ ПОНЯТТЯ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ

Нашим завданням є виокремити з множини моделей виробничу функцію (ВФ) як особливий вид економіко-статистичних моделей. Розгляньмо з цією метою зміст кожної з ознак: А—Е (п. 5.2)[1]:

А. *Об'єкт моделювання*. Безпосереднім об'єктом моделювання щодо ВФ є процеси виробництва продукції в реально функціонуючих протягом певного відрізку часу господарських системах на підприємстві (фірмі), в галузі, регіоні чи в народному господарстві загалом. Відповідно, щодо рівня модельованої системи виробничі функції поділяються на макроекономічні, регіональні, галузеві, а також виробничі функції підприємства.

У низці випадків як самостійний об'єкт моделювання розглядається не вся господарська система, а її частина, що складається з технічно відносно однорідних виробничих одиниць.

Б. *Системний опис об'єкта*. У теорії виробничих функцій виробничий процес аналізується з погляду перетворення ресурсів у продукт (продукцію). Входами є потоки ресурсів різноманітного виду, повністю чи частково використовувані у виробництві, виходом — готова до реалізації продукція. Функціонуючі в системі ресурси (чинники), технологія та умови організації виробництва визначають потенційні можливості та стан процесу (системи).

В. *Цілі моделювання*. ВФ будується для розв'язання певних економічних задач, що стосуються аналізу, прогнозування й планування (у вузькому розумінні слова). Використовуються ВФ як самостійно, так і в складі більш загальних економіко-математичних моделей. Мету побудови ВФ можна охарактеризувати як аналіз чинників щодо суттєвого впливу їх на обсяги випуску продукції.

---

[1] *Клейнер Г. Б.* Производственные функции: Теория, методы, применение. — М.: Финансы и статистика, 1986.

Однак у кожній конкретній ситуації ця мета має свої особливості, що істотно впливають на процес побудови функції. Доцільно розрізняти такі можливі способи використання ВФ:

1) визначення обсягів випуску за фіксованих обсягів та показників основних ресурсів (випадок, коли ці обсяги несуттєво відрізняються від тих, що спостерігались у минулому);

2) те саме щодо випадку обсягів ресурсів, котрі суттєво відрізняються від усіх, що спостерігалися в минулому;

3) визначення обсягів випуску за заданих значень обсягів ресурсів, що належать до деякої неперервної області (зокрема таких, що змінюються в заданих межах);

4) визначення впливу на обсяг випуску малої зміни обсягів одного чи кількох ресурсів;

5) визначення (виявлення) характеристик виробничого процесу, що виражається через параметри ВФ.

Г. *Принципи моделювання.* В основі найпоширенішого поняття ВФ лежать принципи, котрі виражають роль аксіоматичних положень теорії виробничих функцій:

1) обсяг випуску продукції, виробленої даною виробничою системою за певний період, визначається обсягами засобів та предметів праці й живої праці, що беруть участь у процесі виробництва впродовж цього періоду;

2) зв’язок між обсягами випуску й обсягами засобів праці, предметів праці й живої праці є для даної виробничої системи закономірним і відносно стійким;

3) у низці випадків додатково береться гіпотеза, що в певних межах будь-яка незалежна зміна аргументів ВФ допускає реальну інтерпретацію.

Д. *Апарат моделювання*. Основним «матеріалом» для побудови виробничої функції є залежності $y = f(x_1, ..., x_n)$, де y — показник випуску (обсяг), $x_1, ..., x_n$ — обсяги виробничих ресурсів (чинників) (кількість чинників ВФ, як правило, не перевищує 10). Функція $f(\cdot)$ вважається визначеною в досить широкій області n-мірного евклідового простору (R^n) та такою, що обчислюється в області свого визначення. Останнє означає, що системний аналітик повинен мати у своєму розпорядженні алгоритм, який дозволяв би обчислювати значення $f(\cdot)$ у будь-якій точці, де вона визначена. Як правило, ВФ $y = f(x_1, ..., x_n)$ будується шляхом підбору найбільш адекватних функцій із певного параметричного класу $F = \{y = f(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_k)\} = f(x, a)$, де $a = (a_1, ..., a_k)$ — вектор параметрів.

Отже, безпосереднім апаратом моделювання в межах даної концепції ВФ є параметричні класи функцій, що залежать від

$n \leq 10$ змінних. Як правило, залежність функції $f(\cdot)$ від змінних і параметрів задається в явному вигляді (або режимі) чи у вигляді функціональних диференціальних чи інтегральних рівнянь.

Е. *Ідентифікація й інтерпретація моделі.* Змінні $y, x_1, ..., x_n$ ототожнюються з показниками обсягів випуску й основними, які беруть участь у виробництві, чинниками (ресурсами). Припускається можливість специфікації параметрів $a_1, \ldots, a_k$ ВФ на підставі статистичних (чи експертних) даних щодо ресурсів та випуску продукції за попередні періоди, а також планових і опосередкованих даних. Метод оцінки параметрів не визначається однозначно, він залежить від цілей побудови ВФ, особливостей модельованого процесу та вихідних даних. Інтерпретація параметрів, у свою чергу, залежить від методу їх оцінювання. Часто для інтерпретації виокремлених параметрів залучаються їх вирази через значення показників, а також значення часткових похідних $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$.

5.3. ЕКОНОМІЧНИЙ ЗМІСТ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ

Отже, вважається, що ВФ є економіко-статистичною моделлю процесу виробництва продукції в даній економічній системі й виражає стійку закономірну кількісну залежність між об’ємними показниками ресурсів і випуску продукції.

Чи існують підстави вести мову про наявність такої залежності в будь-якій виробничій системі? Основним елементом процесу виробництва є, як відомо, праця як свідома цілеспрямована діяльність людини, а також предмети й засоби праці. Кількість та якість виробленої продукції визначаються обсягом та структурою цих чинників, а також способом організації їх взаємодії.

Переходячи до більш детального аналізу, зауважимо, що в складі предметів праці виокремлюють сировину, матеріали, напівфабрикати, комплектувальні складові — усі ті елементи, які ввійдуть у готову продукцію. Засоби праці, у свою чергу, поділяються на знаряддя праці (обладнання, машини, двигуни, інструменти, оснащення тощо), будівлі та споруди, засоби комунікації й транспорту. Неоднорідною за своїм складом є й сама праця: розрізняють окремі професійно-кваліфікаційні групи персоналу тощо.

Продукція, як правило, теж не є однорідною як за функціональними характеристиками, так і за способом виробництва. За певний період часу (наприклад за рік) дана виробнича система виробляє та реалізує споживачам продукцію широкої номенклатури.

Виробничий процес у певній ланці управління — підприємстві (фірмі) — здійснюється на основі певної технології, тобто сукупності прийомів і способів переробки сировини, матеріалів, напівфабрикатів у готову продукцію.

Реально існуючий спосіб виробництва визначається, з одного боку, прагненням до оптимального узгодження технологій, а з другого — обмеженими можливостями щодо забезпечення ресурсами та їх розміщення. По суті, обмеження в застосуванні технологій викликані двома основними причинами: неможливістю за короткий термін змінити і структури виробничих ресурсів, і умови, що їх накладає зовнішнє середовище (народногосподарські та зовнішньоекономічні вимоги).

Якщо йдеться про опис виробничого процесу протягом тривалого проміжку часу, то обмеження, що пов’язані з перетворенням ресурсів, послаблюються, і як основний чинник, що визначає випуск (поряд з якістю та кількістю ресурсів), виступають економічні обмеження.

Подібно до того, як поняття технології виробництва розширюється до поняття технології багатономенклатурного виробництва, природного сенсу набуває й поняття технології щодо більш узагальнених економічних систем — промислового об’єднання, холдингу, підгалузі, галузі, регіону. У цьому випадку кількість технологічних способів, природно, зростає. Відповідно, дедалі більшу роль відіграють організаційно-економічні аспекти, що накладають обмеження на можливості реалізації оптимальної комбінації та узгодження елементарних технологій.

У реальній виробничій діяльності економічних систем технологія є лише відносно стабільною. Постійно відбувається процес еволюційного розвитку (можливий і занепад), удосконалюються знаряддя праці, з’являються нові види матеріалів, упроваджуються досягнення науки. Разом з тим виробничі процеси загалом характеризуються певними стійкими ознаками.

Використовуючи групові характеристики ресурсів і продукції, можна вести мову про групову (агреговану) технологію — спосіб переробки різного виду сировини, матеріалів, напівфабрикатів у готову продукцію заданих функціональних груп. Така технологія описує взаємодію ресурсів уже не на рівні окремих видів обладнання, оснащення, матеріалів і працівників, а на рівні узагальнених агрегованих показників — витрат ресурсів. Побудова таких показників (окрім трудових) спирається в основному на вартісні категорії.

Технологічний розвиток підприємств (фірм), поєднаний, зокрема, зі змінами елементарних технологій, — процес безперервний. Однак чим більш агреговано розглядається економічна система, чим вищий рівень агрегування показників, тим стабільнішою є агрегована технологія. У цьому розумінні можна говорити про технологічну еволюцію як про форму динаміки економічної технології (хоча впродовж короткого часового інтервалу такий еволюційний підхід правомірно використовувати й для підприємств, фірм, галузей). Отже, наявним є економічний стрибок.

Оскільки ВФ призначена для відображення певної агрегованої економічної технології, моделювання для відповідного періоду доцільно здійснювати так, щоб ураховувався технологічний стрибок.

Питання щодо стійкості агрегованої економічної технології пов'язане не лише зі стабільністю структури й інтенсивністю застосовуваної технології, але й з незмінністю показників, що використовуються для вимірювання ресурсів і випуску продукції.

Найвищий ступінь агрегування ресурсів досягається тоді, коли всі виробничі ресурси характеризуються двома узагальнюючими чинниками, що відображають відповідно обсяги матеріалізованої (минулої) та живої праці.

5.4. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ТА ЕТАПИ ПОБУДОВИ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ

Поняття ВФ певного об'єкта як функції, що разом з областю визначення найкращим чином апроксимує агреговану економічну технологію τ, визначає строгу послідовність дій для побудови ВФ.

Оскільки ВФ будується в результаті використання обчислювального методу та оптимізації V, етапом у цій побудові є використання так званих пробних функцій та областей їх визначення, тобто вибір бінарного відношення ρ_τ на множині обчислюваних функцій. Вибір цього відношення відіграє визначальну роль у побудові ВФ, оскільки в нього входить і визначення виду функції, і формування принципів оцінювання параметрів. Для цього потрібно зібрати, опрацювати й використати необхідну інформацію щодо виробничого процесу та впливу на нього зовнішніх умов, сформулювати цілі й завдання, для розв'язання яких будується ВФ, проаналізувати засади існування та властивості економіко-технологічної функції τ; як правило, попередньо фіксується система показників оцінки ресурсів і випуску (μ, ν). Виокремлюють такі етапи побудови ВФ:

Етап 1. Формулювання цілей побудови ВФ.

Етап 2. Системний аналіз об'єкта, що моделюється.
Етап 3. Економічний якісний аналіз об'єкта.
Етап 4. Визначення системи показників виробничої функції (μ, ν).
Етап 5. Формування інформаційної бази для аналізу технології та для побудови ВФ.
Етап 6. Аналіз існування та властивості економічної технології.
Етап 7. Визначення принципів порівняння функцій щодо їх наближення до технології τ (формування відношення) $\rho = \rho_\tau$.
Етап 8. Визначення обчислювального алгоритму V для оптимізації відношення ρ_τ.
Етап 9. Підготовка (вибір) програмного забезпечення щодо реалізації алгоритму на комп'ютері.
Етап 10. Обчислення ВФ та її використання.

5.5. ВИДИ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ

Нехай Φ_n — множина всіх функцій від n змінних, визначених у деякій області M простору R^n. Підмножина $F \subset \Phi_n$ називається *параметричною* (точніше, k-параметричною), якщо існує підмножина $A_k \subset R^n$ і відображення $\rho: A_k \to \Phi_n$, тобто таке, що $\rho(A) = F$. У k-параметричному класі F кожна функція

$$f(x) = f(x_1, ..., x_n) \in F$$

цілком визначається вектором параметрів $a = (a_1, ..., a_k)$ і може бути записана як $f_a(x)$. Зміст параметризації деякої множини функцій, по суті, є аналогічним уведенню системи координат, за допомогою якої кожна функція з цієї множини ототожнюється з послідовністю своїх координат. Параметризацію допускають лише не дуже широкі множини F, зокрема, множина Φ_n не може бути k-параметричною за жодного скінченого k. Якщо відображення ρ є лінійним, тобто $p(a' + a'') = p(a') + p(a'')$, a', $a'' \in A_k$, то клас F утворюють функції, *лінійні за параметром*. Що ж спільного можуть мати функції f, які належать деякій параметричній множині F? Припустимо, що всі функції $f \in F$ диференційовані до другого порядку включно, а множина A_k збігається з R^n. Співвідношення $y = f_a(x), \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f_a}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_a}{\partial x_i \partial x_j}$ розглядатимемо як систему з $n + 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ рівнянь відносно k параметрів $a_1, ..., a_k$. Кількість параметрів k, як правило, має той самий порядок, що й кількість змінних (n), тому здебільшого параметри $a_1, ..., a_n$ можна вирази-ти як функції від $x_1, ..., x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}$, використовуючи k рівнянь з цієї системи. Підставляючи отримані вирази у рівняння, що залишилися, можна отримати систему диференційних рівнянь щодо функції $f(\cdot)$, яка вже не містить параметрів. Часто у такий спосіб вдається досягти того, щоб множина розв'язків отриманої системи рівнянь щодо функції $f(\cdot)$ збіглася б з F, тобто F був би загальним інтегралом системи. Власне, те, що функції з класу, який задовольняє цю систему диференційних рівнянь з частковими похідними, і є тією властивістю, що об'єднує їх. Ця обставина дає ключ до вибору виду виробничої функції певного об'єкта. Система диференційних рівнянь (разом із частковими похідними за чинниками є визначальною у формуванні таких систем. Використовуються також інші характеристичні функції — середня ефективність чинника, еластичність випуску за чинником, гранична норма заміщення чинника тощо), що поєднує між собою в загальному випадку значення функції, її аргументів і характеристик (в тій самій точці, що й значення функції). Інформація, що може бути отримана на стадії якісного (вербального) економічного аналізу модельованого об'єкта, часто дозволяє прийняти чи відхилити припущення щодо існування такого зв'язку.

Для кожного з видів функцій можна вказати одну чи кілька систем умов для характеристики функцій даного виду, що однозначно виокремлюють цей вид з-поміж інших. Ці умови являють собою чи співвідношення між різними характеристиками функції, чи опис поведінки окремих характеристик на різних підобластях області її визначення.

5.5.1. Двофакторні виробничі функції

У наведеному нижче списку функцій вони розташовуються в порядку зростаючої складності їх у запису й, відповідно, збільшення кількості необхідних для цього параметрів. Усі ці функції допускають можливість їх модифікації:

1. *Функція з фіксованими пропорціями чинників* (*функція Леонтьєва*).

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right), \quad (5.1)$$

де a_1, a_2 — параметри.

Відомо кілька альтернативних систем (гіпотез), що виокремлюють функції цього виду:

а) гранична продуктивність першого чинника є дворівневою кусково-постійною незростаючою функцією від співвідношення $\frac{x_1}{x_2}$ з нульовим нижнім рівнем. Гранична продуктивність другого чинника — неспадна кусково-постійна функція від $\frac{x_2}{x_1}$ з нульовим нижнім рівнем;

б) функція є розв'язком такої задачі математичного програмування:

$$y \to \max,$$
$$a_1 y \le x_1,$$
$$a_2 y \le x_2,$$

де y — змінна, яку оптимізують;

в) функція є однорідною, а еластичність заміни чинників дорівнює нулю;

г) функція може бути отримана з функції з постійною еластичністю виду

$$y = \left(\left(\frac{x_1}{a_1} \right)^{a_3} + \left(\frac{x_2}{a_2} \right)^{a_3} \right)^{\frac{1}{a_3}}$$

шляхом граничного переходу: $a_3 \to -\infty$.

Функція Леонтьєва призначена в основному для моделювання строго детермінованих технологій, які не допускають відхилення від технологічних норм і нормативів щодо використання ресурсів на одиницю продукції. Як правило, вона використовується для формалізованого опису дрібномасштабних або цілком автоматизованих об'єктів.

2. *Функція Кобба—Дугласа*

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}. \qquad (5.2)$$

Тут також використовується кілька систем гіпотез, що виокремлюють клас функцій Кобба—Дугласа серед двічі диференційованих функцій від двох змінних:

а) еластичності випуску за чинниками є постійними:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{y} = a_1; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y} = a_2.$$

Розв'язок цієї системи диференційних рівнянь у частинних похідних першого порядку належить до класу функцій Кобба—Дугласа;

б) еластичність функції за одним із чинників є постійною, і функція є однорідною;

в) функція є однорідною, а еластичності зменшення чинників за Алленом та Михайловським дорівнюють одиниці;

г) гранична продуктивність кожного чинника є пропорційною його середній продуктивності;

д) функція є однорідною як функція від x_1, x_2 і як функція від x_1 за будь-якого фіксованого x_2;

є) функція може бути отримана з функції з постійною еластичністю шляхом здійснення заміни виду

$$y = a_0 (a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_3})^{\frac{1}{a_3}}$$

та граничного переходу $a_3 \to 0$. Функція Кобба—Дугласа найчастіше використовується для формалізованого опису середньомасштабних господарських об'єктів та економіки країни.

3. *Лінійна функція*

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 . \qquad (5.3)$$

Передумови та гіпотези:

а) граничні продуктивності чинників є постійними:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = a_2 ,$$

а в нулі функція набуває нульового значення;

б) гранична продуктивність одного з чинників є постійною, і функція однорідна першого степеня:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1, \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} = 1 ;$$

в) функція однорідна, й еластичність заміни чинників, за Алленом, є нескінченною;

г) еластичність випуску за чинниками обернено пропорційна їхній середній продуктивності.

Лінійна функція застосовується для моделювання великомасштабних систем (велика галузь, народне господарство в цілому), у яких випуск продукції є результатом одночасного функціонування великої кількості різноманітних технологій. Особливу роль відіграє гіпотеза постійності граничних виробничих чинників чи їх необмеженого заміщення.

4. *Функція Аллена*:

$$y = a_0 x_1 x_2 - a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 \qquad (5.4)$$

визначається за такими умовами: швидкості зростання граничних продуктивностей є постійними, і функція є однорідною.

Функція Аллена за a_1, $a_2 > 0$ призначається для формалізованого опису виробничих процесів, у яких надмірне зростання будь-якого з чинників негативно впливає на обсяг випуску продукції. Зазвичай така функція використовується для формалізованого опису дрібномасштабних виробничих систем з обмеженими можливостями переробки ресурсів.

5. *Функція постійної еластичності заміщення чинників* (*функція* CES)*:*

$$y = \left(a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_3}\right)^{a_4}. \qquad (5.5)$$

Передумови та гіпотези:

Функція є однорідною, й еластичність заміщення чинників є постійною.

Функція CES застосовується у разі відсутності точної інформації щодо рівня взаємозаміни виробничих чинників, і разом з тим є підстави вважати, що цей рівень суттєво не зміниться за зміни обсягів залучених ресурсів, тобто коли економічна технологія має властивість певної стійкості щодо певних пропорцій чинників. Функція CES (за наявності засобів оцінки її параметрів) може використовуватись для моделювання систем будь-якого рівня.

6. *Функція Солоу*:

$$y = \left(a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_4}\right)^{a_5} \qquad (5.6)$$

характеризується тим, що величина відсоткової зміни граничної норми заміщення чинників, що пов’язане зі зміною одного з чинників на один відсоток, не залежить від початкового рівня чинників.

Дана функція може використовуватись приблизно в тих самих ситуаціях, що й функція CES. Функція Солоу може використовуватись у моделюванні системи різних масштабів.

7. Багаторежимна функція:

$$y = \left(a_{11} x_1^{a_0} + a_{21} x_2^{a_0}\right)^{a_1} \ldots \left(a_{1k} x_1^{a_0} + a_{2k} x_2^{a_0}\right)^{a_k}. \qquad (5.7)$$

Функція є однорідною, еластичність функції за першим аргументом є згладженою *k*-рівневою спадною ступінчастою функцією.

Багаторежимна функція — одна з найзагальніших. Вона використовується для формалізованого опису та моделювання процесів, у яких рівень віддачі кожної додаткової одиниці ресурсу стрибкоподібно змінюється залежно від співвідношення чинників. Функцію доцільно застосовувати за наявності апріорної інформації щодо кількості режимів k, а інколи й щодо величини «перехідної» області між режимами (чим більше $|a_0|$, тим чіткіше виокремлюються режими).

5.5.2. Багатофакторні виробничі функції

В економіко-математичному моделюванні широко використовують багатофакторні виробничі функції.

Один із найбільш раціональних способів переходу від двофакторних до багатофакторних функцій полягає в такому.

Розгляньмо двофакторну функцію:

$$y = \varphi_1 (x_1, x_2). \tag{5.8}$$

Аргумент x_2 цієї функції розглянемо як узагальнений показник, що залежить також від двох інших чинників x_3, x_4:

$$x_2 = \varphi_2(x_3, x_4),$$

де φ_2 — деяка функція. Підставляючи цей вираз у формулу (5.8), отримаємо трифакторну функцію

$$y = \varphi_1(x_1, \varphi_2(x_3, x_4)),$$

що виражає залежність показника y від аргументів x_1, x_3, x_4. Цей процес можна продовжити, вважаючи, зокрема, що x_3, у свою чергу, залежить від деяких чинників.

У загальному вигляді: якщо задано $(n - 1)$ двофакторних функцій $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_3, x_4)$, $\varphi_{n-1}(x_{2n-3}, x_{2n-2})$, то дістанемо n-факторну функцію:

$$y = f(x_1, ..., x_n)$$

у результаті послідовної підстановки їх. Операція такої підстановки (суперпозиції) має очевидний економічний сенс: другий аргумент, наприклад двофакторної функції, послідовно подається у вигляді залежності від показників нижчих (деталізованих) рівнів. Неважко перевірити такі властивості операції суперпозиції:

а) якщо $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ — неспадні функції, то f — також неспадна функція;

б) якщо $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ — лінійно-однорідні функції, а φ_1 — однорідна функція ступеня однорідності γ, то f — однорідна функція ступеня однорідності γ;

в) якщо $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — увігнуті неспадні функції, то f — увігнута неспадна функція.

Отже, якщо двофакторні функції $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ є неокласичними, то отримана в результаті їх суперпозиції функція f також буде неокласичною.

Для виробничих функцій від n змінних справедливими є твердження, які показують, що клас функцій, поданих у вигляді суперпозиції будь-яких двофакторних функцій, є досить широким. Строго доводиться, зокрема, що будь-яка неперервна функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ від n змінних (за умови $n \geq 4$) може бути подана у вигляді суперпозиції неперервних функцій від трьох змінних. У свою чергу кожна неперервна функція від трьох змінних може бути отримана як суперпозиція функцій від двох змінних. Відомо також, що будь-яку неперервну функцію від двох змінних можна з будь-якою заданою точністю апроксимувати суперпозицією неперервних функцій від однієї змінної та функції $y = x_1 + x_2$.

Перелік та окремі характеристики деяких класів багатофакторних виробничих функцій наводяться у низці підручників[1].

5.6. МАКРОЕКОНОМІЧНІ ВИРОБНИЧІ ФУНКЦІЇ

Як зазначалося у попередньому матеріалі, *виробнича функція* (ВФ) відображає залежність результату від витрат ресурсів. У формалізованому описі економіки (точніше, її виробничої підсистеми) за допомогою ВФ ця підсистема розглядається як «чорна скринька», на вхід якої постачають ресурси $R_1, \ldots, R_n$, а на виході отримують результати у вигляді річних обсягів виробництва різних видів продукції $X_1, \ldots, X_m$.

Як ресурси (чинники виробництва) на макрорівні здебільшого розглядаються накопичена (уречевлена) праця у формі виробничих фондів (капітал) K і поточна (жива) праця L. А як результат — валовий випуск X (чи валовий внутрішній продукт Y, чи національний дохід N). У всіх випадках результат узагальнено називатимемо випуском і позначатимемо через X.

Стосовно до обґрунтування чинника K можна твердити, що минула праця втілена в основних і обігових, виробничих і невиробничих фондах.

[1] *Клейнер Г. Б.* Производственные функции: Теория, методы, применение. — М.: Финансы и статистика, 1986.

Вибір конкретної структури *K* визначається метою дослідження, а також структурою розвитку виробничої і невиробничої сфер упродовж досліджуваного періоду часу. Якщо в цей період у невиробничу сферу вкладається приблизно постійна частка новоствореної вартості, і невиробнича сфера має приблизно однаковий вплив на виробництво, то це є підставою для того, щоб у ВФ враховувати лише виробничі фонди. Виробничі фонди складаються з основних і обігових. Якщо структура їх (співвідношення між цими складовими) приблизно постійна впродовж періоду, за який вивчається об’єкт дослідження, то достатньо враховувати у ВФ лише основні виробничі фонди.

Отже, економіка заміщується своєю моделлю у формі, взагалі кажучи, нелінійної ВФ:

$$X = F(K, L), \tag{5.9}$$

тобто випуск продукції є функцією від затрат ресурсів (фондів і праці).

Далі аналізуватимемо основні характеристики ВФ на прикладі неокласичної мультиплікативної ВФ (зокрема функції Кобба—Дугласа) та деяких інших, що використовуються в економічних моделях на макроекономічному рівні.

Виробничу функцію $X = F(K, L)$ називають ***неокласичною***, якщо вона є гладкою і задовольняє умови, які мають чітку, несуперечливу, обґрунтовану економічну інтерпретацію:

1) $F(0, L) = F(K, 0) = 0$ — за відсутності одного з ресурсів виробництво не є можливим;

2) $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$ — зі зростанням обсягів ресурсів зростає й випуск;

3) $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ — зі зростанням обсягів ресурсів швидкість зростання випуску знижується;

4) $F(+\infty, L) = F(K, +\infty) = \infty$ — за необмеженого зростання обсягів одного з ресурсів випуск також необмежено зростає.

Мультиплікативна ВФ задається виразом:

$$X = AK^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}, \ \alpha_1 > 0, \ \alpha_2 > 0, \tag{5.10}$$

де A — коефіцієнт нейтрального технічного прогресу; α_1, α_2 — коефіцієнти еластичності за фондами K і працею L відповідно. Отже, ВФ (5.10) має властивість 1, що є адекватним реальній економіці: за відсутності одного з ресурсів виробництво неможливе.

Частковим випадком неокласичної мультиплікативної ВФ є функція Кобба—Дугласа:

$$X = AK^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}, \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = 1-\alpha.$$

Мультиплікативна ВФ визначається за даними часового ряду випуску і витрат ресурсів (X_t, K_t, L_t), t = 1, …, T, де T — довжина часового ряду, і вважається, що має місце T співвідношень:

$$X_t = \delta_t AK_t^{\alpha_1} L_t^{\alpha_2},$$

де δ_t — коригуючий випадковий коефіцієнт, який приводить у відповідність фактичний і теоретичний випуски і відображає флуктуацію результатів під впливом низки інших (випадкових) чинників, окрім цього, математичне сподівання $M\delta = m_\delta = 1$.

Оскільки в логарифмах ця функція є лінійною:

$$\ln X_t = \ln A + \alpha_1 \ln K_t + \alpha_2 \ln L_t + \varepsilon_t,$$

де $\varepsilon_t = \ln\delta_t$, $M\varepsilon = m_\varepsilon = 0$, то отримуємо модель лінійної множинної регресії. Параметри функції: A, α_1, α_2 можуть бути визначені з використанням методу найменших квадратів за допомогою низки стандартних пакетів прикладних програм, які реалізують метод множинної регресії (приміром, STATGRAF чи SAS для персональних ЕОМ).

Як приклад можна навести мультиплікативну функцію валового випуску продукції однієї з країн, яка обчислюється на підставі статистичних даних за декілька років і систематично оновлюється на основі використання нових даних за поточний період. Зокрема, виходячи з даних за 1960—1994 рр. можна подати виробничу функцію (валовий випуск) Російської Федерації (млрд руб.) залежно від вартості основних виробничих фондів (млрд руб.) і чисельності зайнятих у народному господарстві (млн осіб) (усі вартісні показники наведено у порівнянних цінах для даного періоду):

$$X = 0{,}931K^{0{,}539} L^{0{,}594}. \qquad (5.11)$$

Мультиплікативна функція задовольняє також властивість 2, що є адекватним реальній економіці: зі зростанням витрат ресурсів випуск також зростає, тобто:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 AK^{\alpha_1 - 1} L^{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 X}{K} > 0, \text{ оскільки } \alpha_2 > 0. \qquad (5.12)$$

Частинні похідні випуску за чинниками, що їх називають ***граничними продуктами***, або ***граничними*** (***маржинальними***) ***ефек-***

тивностями чинників, є приростом випуску на малу частку приросту чинника:

$\frac{\partial F}{\partial K}$ — граничний продукт фондів (гранична фондовіддача, гранична ефективність фондів);

$\frac{\partial F}{\partial L}$ — граничний продукт праці (гранична продуктивність праці, гранична ефективність праці).

Для мультиплікативної функції з (5.12) випливає, що гранична фондовіддача пропорційна середній фондовіддачі $\frac{X}{K}$ з коефіцієнтом α_1, а гранична продуктивність праці — середній продуктивності праці $\frac{X}{L}$ з коефіцієнтом пропорційності α_2:

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}, \qquad \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L}. \tag{5.13}$$

Із рівнянь (5.13) випливає, що за $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$ граничні віддачі чинників є меншими від середніх; за цих умов мультиплікативна функція має властивість 3, що часто спостерігається у реальній економіці: зі зростанням витрат ресурсу його гранична віддача спадає, тобто:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial K^2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1)AK^{\alpha_1 - 2}L^{\alpha_2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1)\frac{X}{K^2} < 0, \quad \alpha_1 < 1,$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial L^2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1)AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2 - 2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1)\frac{X}{L^2} < 0, \quad \alpha_2 < 1. \tag{5.14}$$

Із (5.10) також зрозуміло, що мультиплікативна функція має властивість 4, тобто за необмеженого зростання обсягу одного з ресурсів випуск також необмежено зростає. Таким чином, мультиплікативна функція $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$ є неокласичною.

Здійснимо економічну інтерпретацію параметрів A, α_1, α_2 мультиплікативної ВФ.

Параметр *A* здебільшого інтерпретують як параметр нейтрального технічного прогресу: за тих самих значень α_1 і α_2 випуск у точці (*K*, *L*) буде тим більшим, чим більше *A*.

Для інтерпретації параметрів α_1 і α_2 скористаємось поняттям коефіцієнтів еластичності. Існує поняття еластичностей як логарифмічних виробничих чинників:

$$\alpha_K = \frac{\partial \ln X}{\partial \ln K} = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)}{\frac{\Delta K}{K}}, \tag{5.15}$$

$$\alpha_L = \frac{\partial \ln X}{\partial \ln L} = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)}{\frac{\Delta L}{L}}.$$

Оскільки у нашому випадку

$$\ln X = \ln A + \alpha_1 \ln K + \alpha_2 \ln L,$$

то

$$\alpha_K = \frac{\partial \ln X}{\partial \ln K} = \alpha_1, \qquad \alpha_L = \frac{\partial \ln X}{\partial \ln L} = \alpha_2,$$

тобто α_1 — коефіцієнт еластичності випуску за основними фондами, а α_2 — коефіцієнт еластичності випуску за працею.

Із (5.15) видно, що коефіцієнт еластичності чинника показує, на скільки відсотків збільшиться випуск, якщо чинник зросте на 1 %.

Наприклад, згідно з ВФ (5.11) збільшення основних фондів (ОФ) на 1 % приведе до зростання валового випуску на 0,539 %, а збільшення зайнятих на 1 % — на 0,594 %. Якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то має місце працеощадне (інтенсивне) зростання.

Розгляньмо темпи зростання випуску:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\alpha_2}. \tag{5.16}$$

Якщо піднести обидві частини (5.16) до степеня $\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, то отримаємо співвідношення

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha}, \tag{5.17}$$

у якому праворуч — зважене середньогеометричне темпів зростання витрат ресурсів, де ваговими коефіцієнтами слугують відносні коефіцієнти еластичності чинників:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \qquad 1 - \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Якщо $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$, то випуск зростає швидше, ніж у середньому зростають чинники, а якщо $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ — повільніше. Справді, якщо чинники (їх обсяги) зростають, тобто $K_{t+1} > K_t$, $L_{t+1} > L_t$, то згідно з (5.16) зростає і випуск (тобто $X_{t+1} > X_t$), отже, за $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} > \left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K}\right)^{\alpha}\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha}.$$

Темпи зростання випуску є більшими ніж середні темпи зростання чинників. Отже, якщо $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$, то ВФ описує зростаючу економіку.

Лінією рівня на площині K, L, чи ***ізоквантою***, називають множину тих точок площини, для котрих $F(K, L) = X_0 = \text{const}$.

Для мультиплікативної ВФ ізокванта має вигляд:

$$AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2} = X_0 = \text{const}, \quad \text{або} \quad K^{\alpha_1} = \frac{X_0}{A}L^{-\alpha_2},$$

тобто це є степенева гіпербола, асимптотами якої є осі координат.

Для різних обсягів K, L, що лежать на конкретній ізокванті, випуск дорівнює значенню X_0, що є еквівалентним твердженню про взаємозаміщення ресурсів. Оскільки на ізокванті $F(K, L) =$ $= X_0 = \text{const}$, то

$$dF = \frac{\partial F}{\partial K}dK + \frac{\partial F}{\partial L}dL = 0. \qquad (5.18)$$

У цьому співвідношенні $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$, тому dK і dL мусять мати різні знаки: якщо $dL < 0$, що означає скорочення обсягів праці, то $dK > 0$, тобто зменшення в обсязі $|dL|$, праця заміщується фондами в обсязі dK.

Слушним є таке означення, що випливає з (5.18). *Граничною нормою заміщення (заміни) праці фондами S_K називають відношення модулів диференціалів ОФ і праці:*

$$S_K = \frac{|\,dK\,|}{|\,dL\,|} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K}.$$

І, відповідно, гранична норма заміщення фондів працею (S_L):

$$S_L = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L}.$$

Легко помітити, що $S_K \cdot S_L = 1$.

Для мультиплікативної виробничої функції норма заміщення праці фондами пропорційна фондоозброєності:

$$S_K = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{K}{L} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}k, \qquad k = \frac{K}{L},$$

що є природним, адже брак обсягів праці можна компенсувати її кращою фондоозброєністю.

Ізокліналями називають лінії найшвидшого зростання ВФ. Ізокліналі ортогональні лініям нульового зростання, тобто ортогональні ізоквантам. Оскільки напрямок найшвидшого зростання у кожній точці (K, L) задається градієнтом

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial K}, \frac{\partial F}{\partial L}\right),$$

то рівняння ізокліналі можна записати таким чином:

$$\frac{dK}{\partial F / \partial K} = \frac{dL}{\partial F / \partial L}.$$

Зокрема, для мультиплікативної ВФ маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}, \qquad \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L},$$

тому ізокліналь можна задати диференціальним рівнянням:

$$\frac{1}{\alpha_1} K dK = \frac{1}{\alpha_2} L\ dL,$$

котре має розв’язок

$$K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} L^2 + a}, \quad a = \text{const},$$

$$a = K_0^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} L_0^2,$$

де K_0, L_0 — координати точки, через яку проходить ізокліналь.

Якщо припустити, що $a = 0$, то отримаємо рівняння ізокліналі, що проходить через відповідні точки площини (вона є прямою лінією):

$$K = L\sqrt{\alpha_1 / \alpha_2}.$$

На рис. 5.1 зображені ізокванти та ізокліналі мультиплікативної ВФ.

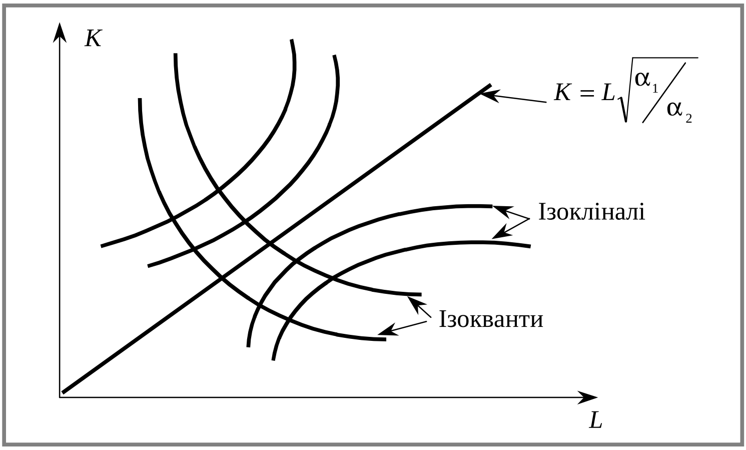


Рис. 5.1. Ізокванти та ізокліналі мультиплікативної ВФ

Аналізуючи чинники зростання економіки, виокремлюють *екстенсивний* чинник зростання (за рахунок збільшення обсягів витрат ресурсів, тобто збільшення масштабу виробництва) та *інтенсивний* чинник зростання (завдяки підвищенню ефективності використання ресурсів).

Як за допомогою ВФ вирізнити та описати *масштаб* та *ефективність* виробництва?

Це можна здійснити, якщо випуск і витрати будуть виражені у співвимірних одиницях, наприклад у вартісній формі. Найпростіше перейти до відносних (безрозмірних) показників вимірювання. У даному випадку ВФ можна подати так:

$$\frac{X}{X_0} = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{L}{L_0}\right)^{\alpha_2}, \qquad (5.20)$$

де X_0, K_0, L_0 — значення обсягів випуску і витрат фондів і праці в базовому році.

Безрозмірну форму (5.20) треба просто привести до початкового вигляду:

$$X = \frac{X_0}{K_0^{\alpha_1} L_0^{\alpha_2}} K^{\alpha_1} L^{\alpha_2} = AK^{\alpha_1} L^{\alpha_2}.$$

Отже, коефіцієнт A отримує економічно прозорий зміст:

$$A = \frac{X_0}{K_0^{\alpha_1} L_0^{\alpha_2}},$$

який зіставляє ресурси з випуском. Якщо позначити випуск і ресурси у відносних (безрозмірних) одиницях вимірювання через $\tilde{X}, \tilde{K}, \tilde{L}$, то ВФ у формі (5.20) можна подати таким виразом (через $\tilde{X}, \tilde{K}, \tilde{L}$):

$$\tilde{X} = \tilde{K}^{\alpha_1} \tilde{L}^{\alpha_2}, \tag{5.21}$$

де $\tilde{X} = \dfrac{X}{X_0}$; $\tilde{K} = \dfrac{K}{K_0}$; $\tilde{L} = \dfrac{L}{L_0}$.

Відшукаємо тепер аналітичний вираз стосовно до ефективності економіки, скориставшись виразом (5.21).

Нагадаймо, що ефективність — це відношення результату до витрат. У нашому випадку — два види витрат: витрати минулої праці у вигляді фондів $\tilde{K}$ і живої праці $\tilde{L}$. Отже, маємо два часткових показники ефективності: $\dfrac{\tilde{X}}{\tilde{K}}$ — фондовіддача, $\dfrac{\tilde{X}}{\tilde{L}}$ — продуктивність праці.

Оскільки часткові показники мають однакову розмірність (вони безрозмірні), то можна знаходити будь-які середні з них. Оскільки ВФ виражена в мультиплікативній формі, то і середнє природно взяти у такій самій формі, тобто як зважене середньогеометричне часткових показників ефективності:

$$E = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}\right)^{\alpha} \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}\right)^{1-\alpha}, \tag{5.22}$$

роль вагових коефіцієнтів тут відіграють відносні еластичності:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \qquad 1 - \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

тобто часткові ефективності входять до загальної (узагальненої) ефективності з такими самими пріоритетами, з якими входять у ВФ відповідні ресурси.

Із (5.22) випливає, що за допомогою коефіцієнта економічної ефективності ВФ можна подати у формі, яка зовнішньо збігається з функцією Кобба—Дугласа:

$$\tilde{X} = E\,\tilde{K}^{\alpha} \tilde{L}^{1-\alpha}, \tag{5.23}$$

але у співвідношенні (5.23) E — не постійний коефіцієнт, а функція від (K, L).

Оскільки масштаб виробництва M подається в обсягах витрачених ресурсів, то, враховуючи ті самі міркування, що й у випадку побудови узагальненого показника економічної ефективності, визначимо і зважене середньогеометричне використаних ресурсів (як масштаб виробництва):

$$M = \tilde{K}^{\alpha} \tilde{L}^{1-\alpha} \ . \tag{5.24}$$

Із (5.23) і (5.24) отримаємо, що випуск $\tilde{X}$ є добутком економічної ефективності та масштабу виробництва:

$$\tilde{X} = EM \ . \tag{5.25}$$

Приклад Розгляньмо знайдену за даними 1960—1995 рр. виробничу функцію валового внутрішнього продукту США:

$$X = 2{,}248 K^{0{,}404} L^{0{,}803} .$$

Обчислимо масштаб та ефективність виробництва.

Валовий внутрішній продукт США, що вимірюється в млрд дол. у цінах 1987 р., зріс з 1960 до 1995 р. у 2,82 раза, тобто $\tilde{X} = 2{,}82$; основні виробничі фонди за цей самий період збільшились у 2,88 раза ($\tilde{K} = 2{,}88$), а чисельність зайнятих — у 1,93 раза ($\tilde{L} = 1{,}93$).

Розв'язання. Обчислимо відносні еластичності за фондами і працею:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0{,}404}{0{,}404 + 0{,}803} = 0{,}3347, \ \ 1 - \alpha = 0{,}6653.$$

Визначимо тепер часткові ефективності ресурсів:

$$E_K = \frac{\tilde{X}}{\tilde{K}} = \frac{2{,}82}{2{,}88} = 0{,}98,$$

$$E_L = \frac{\tilde{X}}{\tilde{L}} = \frac{2{,}82}{1{,}93} = 1{,}46,$$

а також знайдемо узагальнений показник ефективності як зважене середньогеометричне часткових показників:

$$E = E_K^{\alpha} E_L^{1-\alpha} = 0{,}98^{0{,}3347} \cdot 1{,}46^{0{,}6653} \approx 1{,}278.$$

Масштаб обчислюємо як зважене середньогеометричне темпів зростання ресурсів:

$$M = \tilde{K}^{\alpha} \tilde{L}^{1-\alpha} = 2{,}88^{0{,}3347} \cdot 1{,}93^{0{,}6653} \approx 2{,}207.$$

Отже, загальне зростання ВВП з 1960 до 1995 р. у 2,82 раза стало можливим завдяки зростанню масштабу виробництва у 2,307 раза і підвищенню ефективності виробництва у 1,278 раза (2,82 = 1,273 · 2,207).

Виробничу функцію називають однорідною степеня γ, *якщо*:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K, L). \qquad (5.26)$$

Мультиплікативна функція є однорідною степеня $\alpha_1 + \alpha_2$.

Що ж до однорідних ВФ, то можна отримати спрощений вираз для норми заміщення. Дійсно,

$$F(K, L) = L^{\gamma} F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L^{\gamma} f(k),$$

де $f(k) = F(k, 1)$, $k = \dfrac{K}{L}$ — фондоозброєність. Тому

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \gamma L^{\gamma-1} f(k) - L^{\gamma} f'(k) \frac{K}{L^2} = L^{\gamma-1}[\gamma f(k) - k f'(k)],$$
$$\frac{\partial F}{\partial K} = L^{\gamma} f'(k) \frac{1}{L} = L^{\gamma-1} f'(k),$$

звідси маємо:

$$S_k = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k, \qquad (5.27)$$

тобто норма заміщення є функцією лише фондоозброєності.

Для однорідних ВФ уводять поняття **еластичність заміни праці фондами** β_K:

$$\beta_K = \frac{dk / k}{dS_K / S_K}. \qquad (5.28)$$

Ця величина показує, на скільки відсотків необхідно змінити фондоозброєність, щоб досягти зміни норми заміщення на один відсоток. Аналогічно вводиться і показник еластичності заміни фондів працею β_L.

Легко перевірити, що $\beta_K = \beta_L = \beta$.

Для мультиплікативних ВФ $\beta = 1$. Справді, у цьому випадку

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}, \quad \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L},$$

тому

$$S_k = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} k, \qquad \frac{dS_K}{dk} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$\beta = \frac{dk / k}{dS_k / S_k} = \frac{S_k}{k}\left(\frac{dS_k}{dk}\right)^{-1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1.$$

Клас ВФ з **постійною еластичністю заміни** (CES-функцій) будується, зокрема, таким чином:

$$\frac{dk / k}{dS_k / S_k} = \beta = \text{const},$$

звідси маємо: $S_k = Ck^{\frac{1}{\beta}}$ (знаходиться інтегруванням). Тут C — довільна константа. Підставляючи останній вираз у (5.27), дістанемо:

$$Ck^{\frac{1}{\beta}} = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k, \quad \text{або} \quad \frac{f'}{f} = \frac{\gamma}{Ck^{\frac{1}{\beta}} + k},$$

звідси

$$\ln f = \gamma \int \frac{dk}{k + Ck^{\frac{1}{\beta}}} = \frac{\gamma\beta}{\beta - 1} \ln C_1 \left(k^{\frac{\beta-1}{\beta}} + C \right),$$

де C_1 — довільна константа.

У результаті дістаємо:

$$f = C_1 \left(k^{\frac{\beta-1}{\beta}} + C \right)^{\gamma \frac{\beta}{\beta-1}},$$

або у змінних K, L

$$X = C_1 \left[K^{\frac{\beta-1}{\beta}} + CL^{\frac{\beta-1}{\beta}} \right]^{\frac{\gamma\beta}{\beta-1}}.$$

Якщо ввести позначення:

$$\rho = \frac{1-\beta}{\beta}; \quad \frac{1}{C+1} = \alpha < 1; \quad C_1 (C+1)^{\frac{-\gamma}{\rho}} = A,$$

то дістанемо загальний вигляд функції з постійною еластичністю заміщення (CES-функцію).

$$X = F(K, L) = A\left[\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha) L^{-\rho}\right]^{\frac{-\gamma}{\rho}}. \qquad (5.29)$$

У цій функції $A > 0$, оскільки X — це випуск, а якщо $0 < \gamma \leq 1$, $\rho > -1$, то вона задовольняє умови 2 і 3 для неокласичних ВФ. Якщо $\gamma = 1$, $\beta \to 1$ $(\rho \to 0)$, то CES-функція прямує до функції Кобба—Дугласа, а коли $\beta \to 0$ — до функції з фіксованими пропорціями $X = \min(K^\gamma, L^\gamma)$, котра описує випадок заміни (заміщення) чинників ($\beta = 0$). Якщо ($\rho \to -1$, $\gamma = 1$, то CES-функція переходить у лінійну функцію вигляду $X = E_K K + E_L L$, де $E_K = A_\alpha =$ $= A(1 - \alpha)$.

5.7. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Поясніть сутність та основні характеристики виробничих функцій. Наведіть приклади.
2. Охарактеризуйте основні види виробничих функцій. Наведіть приклади.
3. Перелічіть основні етапи та методи побудови виробничих функцій. Охарактеризуйте їх.
4. Поясніть сутність поняття: «Область визначення виробничої функції».
5. Поясніть, у чому полягають основні критерії оцінювання параметрів виробничої функції. Наведіть приклади.
6. Розкрийте сутність основних аспектів обчислювальних методів оцінки параметрів виробничих функцій.
7. Поясніть сутність виробничої функції, підприємства (фірми), яка виражає узгодженість між витратами ресурсів і випуском. Наведіть приклади.

5.8. Завдання для самостійної роботи

1. Задана лінійна виробнича функція:

$$X = F(K, L) = E_K K + E_L L.$$

Пояснити, який економічний зміст мають коефіцієнти E_K, E_L. Побудувати ізокванти та ізокліналі цієї функції. Показати, якою буде норма заміщення праці фондами.

2. Виробнича функція *витрати—випуск* має вигляд:

$$F(K,L)=\min\left(\frac{K}{a_k},\frac{L}{a_L}\right).$$

Показати, який економічний зміст мають її коефіцієнти a_K, a_L. Побудувати ізокванти цієї функції. Знайти вирази для середніх і граничних ефективностей ресурсів. Чи має сенс для цієї функції поняття «норма заміщення одного ресурсу іншим»?

3. Розкрити економічний зміст, що його мають коефіцієнти A, α_1, α_2 мультиплікативної виробничої функції $F(K,L)=AK^{\alpha_1}L^{\alpha_3}$.

Показати, якими є співвідношення між граничними і середніми ефективностями ресурсів. Написати рівняння ізоквант та ізокліналей. Пояснити, якою є норма заміщення праці фондами та в якому випадку можна говорити про працезаощаджувальне зростання економіки.

4. Економіка описується мультиплікативною виробничою функцією: $X=F(X,L)=AK^{\alpha_1}L^{\alpha_3}$. Подати вираз коефіцієнта нейтрального технічного прогресу A через випуск X_0 і витрати ресурсів K_0, L_0 у базовому році.

Довести, що:

а) у темпах зростання виробнича функція набирає вигляд: $\tilde{X}=\tilde{K}^{\alpha_1}\tilde{L}^{\alpha_2}$, де $\tilde{X}=\dfrac{X}{X_0}, \tilde{K}=\dfrac{K}{K_0}, \tilde{L}=\dfrac{L}{L_0}$ — темпи зростання відповідно випуску і ресурсів щодо їх значень у базовому році;

б) з використанням ефективності та масштабу виробнича функція може бути подана у формі: $\tilde{X}=ME$, де $M=\tilde{K}^{\alpha}\tilde{L}^{1-\beta}$, $\alpha=\dfrac{\alpha}{\alpha_1+\alpha_2}$.

5. Пояснити, як експериментально визначити функцію валового випуску національної економіки; які дані необхідно для цього мати.

6. Функцію валового випуску деякої гіпотетичної країни Лапландія визначено за декілька попередніх років. Вона має вигляд: $X = F(K, L) = 0{,}95\,K^{0,5}\,L^{0,6}$.

За базовий період досліджень валовий випуск Лапландії зріс у 3,5 раза, обсяги виробничих фондів — у 5 разів, чисельність зайнятих у — 2,5 раза. Визначити, яка частка зростання випуску пояснюється зростанням масштабу виробництва, а яка — підвищенням ефективності.

7. Довести, що функція з постійною еластичністю заміщення (CES-функція) $F(K,L)=A\left[\alpha K^{-\rho}+(1-\alpha)L^{-\rho}\right]^{\frac{-\gamma}{\rho}}$ за:

а) $\gamma = 1$, $\rho \to 0$ прямує до функції Кобба—Дугласа;

б) $\gamma = 1$, $\rho \to \infty$ прямує до функції *витрати—випуск*.

6 РОЗДІЛ
РЕЙТИНГОВЕ ОЦІНЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЦІ

6.1. АКТУАЛЬНІСТЬ ПРОБЛЕМИ

Виявлення ключових аспектів щодо оцінювання стану та динаміки функціонування економічних систем стає однією з актуальних проблем в економічній практиці та науці. Важливою складовою цієї проблеми є аналіз стану досліджуваної економічної системи.

У зв’язку зі складністю одночасного контролю великої кількості різноманітних показників у фінансово-економічному аналізі значного поширення набули процедури комплексної оцінки, на підставі яких може обчислюватися рейтинг як узагальнена оцінка діяльності економічної системи (ЕС). Під рейтингом розуміють комплексну характеристику ЕС згідно з певною шкалою, де значення рейтингу — це елемент лінійно напівупорядкованої множини.

В Україні рейтингові системи лише починають використовуватися. У нас поки що немає можливості адекватно використовувати такі вельми поширені на Заході методики оцінки економічних систем, як модель Дюпона чи Z-модель Альтмана, розраховані, власне, для американських підприємств 60-х років XX ст.

В Україні розроблена й використовується низка методик, зокрема, щодо рейтингової оцінки діяльності банків, вищих навчальних закладів тощо, зроблені перші кроки до побудови єдиної методології й методики рейтингового аналізу діяльності господарських одиниць, які були б узгоджені із західною системою стандартів і водночас ураховували б особливості вітчизняного соціально-економічного буття.

До недоліків існуючих підходів, наприклад, можна віднести:

1. Непрозорість більшості рейтингових методик оцінки ЕС, відсутність чітких критеріїв використання їх на практиці.

2. Спотворення економічного сенсу деяких показників (що є вихідним матеріалом для обчислення рейтингів) через недосконалість існуючої системи обліку й моніторингу.

3. Орієнтація розробників методик обчислення рейтингів ЕС на лінійні моделі взаємозв'язку показників без обґрунтування умов, у яких допускається їх застосування.

4. Обмеженість і неповнота інформаційної бази в обчисленні рейтингів через небажання керівників достатньо повною мірою та об'єктивно надавати інформацію щодо стану ЕС.

5. У методиках, як правило, ігноруються показники, що характеризують динаміку функціонування ЕС, а також слабоформалізовані показники (у зв'язку зі складністю їх опрацювання).

Нині відбувається процес формування методологічних засад та практики рейтингового управління.

Складність і громіздкість розв'язання перелічених вище проблем, а також зростаюча роль інформаційних технологій у прийнятті управлінських рішень визначає актуальність як проблеми розроблення теорії рейтингового управління, так і розроблення й застосування науково обґрунтованих методик.

6.2. КОНЦЕПЦІЯ РЕЙТИНГОВОГО УПРАВЛІННЯ

Природним способом зниження як складності, так і трудомісткості управління й, зокрема, розроблення стратегічних і тактичних планів ЕС, а отже, і зниження ступеня ризику щодо прийняття некоректних рішень, є факторизація набору показників, що дозволяє суттєво скоротити їх кількість. Така факторизація може бути здійснена в результаті заміни тієї чи іншої групи показників їх інтегрованою комплексною оцінкою. Основні критерії, що висуваються до кожної такої оцінки, полягають у такому[1]:

Критерій 1: інтегрована комплексна оцінка повинна бути загальновизнаною.

Критерій 2: інтегрована комплексна оцінка має бути зрозумілою, тобто повинно бути ясно, які, власне, характеристики та в яких саме пропорціях зосереджені в ній.

Найповніше відповідає критеріям 1 та 2 така широко використовувана у світовій практиці оцінка стану ЕС, як *рейтинг*. Рейтинг являє собою оцінку тих чи інших аспектів діяльності досліджуваної ЕС за фіксованої шкали. Отже, рейтинг є комплексною інформацією щодо стану ЕС, яка подається в максимально згорнутому вигляді.

---

[1] *Богатов О. И., Лысенко Ю. Г., Петренко В. Л., Скобелев В. Г.* Рейтинговое управление экономическими системами. — Донецк: Юго-Восток, 1999.

На жаль, до цього часу використання рейтингу не привело до суттєвої трансформації процедур прийняття рішень користувачами рейтингової інформації (що передусім пов'язано з відірваністю існуючих методик рейтингового оцінювання від реальної схеми прийняття рішень користувачами).

Означення рейтингового управління, наведене нижче, має на меті змінити ситуацію, що склалася.

> **Означення.** *Під рейтинговим управлінням розуміють концепцію прийняття рішень потенційними користувачами на підставі використання рейтингів у процесі реалізації функцій управління.*

Із цього означення випливає, що рейтингове управління є процесом, у якому рейтинг використовується для аналізу, контролю, обліку, прогнозування та регулювання діяльності ЕС. Тому методику обчислення рейтингу можна інтерпретувати як цільову функцію рейтингового управління, значення якої є індикатором стану ЕС.

Суттєвою характеристикою процесу рейтингового управління є те, що рейтингова оцінка одночасно виступає і як інструмент, і як ціль управління. Вибір методики обчислення рейтингу залежить від конкретної стратегії управління (реалізації стратегії планування). Остання визначається набором групи цілей, що відповідають різним аспектам функціонування ЕС, які впорядковані за їх пріоритетами. Кожна ціль поділяється на елементарні підцілі, що впорядковуються як за пріоритетами, так і за термінами їх реалізації.

З погляду рейтингового управління істотними є такі особливості рейтингового оцінювання:

1. Рейтинг є втіленням такої функції управління, як аналіз у його чистому вигляді, тобто «аналіз високого рівня».
2. У підґрунтя рейтингової оцінки закладено принцип відповідності функціонування ЕС низці критеріїв, тобто рейтинг є результатом процесу багатофакторного аналізу ЕС.

Для конкретної ЕС рейтингове управління може мати такі аспекти:

1. *Внутрішнє* рейтингове управління.
2. *Зовнішнє* рейтингове управління.

Об'єктом внутрішнього рейтингового управління є ЕС та її конкуренти. Останні відіграють роль бази для порівняння. Мета внутрішнього рейтингового управління полягає у зміні іміджу ЕС у зовнішньому середовищі.

Об’єктом зовнішнього рейтингового управління є партнери (та контрагенти) ЕС. Потенційними користувачами процедур зовнішнього рейтингового управління у вітчизняних умовах можуть виступати передусім інвестиційні інститути, банки, постачальники стратегічної сировини, абітурієнти та їхні батьки, роботодавці тощо. Для ефективного застосування процедур зовнішнього рейтингового управління повинні виконуватися такі умови:

1. Ресурси (послуги), що їх отримують об’єкти зовнішнього рейтингового управління, є для них настільки значущими, що їх потрібно враховувати.

2. Кількість партнерів (контрагентів) ЕС є настільки великою, що для прийняття управлінських рішень необхідні опрацювання й аналіз великого масиву даних щодо різних партнерів (контрагентів) ЕС відповідно до єдиних стандартів.

Виокремлюється (формально) стратегія рейтингового планування як підклас класу всіх стратегій планування.

Нехай M — фіксована множина методик обчислення рейтингів.

Методики M_1 та M_2 ($M_1, M_2 \in M$) називають порівнянними тоді й лише тоді, коли вони визначають одну й ту саму впорядкованість за рейтинговою оцінкою щодо досліджуваних об’єктів.

Загалом можна вважати, що M складається з попарно непорівнянних методик. Припустимо протилежне, тобто що множина M містить попарно порівнянні методики. Розгляньмо бінарне відношення E, яка визначається так: $(M_1, M_2) \in E$ тоді й лише тоді, коли M_1 та M_2 порівнянні.

Очевидно, що E є відношенням еквівалентності на множині M.

Побудуємо розбиття:

$$\Pi_E = \frac{M}{E} = \{B_1, ..., B_l\}.$$

Оберемо в кожному із блоків B_i, $i = 1, \ldots, l$ найлегше обчислювану методику. Припустимо, що

$$M = \{M_1, ..., M_l\}.$$

Побудована множина M складається з попарно непорівнянних методик.

Визначимо бінарне відношення $\nu \subset MC$ таким чином: $(M_i, c) \in \nu (M_i \in M, c \in C)$ тоді й лише тоді, коли рейтинг, обчислений згідно з методикою M_i, використовується для розв’язання задачі C.

Отже, стратегію планування називають рейтинговою тоді й лише тоді, коли $\nu \neq \varnothing$. Таким чином, за $\nu = \varnothing$ маємо традиційну систему планування, а за $\nu \neq \varnothing$ — рейтингову стратегію планування.

6.3. МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ РЕЙТИНГОВОГО УПРАВЛІННЯ

Процес обчислення рейтингу є оцінкою масиву даних щодо всебічної оцінки діяльності ЕС за фіксованих шкал відповідно до методики, яка визначається з огляду на мету оцінки. Загальна структура процесу обчислення рейтингу схематично наведена на рис. 6.1[1]. Суттєвою характеристикою методики як алгоритму є те, що характер обчислень істотно залежить від входу, тобто від вихідної інформації. Розгляньмо процес обчислення рейтингу ЕС.

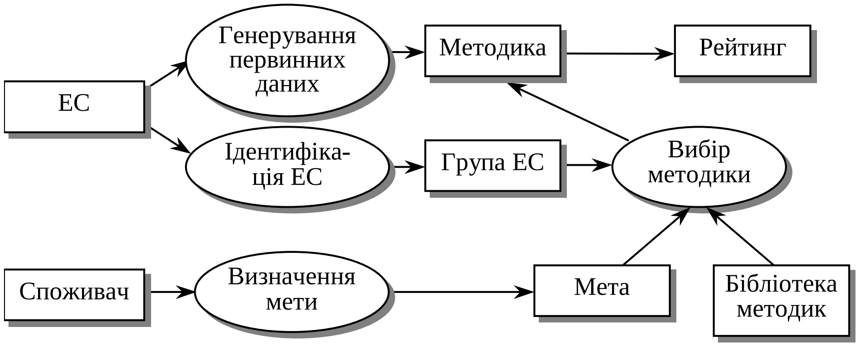


Рис. 6.1. Структура процесу обчислення рейтингу ЕС

Загальна схема процесу обчислення рейтингу

Можна виокремити таких п’ять основних етапів:

Етап 1. Підготовка первинних даних.

Етап 2. Опрацювання даних.

Етап 3. Статистичний аналіз.

Етап 4. Трендовий аналіз.

Етап 5. Обчислення рейтингу.

Взаємодія цих етапів схематично подана на рис. 6.2.

Виокремлення власне цих етапів зумовлене тим, що кожен із них є завершеним процесом опрацювання даних. Справді, результат

[1] *Богатов О. И., Лысенко Ю. Г., Петренко В. Л., Скобелев В. Г.* Рейтинговое управление экономическими системами. — Донецк: Юго-Восток, 1999.

етапу 1 — вихідний набір показників. Результат етапу 2 — набір проміжних показників. Результат етапу 3 — набір агрегатів. Результат етапу 4 — прогноз стану ЕС. Результат етапу 5 — рейтинг досліджуваної ЕС.

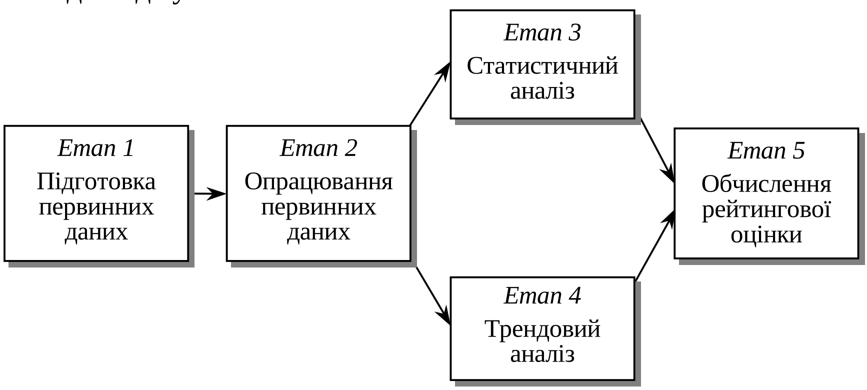


Рис. 6.2. Узагальнена схема процесу визначення рейтингу ЕС

Етап 1. ***Підготовка первинних даних***

Деталізація цього етапу схематично показана на рис. 6.3.

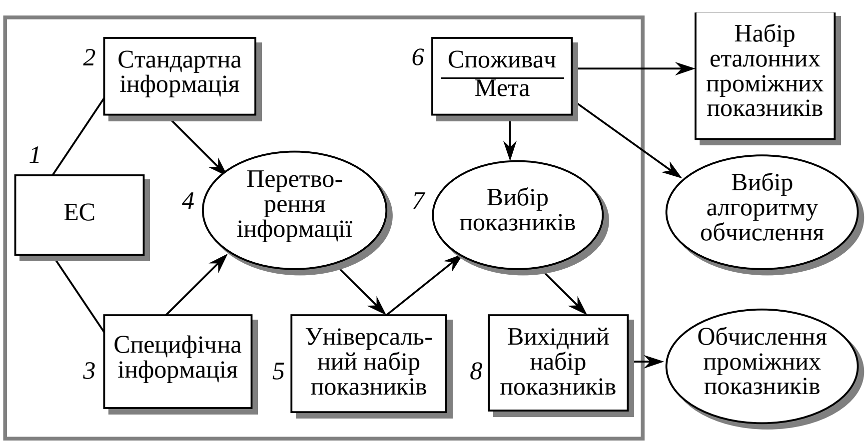


Рис. 6.3. Схема підготовки первинних даних

Підґрунтям для визначення рейтингу ЕС є первинна інформація щодо діяльності ЕС. Її можна поділити на стандартну й специфічну. Цим групам відповідають блоки 2 і 3.

Стандартна інформація є масивом даних, що міститься, наприклад, у трьох звітах: балансовому; щодо прибутків і збитків; руху грошових коштів. Ці звіти генеруються будь-якою ЕС і містять основні дані стосовно до її фінансової діяльності.

Специфічна інформація є масивом даних, який міститься в решті звітів, що використовуються тією чи іншою групою ЕС. Такий набір звітів визначається специфікою діяльності, масштабом ЕС, формою власності тощо. Звіти можуть готуватись як усередині самої ЕС, так і зовні. Специфічна інформація є необхідною для визначення структури базових показників, проведення факторного аналізу їх з огляду на конкретну групу споживачів інформації щодо рейтингу ЕС. Окрім числових даних вона включає в себе результати експертного аналізу. Останні також дають можливість дослідити стан ЕС на якісному (вербальному) рівні. Хоч експертні методи відносно важко формалізувати, необхідність використання їх зумовлена тим, що вони дають можливість оцінити якість менеджменту, позиції на ринку та відповідність реального стану справ значенням показників, які декларуються, зокрема, у звітах, рекламі тощо.

Формування масиву специфічної інформації істотно залежить не лише від типу аналізованої ЕС, а й від типу споживачів рейтингу. Справді, всі основні категорії споживачів інформації стосовно стану ЕС зацікавлені в її комплексній оцінці. Однак складові цієї оцінки мають для них суттєво різну значущість.

Універсальним набором показників (блок 5) називають множину всіх показників, необхідних для визначення рейтингу. Універсальний набір показників формується через поєднання всіх актуальних даних, що містяться у масивах стандартної та специфічної інформації, а також зведення їх до єдиного формату.

У кожному конкретному випадку визначення рейтингу ЕС (тобто залежно від мети аналізу — блок 6) з універсального набору показників формується вихідний набір показників (блок 8). Він являє собою масив даних, що якнайповніше характеризують стан ЕС з погляду її наступного аналізу.

Етап 2. ***Опрацювання первинних даних***

Мета аналізу — вибір вихідного набору показників. Вихід алгоритму — набір проміжних показників. Останні являють собою середні значення, коефіцієнти, а також зведені показники. Для оцінювання набору проміжних показників здійснюють порівняльний аналіз з аналогічним, за структурою, набором проміжних показників еталонної ЕС (чи з нормативами).

Можна виокремити два типи еталонних ЕС. Це, *по-перше*, показники діяльності таких ЕС, що збігаються із суспільно визнаними нормативами, які вважаються оптимальними (для тієї чи іншої групи ЕС). *По-друге* — ЕС, які мають аналогічні об'єкту дослідження спеціалізацію та масштаби. Вони використовуються в основному як база для порівняння ненормованих показників діяльності досліджуваної ЕС. Використання еталонних ЕС другого типу є особливо доцільним в умовах перехідного періоду, коли загальноекономічна ситуація в країні перебуває в стані слабопрогнозованих змін.

Порівняльний аналіз проміжних показників характеризується способом і нормами (специфікацією процесу) порівняння. Для кожного з проміжних показників задаються параметри зміни, межі перехідних станів, а також параметри неоптимальних значень. Результати порівняльного аналізу — основа для групування проміжних показників у агрегати, а також для моделювання стану ЕС у майбутньому.

Етап 3. *Статистичний аналіз*

Під час використання статистичного аналізу виникає проблема щодо порівнянності показників. Існують різні підходи залежно від змісту (семантики) інформації. Так, у фінансах використовують методологію й методи дисконтування та нарощування тощо. Даний етап припускає наявність бібліотек «стандартних» алгоритмів і програм.

Етап 4. *Трендовий аналіз*

У підґрунті трендового аналізу лежить моделювання (згідно з певним алгоритмом) прогнозного стану ЕС.

Мета трендового аналізу — оцінка виникнення (можливого) критичного стану ЕС як сукупності критичних станів проміжних показників відповідно до певного (обраного) алгоритму.

Вихідний матеріал для трендового аналізу — ряди динаміки. Поведінка рівнів ряду динаміки характеризує абсолютні прирости й темпи (зростання й приросту).

Для побудови трендів зазвичай використовують методи згладжування, що ґрунтуються на обчисленні середніх (ковзних, зважених, адаптивних, експоненційних тощо).

На основі використання кореляційного й регресійного аналізів відповідно до обраної моделі будується аналітична форма. Якщо це викликає негаразди, то використовують також авторегресійні моделі.

До одного з найчастіше використовуваних на практиці методів трендового аналізу належить «метод ножиць». Він полягає в такому. Для аналізованого показника виконують оптимістичний і песимістичний прогнози. У точці прогнозування обчислюють розмах (варіацію) «ножиць». Якщо цей розмах є недопустимо великим, то аналізований показник потребує більш ретельного дослідження.

Етап 5. *Обчислення рейтингу*

Деталізація етапу зображена на рис. 6.4. Згідно з обраним алгоритмом обчислюють комплексну оцінку ЕС (блок 3). Вона є якісною характеристикою, отриманою експертним шляхом. Визначають відповідність стану ЕС щодо поставлених цілей, після чого здійснюють обчислення рейтингу (блок 6). Будь-яка обрана методика (блок 4) є обчислювальною процедурою (алгоритмом) і містить систему оцінних показників, що характеризують діяльність ЕС.

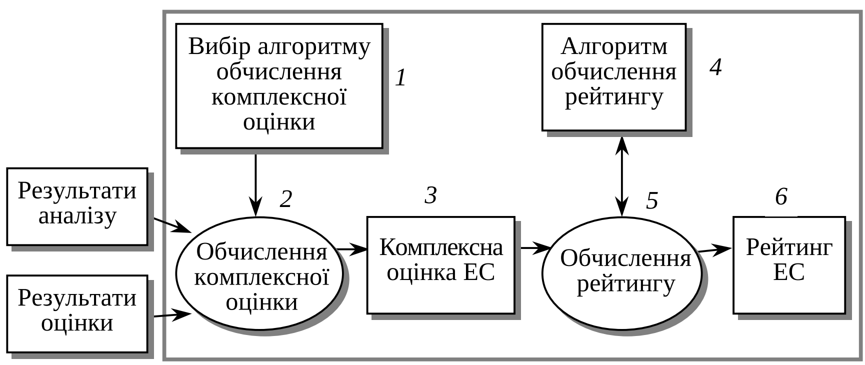


Рис. 6.4. Схема етапу визначення рейтингової оцінки

Як уже зазначалося, можна виокремити два типи методик обчислення рейтингу. До першого типу відносять вибір функції корисності й обчислення її значення на підставі даної комплексної оцінки. До другого типу відносять обчислення рейтингу ЕС на підставі експертних процедур. Основним недоліком першого типу є відносно жорстка регламентація процесу обчислення рейтингу типу функції корисності. Основним недоліком методик другого типу є складність і великі витрати ресурсів у процесі обчислень. Але існують також змішані методики.

6.4. МОДЕЛІ Й МЕТОДИ ПРОЦЕСУ ОБЧИСЛЕННЯ РЕЙТИНГУ ЕС

Адекватною математичною моделлю для аналізу набору показників є система *S*, що визначається як *n*-арне відношення. Будь-яка методика обчислення рейтингу зводиться до послідовної факторизації набору з *n* вихідних показників, результатом якої є елемент лінійно впорядкованої (напівупорядкованої) множини. Уніфікованим засобом опису процесу обчислення рейтингу на підставі аналізу комплексних оцінок (незалежно від конкретної методики) може бути його подання у вигляді дискретного перетворення *M*. Областю дії такого перетворення є *n*-мірний масив *A*, де *n* — кількість використаних комплексних характеристик.

Кожен індекс масиву відповідає одній із комплексних характеристик, а значення цього індексу — допустимі значення оцінок характеристики (обчислені за відповідною шкалою).

Перетворювач *M* функціонує таким чином. Якщо кількість вимірюваних характеристик дорівнює розмірності масиву, то *M* просто здійснює вибір елемента масиву. Якщо ж кількість обчислюваних характеристик менша, ніж розмірність масиву, то перетворювач *M* функціонує таким чином.

Нехай задано набір значень $(\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_k})$, $(1 \le i_1 < ... < i_k \le n;\ k \le n)$ характеристик, що визначаються індексами $i_1, i_2, ..., i_k$. Реакцією перетворювача *M* за вхідних даних $(\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_k})$ є такі три числа $\overline{m}$, $\underline{m}$ та S, що $\overline{m} = \max A(x_1, ..., \alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_k}, ..., x_n)$, $\underline{m} = \min A(x_1, ..., \alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_k}, ..., x_n)$, де максимум і мінімум беруться за всіма допустимими значеннями $x_1, ..., x_n$, а *S* — середнє значення (тобто математичне сподівання) по всіх допустимих значеннях. Числа $\overline{m}$ та $\underline{m}$ називають відповідно оптимістичним і песимістичним рейтингами. У подальшому трійка $(\overline{m}, \underline{m}, S)$ може бути перетворена в те чи інше число відповідно до обраної методики.

Важливу роль у переході від системи *S* до перетворювача *M* відіграють методи прогнозування (як статистичні, так і експертні) та класифікація економічних об’єктів (кластерний аналіз).

6.5. РЕЙТИНГ ЯК ЗАСІБ КЛАСИФІКАЦІЇ ЕКОНОМІЧНИХ ОБ’ЄКТІВ

Сутність рейтингу полягає в оцінюванні позиції аналізованого об’єкта на обраній шкалі. Ця обставина однозначно визначає обчислення рейтингу як спеціальним чином деталізованого варіанта загальної проблеми класифікації економічних (соціально-економічних) об’єктів. Розгляньмо особливості цієї деталізації.

Нехай $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ — універсальна множина вихідних показників. Область значень показника u_i $(i = 1, \ldots, n)$ позначимо через $\nu_a 1_i$ і припустимо, що

$$D = v_a 1_1 x \ldots x v_a 1_n.$$

Нехай $\overline{A}$ — фіксована скінченна множина методик обчислення рейтингу. Шкалу, обрану для методики $A(A \in \overline{A})$, позначимо через $Ш_a$. Таким чином, методика $A(A \in \overline{A})$ реалізує відображення

$$f_a : D \to Ш_a.$$

Використаймо таку форму запису:

$$y = f_A(x_1, \ldots, x_n).$$

Позначимо через $\Pi_{D',A}(D' \subseteq D)$ розбиття множини A, що визначається таким чином:

$$A \equiv B(\Pi_{D',A}), (A, B \in \overline{A})$$

тоді і лише тоді, коли для будь-яких наборів $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in D'$ справедливим є співвідношення $f_A(\overline{\alpha}) \le f_A(\overline{\beta}) \Leftrightarrow f_B(\overline{\alpha}) \le f_B(\overline{\beta})$.

Вважатимемо, що методики A та B $(A, B \in \overline{A})$:

1. D' — узгоджені, якщо $A \equiv B(\Pi_{D',A})$;
2. D' — суперечливі, якщо $A \ne B(\Pi_{D',A})$;

Фактор-множина $\frac{A}{E_{D'A}}$ (де $E_{D'A}$ — еквівалентність, що відповідає розбиттю $\Pi_{D',A}$) визначає усі типи суперечностей між методиками, які належать до множини A та які виникають за обчислення рейтингу на множині D'. Верхній та нижній конуси підмножини позначимо, відповідно, через ВК(X) та НК(X).

Тому доводиться **теорема 1**.

Якщо D — замкнена множина і $\Pi_{D',A} \ne 1 (\varnothing \ne D' \le D)$, то існує такий перетин $Y_{A,D}$ множини НК(D'), що складається з попарно непорівнянних за включенням елементів, для котрих $\Pi_{Y,A} = 1$ для будь-якого

$$Y \in \left(\bigcup_{x \in Y_{A,S}} \frac{\text{НК}(X)}{Y_{A,D}} \right)$$

і $\Pi_{Z,A} \neq 1$ для будь-якого

$$Z \in \frac{\text{НК}(D')}{\left(\bigcup_{x \in Y_{A,D}} \text{НК}(X) \right)}.$$

Значення теореми 1 полягає в такому. Якщо множина типових (в умовах, що розглядаються) наборів показників належить множині $\frac{\left(\bigcup_{x \in Y_{A,D}} \text{НК}(X) \right)}{Y_{A,D}}$, то в обчисленні рейтингу може використовуватися будь-яка методика $A \in \overline{A}$.

У решті випадків виникає проблема щодо обрання допустимої методики, розв'язання якої можна отримати лише в разі використання експертних методів. Доводяться й інші важливі теореми.

Зведення проблеми обчислення рейтингу до проблеми класифікації економічних об'єктів дає можливість застосовувати стандартну техніку декомпозиції кваліметричних моделей для підвищення ефективності обчислень.

6.6. МОДЕЛЮВАННЯ РЕЙТИНГОВОГО ОЦІНЮВАННЯ ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ[1]

Розгляньмо проблему визначення рейтингу вищих навчальних закладів (ВНЗ) серед їх вибірки стосовно до якості та умов надання освітніх послуг. Про актуальність даної тематики свідчить низка публікацій, де подаються результати рейтингової оцінки ВНЗ. У деяких працях методика визначення рейтингу подається лише на концептуальному (вербальному) рівні, в інших — в основу покладено метод анкетування експертів. ЮНЕСКО визначає залежність якості отримуваної освіти від якості складових частин даної системи: кваліфікації професорсько-викладацького персоналу, рівня розробленості навчальних програм, якості довузівсь-

[1] *Вітлінський В. В., Оболенська Т. Є., Жигоцька Н. В.* Моделювання рейтингової оцінки вищого навчального закладу // Економічна кібернетика. — 2000. — № 3, 4. — С. 64—73.

кої підготовки студентів, стану інфраструктури ВНЗ, а також його внутрішнього та зовнішнього середовища тощо[1].

Аналіз та систематизація якісних і кількісних даних про рівень пропонованих ВНЗ освітніх послуг та умов їх надання має неабияке значення, адже система освіти є одним із наймасовіших соціальних інститутів. Визначення рейтингу ВНЗ дає можливість з'ясувати певні наявні тенденції, прагнення, сподівання в системі вищої освіти, на тлі яких більш виразними стають досягнення та недоліки конкретних ВНЗ, а це може слугувати, зокрема, правильному та своєчасному визначенню ними пріоритетних напрямів розвитку власної освітньої політики. Зауважимо також, що визначення рейтингу ВНЗ можна розглядати і як порівняльну оцінку ризиків можливого користувача освітніх послуг щодо отримання ним якісних знань або потенційного роботодавця щодо залучення добре підготовленого фахівця.

Визначимо рейтинг ВНЗ як кількісну експертну оцінку позиції об'єкта дослідження, який аналізується серед групи однотипних об'єктів за системою якісних та кількісних показників (критеріїв) з урахуванням їхніх вагових коефіцієнтів.

Відносно точна та якнайоб'єктивніша оцінка якості освітньої діяльності ВНЗ не може ґрунтуватися на довільному наборі показників. Сучасна соціально-економічна теорія сформувала підхід до оцінки якості діяльності різних об'єктів соціально-економічної сфери не лише як певну якісну характеристику, але і як кількісно вимірюване явище. Це дозволяє сформулювати загальні принципи побудови науково обґрунтованої методики визначення рейтингу однорідних груп об'єктів, зокрема ВНЗ. Як науковий метод порівняння групи ВНЗ з метою їх упорядкування за якістю й умовами надання освітніх послуг передбачає виокремлення адекватних критеріїв якісної та кількісної оцінки об'єкта дослідження, які фіксують органічні, суттєві характеристики і зв'язки між різними складовими, що забезпечують надання якісних освітніх послуг певним ВНЗ; характеристику взаємозалежностей, вагомості та підпорядкування критеріїв оцінювання.

Важливим є визначення, аналіз та структуризація різних груп показників оцінювання, вибір та обґрунтування яких мають здійснюватися з урахуванням цілей порівняння відповідно до теорії менеджменту. У процесі порівняння, на наш погляд, доцільно порівнювати також блоки показників, які оцінюють споріднені риси (характерис-

[1] Матеріали Всесвітньої конференції ЮНЕСКО з вищої освіти // АМ. — 1998. — № 11, 12; 1999. — № 1.

тики) об'єктів дослідження. Зазначимо, що малопродуктивним є порівняння об'єктів (систем) за показниками, які не структуровані та не мають між собою нічого спільного. Звідси — необхідність звернення, скажімо, до кількісних показників. Відомо, що кількісні показники та якісні характеристики переплітаються та взаємодоповнюються.

Останнім часом особливий інтерес викликають системи для підтримки процесів прийняття рішень, ранжирування об'єктів усередині вибірки, наприклад, дорадчі та експертні системи. Назви цих систем повністю відповідають їхньому призначенню: давати на запит користувачів поради щодо їхнього поводження у ситуаціях невизначеності та ризику, спираючись на науково обґрунтовані методи та експертні оцінки досвідчених фахівців.

Задачу визначення рейтингу окремого ВНЗ серед їхньої вибіркової множини можна віднести до класу слабоструктурованих проблем, оскільки вона вирішується в умовах невизначеності, наявності багатьох критеріїв і зумовленого цим ризику.

Питанням упорядкування об'єктів певної вибірки та прийняття рішень в умовах невизначеності й багатокритеріальності присвячено низку наукових праць.

Визначення рейтингу включає такі основні етапи:

1) збір, систематизація та аналітичне опрацювання інформації (статистичної, експертної) за обраний для аналізу період;

2) вибір та обґрунтування системи показників, що використовуються для обчислення рейтингової оцінки, їх структуризація;

3) розроблення методології, методики та інструментарію щодо обчислення інтегрованого показника рейтингової оцінки;

4) ранжирування об'єктів (елементів вибірки) згідно з кількісним значенням інтегрованого показника рейтингової оцінки для кожного з них.

У низці праць пропонується підхід, згідно з яким потрібно сформувати матрицю з елементів a_{ij} ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$), рядки якої ($i = 1, \ldots, n$) означають номери відповідних деталізованих показників якості освітніх послуг ВНЗ, а стовпчики ($j = 1, \ldots, m$) — номери об'єктів (ВНЗ) рейтингового оцінювання. Іншими словами, вибірка складається з m ВНЗ, де a_{ij} — деталізовані показники рейтингової оцінки j-го об'єкта.

Зазначимо, що рейтингове оцінювання може здійснюватися з урахуванням вагомості (пріоритетності) окремих показників чи їх підмножини і має кілька модифікацій.

Перша модифікація полягає у визначенні рейтингу згідно з максимальним значенням кількісної оцінки інтегрованого показника. Тобто найвищий рейтинг матиме той ВНЗ, котрий отримує найбільший сумарний результат. Інтегрований показник визначається за формулою:

$$R_j^{(1)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2}, \quad j = 1, ..., m, \tag{6.1}$$

де $R_j^{(1)}$ — інтегрований кількісний показник якості освітніх послуг j-го ВНЗ, $j = 1, \ldots, m$.

Згідно з цією модифікацією рейтингову оцінку формуватимуть переважно ті деталізовані показники, значення кількісних оцінок яких домінує незалежно від їх важливості (вагомості) та характеризує лише окремі аспекти успішної діяльності об'єкта дослідження. Тут випускаються нюанси, які пов'язані з тим, що збільшення значень деяких показників буде позитивним лише до певного рівня, а подальше їх зростання характеризується неоднозначно. У даному випадку також неможливо врахувати показники, зниження значень яких слід розглядати як позитивне явище, тощо.

Друга модифікація рейтингового оцінювання ґрунтується на врахуванні вагомості кожного деталізованого показника, $i = 1, \ldots, n$:

$$R_j^{(2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i a_{ij}^2}, \quad j = 1, ..., m, \tag{6.2}$$

де $R_j^{(2)}$ — інтегрований кількісний показник якості освітніх послуг j-го ВНЗ, $j = 1, \ldots, m$; k_i — ваговий коефіцієнт відповідного деталізованого показника, $i = 1, \ldots, n$.

Ця модифікація дозволяє врахувати чинник переваг (вагомості) окремого деталізованого показника, оскільки вагові коефіцієнти, які визначаються також експертним способом, беруть до уваги відносну вагомість кожного з обраних показників.

Але недоліком цієї модифікації є те, що деталізовані показники якості дещо нівелюються, бо внесок великих кількісних значень одних деталізованих показників до загальної оцінки рейтингу компенсує низькі значення інших (функція (2) адитивна).

Третя модифікація реалізує важливий принцип співвимірності деталізованих показників шляхом зіставлення їх із показниками того ВНЗ, для якого відповідний деталізований показник має найкраще (максимальне) значення у вибірці. Так, для кожного показника можна відшукати у вибірці максимальне значення, після чого показники a_{ij} нормалізуються, зокрема, діленням їх на відшукане максимальне кількісне значення i-го показника у вибірці:

$$x_{ij} = \frac{a_{ij}}{\max\limits_{j=1,\ldots,m} a_{ij}}, \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m, \tag{6.3}$$

де x_{ij} — стандартизовані (нормалізовані) деталізовані показники якості.

Далі рейтингова оцінка може обчислюватися, наприклад, за формулою:

$$R_j^{(3)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(1 - x_{ij}\right)^2}, \tag{6.4}$$

де $R_j^{(3)}$ — інтегрований кількісний показник якості освітніх послуг j-го ВНЗ, $j = 1, \ldots, m$.

Найвищий рейтинг у вибірці у цьому разі має об’єкт з мінімальним значенням $R^{(3)}$.

Четверта модифікація рейтингового оцінювання має на меті врахування вагомості кожного деталізованого показника відповідно до встановлених експертами пріоритетів:

$$R_j^{(4)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i \left(1 - x_{ij}\right)^2}, \tag{6.5}$$

де $R_j^{(4)}$ — інтегрований кількісний показник якості освітніх послуг j-го ВНЗ, $j = 1, \ldots, m$; k_i — вагові коефіцієнти.

П’ята модифікація рейтингового оцінювання ґрунтується на використанні як кількісної міри ризику середньоквадратичного відхилення від деякої бази, за яку, зокрема, можна обрати математичне сподівання (середнє) кожного з показників об’єктів оцінювання:

$$m_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6.6}$$

де m_i — математичне сподівання (середнє) i-го показника у вибірці.

Можна навести ще низку модифікацій обчислення інтегрованого показника визначення рейтингової оцінки, кожна з яких має недоліки, що знижують об’єктивність та адекватність оцінювання.

Очевидно, має сенс впровадити як адекватну міру інтегрованого показника рейтингової оцінки *модифіковане зважене середньогеометричне* (мультиплікативний підхід) і визначати рейтингову оцінку за формулою:

$$R_j^{(6)} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + x_{ij}\right)^{k_i}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{6.7}$$

де $R_j^{(6)}$ — інтегрований кількісний показник якості освітніх послуг j-го ВНЗ, $j = 1, \ldots, m$.

Якщо i-й показник має додатний інгредієнт (якщо прагнуть досягти його максимально можливого значення), то:

$$x_{ij} = \frac{a_{ij} - a_i^{\min}}{a_i^{\max} - a_i^{\min}}, \quad i \in I_1; \quad j = 1, \ldots, m, \tag{6.8}$$

де I_1 — підмножина показників, які мають додатний інгредієнт; $a_i^{\min}$ — мінімальне кількісне значення i-го показника у вибірці ВНЗ, $a_i^{\min} = \min\limits_{j=1,\ldots,m} a_{ij}$; $i \in I_1$; $a_i^{\max}$ — максимальне кількісне значення i-го показника у вибірці ВНЗ, $a_i^{\max} = \max\limits_{j=1,\ldots,m} a_{ij}$; $i \in I_1$.

Якщо ж i-й показник має від'ємний інгредієнт, тобто коли прагнуть досягти його мінімально можливого значення, то:

$$x_{ij} = \frac{a_i^{\max} - a_{ij}}{a_i^{\max} - a_i^{\min}}, \quad i \in I_2; \quad j = 1, \ldots, m, \tag{6.9}$$

де I_2 — підмножина показників, які мають від'ємний інгредієнт.

Наголосимо також на необхідності того, щоб вагові коефіцієнти k_i, ($k_i \geq 0$), $i = 1, \ldots, n$, які містяться у формулі (6.7), також були нормалізованими, тобто щоб виконувалась умова:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 1. \tag{6.10}$$

У даному разі у формулі (6.7) як високі нормалізовані кількісні значення окремих деталізованих показників, так і низькі значення інших менше нівелюються, ніж за адитивного підходу, який використовується в (6.1), (6.2), (6.4), (6.5) у визначенні інтегрованого показника рейтингового оцінювання. У даному випадку ВНЗ (об'єкти дослідження) будуть упорядковані згідно зі зниженням значень інтегрованого показника R_j, $j = 1, \ldots, m$. Найкращим виявиться об'єкт j_0 з даної вибірки, для якого $R_{j_0}^{(6)}$ набуде максимального значення:

$$R_{j_o}^{(6)} = \max_{j=1,\ldots,m} R_j^{(6)}. \tag{6.11}$$

Зазначимо, що проблема багатоцільового (багатокритеріального) рейтингового оцінювання та впорядкування елементів (об'єктів) певної вибіркової множини характеризується трьома чинниками: {ν, *k*, *w*}, де ν — метод нормалізації, *k* — співвідношення пріоритету (вагомість), *w* — критерій згортки.

Нормалізація застосовується для переходу до порівняльних шкал у значеннях показників якості освітніх послуг і, як результат, рейтингового оцінювання ВНЗ. Під співвідношенням пріоритету (*k*) матимемо на увазі вектор вагових коефіцієнтів (k_1, …, k_n) на компонентах відповідних деталізованих показників. Виникає також проблема щодо знаходження вагових коефіцієнтів (k_i, $i = 1, \ldots, n$), деталізованих показників оцінювання якості освітніх послуг та умов їх надання, що визначають рейтинг конкретного ВНЗ у вибірці.

Під критерієм згортки *w* матимемо на увазі інтегрований (синтезований) показник, згідно з яким визначається рейтинг ВНЗ серед вибірки. За цим показником здійснюється впорядкування множини елементів заданої вибірки. Як правило, критерій згортки є функцією, що відображає R^n в R^1.

Існують різні підходи та методи нормалізації, принципи урахування пріоритету та критерії згортки[1]. Для наших цілей може бути корисним метод аналізу ієрархій, який знайшов уже багато практичних застосувань. Цей метод передбачає декомпозицію проблеми на окремі складові, забезпечуючи її структурування і спрощення з виділенням (побудовою) ієрархії, що містить різні критерії.

Відносна перевага (вагомість) різних кількісних та якісних деталізованих критеріїв (показників) визначається окремо для кожного показника (елементу) ієрархічної структури з погляду елементу, який міститься на безпосередньо вищому рівні ієрархії.

Узагальнений алгоритм методу аналізу ієрархій складається з таких кроків:

Крок 1. Формування багаторівневої ієрархічної структури, котра містить на верхньому рівні інтегрований показник визначення рейтингу, нижче — часткові критерії (блоки показників) і т. д. На найнижчому рівні ієрархії розташовані деталізовані показники, для яких не має сенсу подальша їх деталізація.

Крок 2. Побудова матриць попарних порівнянь елементів ієрархічної структури, що містяться на певному рівні ієрархії (окрім інтегрованого) з погляду критерію безпосередньо вищого рівня, який деталізують порівнювані елементи.

---

[1] *Вітлінський В. В.* Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику. — К.: ДЕМІУР, 1996.

Крок 3. Обчислення значень вагових коефіцієнтів (векторів) кожного з елементів ієрархічної структури (окрім інтегрованого) з погляду елементу, який розташований на безпосередньо вищому рівні ієрархії. Треба наголосити, що після реалізації третього кроку є сенс здійснити перевірку органічності та адекватності кількісної оцінки пріоритетів.

Крок 4. Обчислення вектора вагових коефіцієнтів деталізованих показників якості освітніх послуг, які розташовані на найнижчому рівні ієрархічної структури з погляду інтегрованого показника, що міститься на вершині ієрархічної структури. Іншими словами, обчислюються кількісні значення вагових коефіцієнтів деталізованих показників та проводиться нормалізація їх. Отримані показники k_i, $i = 1, \ldots, n$ повинні задовольняти умову (6.10).

Крок 5. Обчислення інтегрованого показника рейтингового оцінювання конкретного ВНЗ, тобто значень $R_j^{(6)}$, $j = 1, \ldots, m$, згідно з якими здійснюється впорядкування об’єктів досліджуваної множини.

Під час формування ієрархічної структури проводиться декомпозиція показників якості (рейтингового оцінювання) з використанням інтегрованого показника рейтингової оцінки, груп показників, підгруп, різних критеріальних функцій. Зазначимо, що елементи однакових рівнів ієрархії повинні бути зіставлюваними один з одним і мати властивості повноти (враховувати основні суттєві сторони якості об’єктів, що досліджуються) та однопорядковий ступінь їхньої значущості.

У результаті проведеного аналізу, систематизації та групування показників, які впливають на якість або свідчать про умови надання освітніх послуг, розроблена та подана на рис. 6.5—6.9 ієрархічна структура критеріїв оцінювання. Найнижчий рівень наведеної ієрархії містить деталізовані показники, що прямо чи опосередковано впливають на якість та умови надання освітніх послуг ВНЗ або свідчать про результати його освітньої діяльності (рис. 6.6—6.9). Ієрархію завершує інтегрований показник рейтингу ВНЗ (рис. 6.5).

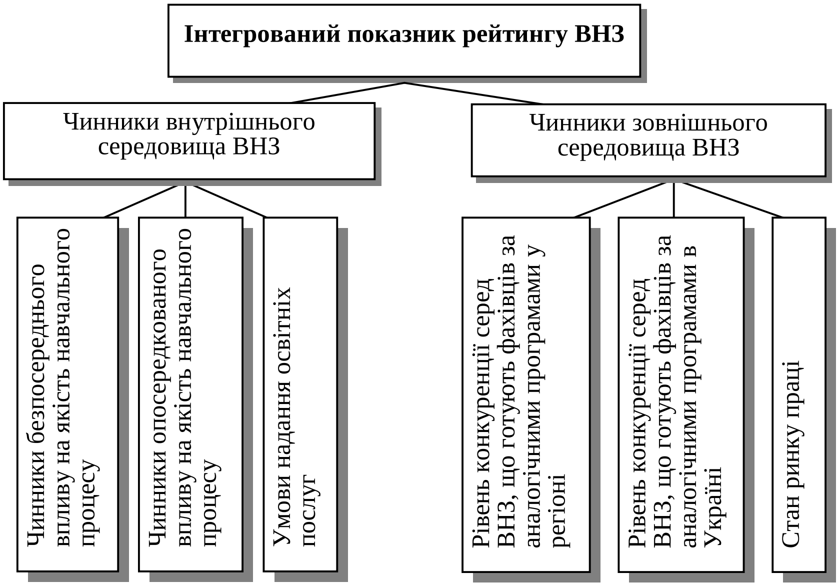


Рис. 6.5. Три верхніх рівні ієрархії показників визначення рейтингу ВНЗ

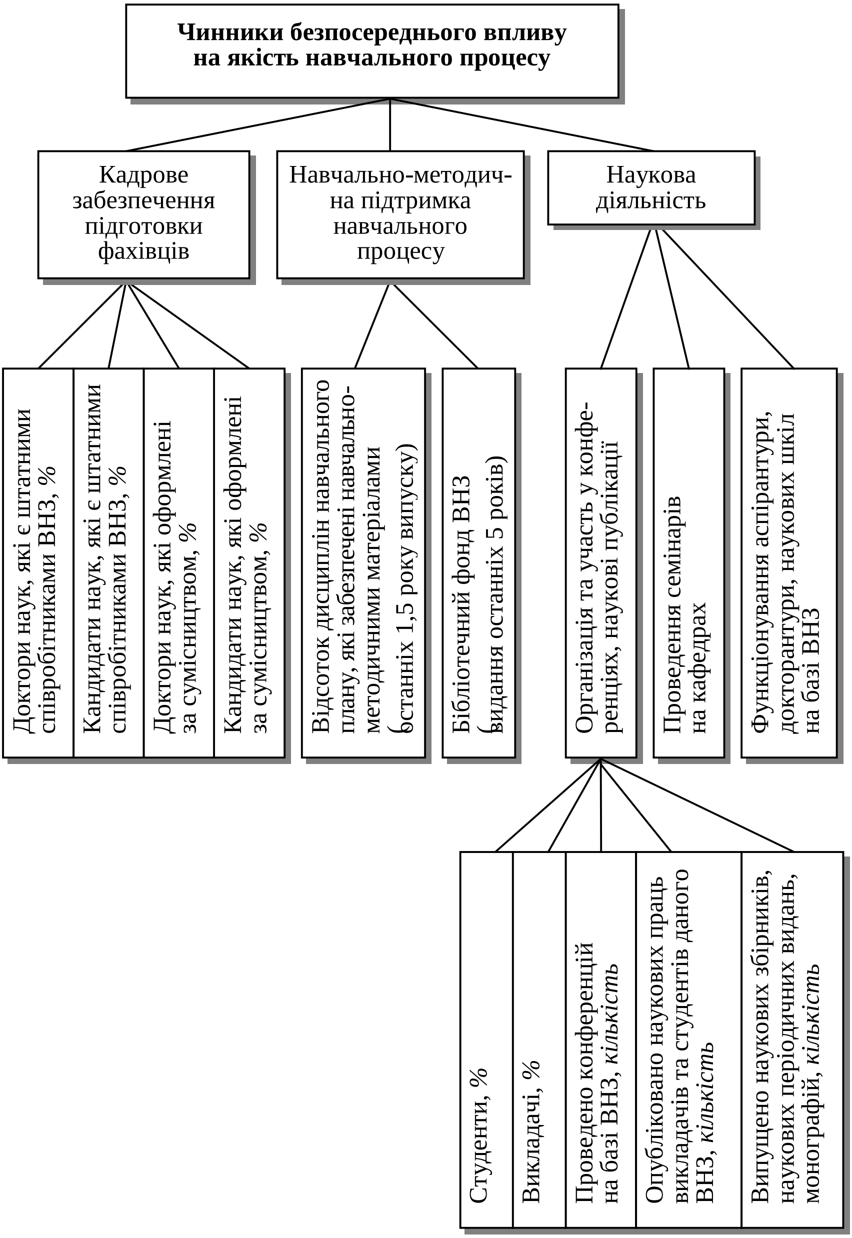


Рис. 6.6. Деталізація блоку чинників безпосереднього впливу на якість навчального процесу

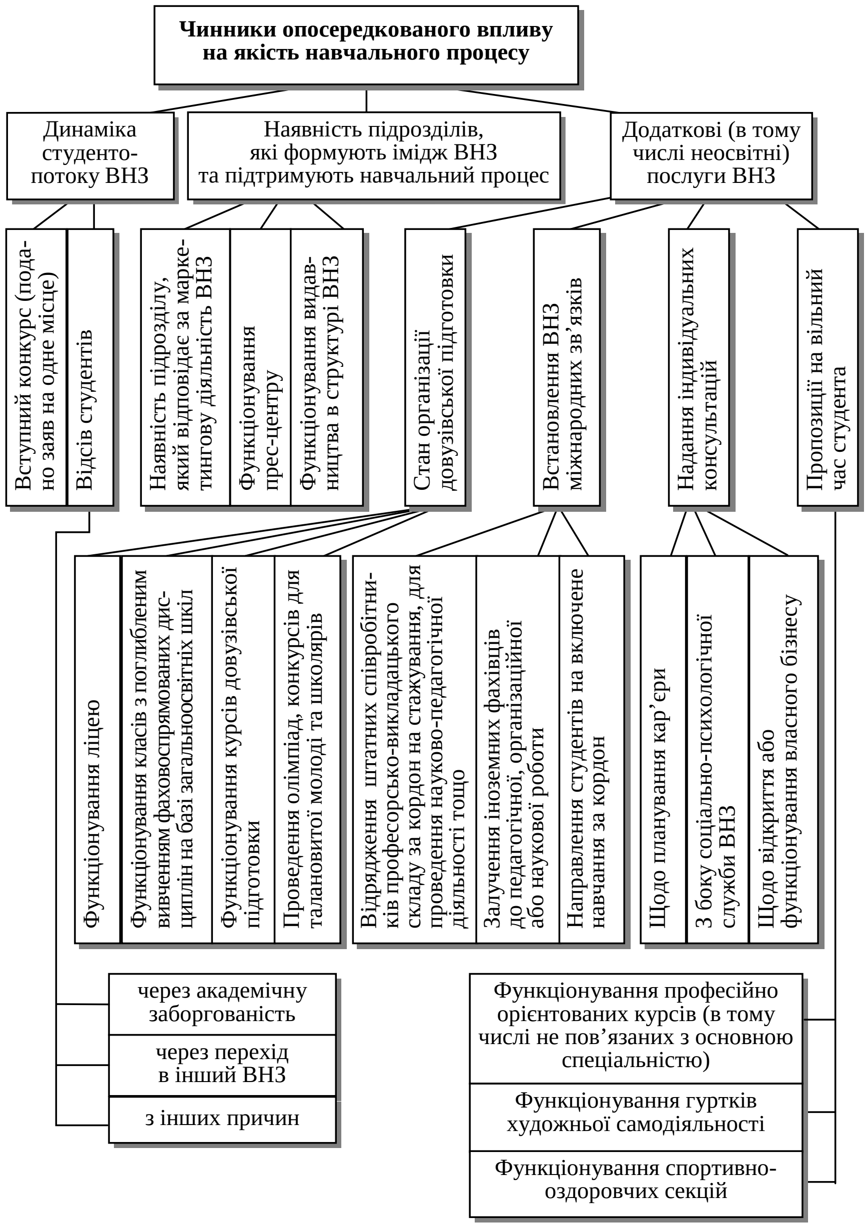


Рис. 6.7. Деталізація чинників опосередкованого впливу на якість навчального процесу

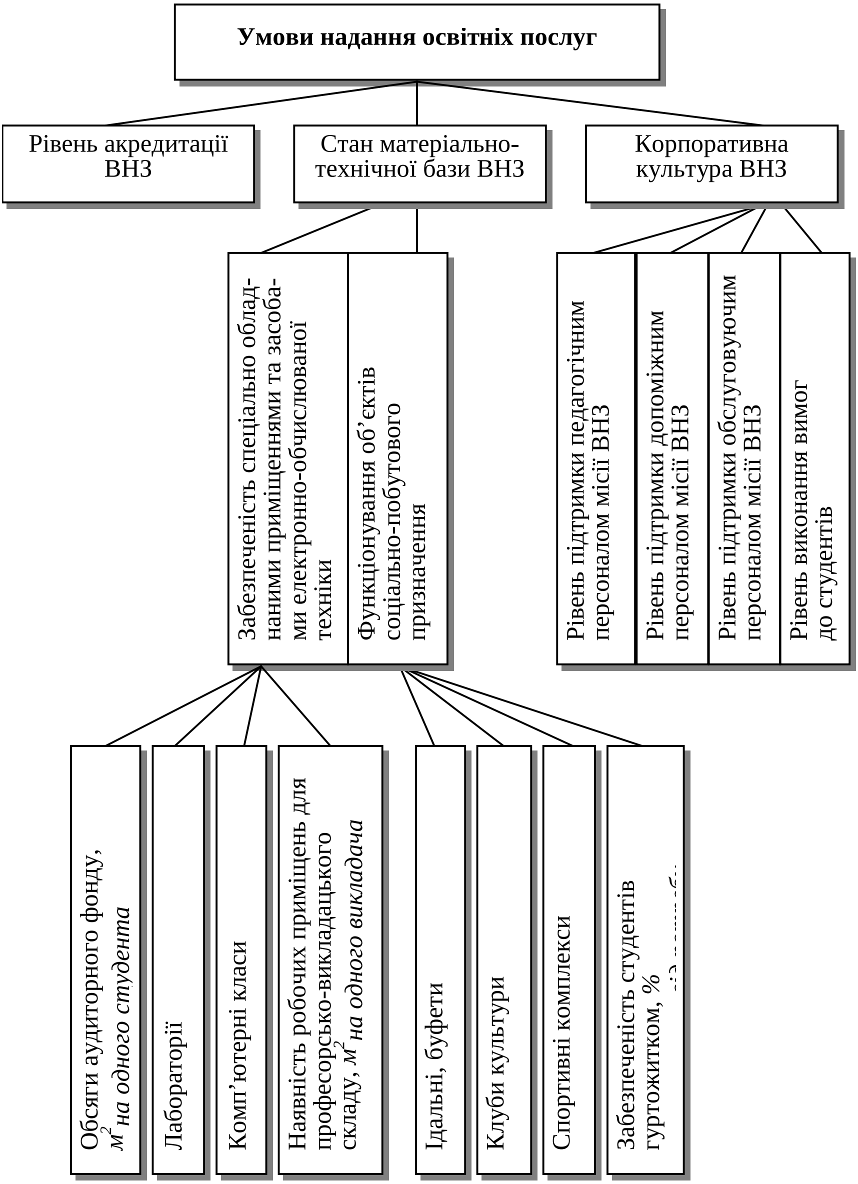


Рис 6.8. Деталізація блоку критеріїв,
що свідчать про умови надання ВНЗ освітніх послуг

Рис. 6.9. Ієрархія чинників, що характеризують стан ринку праці

Зазначимо, що всі наведені на рисунках деталізовані показники можна поділити на групи. Показники першої групи визначають на основі статистичної (кількісної) інформації, джерелом якої є офіційні матеріали Міністерства освіти та науки України, звітність ВНЗ, матеріали ліцензування, акредитації тощо. Другу групу становлять показники, по яких відсутні статистичні (звітні) дані, а також ті, які можна визначити лише на якісному (вербальному) рівні тощо. Джерелом такої інформації можуть бути опитування безпосередніх користувачів освітніх послуг — студентів, а також їхніх родин та потенційних роботодавців — щодо визначення важливості тих чи інших окремих критеріїв або їх груп. У зв'язку з відсутністю для другої групи показників достовірної статистичної інформації є сенс використовувати методи, що ґрунтуються на досвіді та інтуїції, тобто евристичні методи чи методи експертних оцінок.

Особливістю евристичних методів і моделей є відсутність строгих математичних доведень однозначності (категоричності) отриманих оцінок. Прикладами традиційних евристичних процедур є різноманітні експертизи, наради тощо, результатом котрих є експертні оцінки стану об'єкта дослідження або наслідків його діяльності. На практиці застосовуються як індивідуальні, так і групові експертні оцінки (опитування)[1].

Перевагою індивідуальної експертизи є оперативність оцінювання та відносно невеликі витрати. Як недолік необхідно відзначити високий ступінь суб'єктивності і — як наслідок — відсутність впевненості у достовірності отриманих оцінок. Цей недолік покликані знизити (зменшити) групові експертні оцінки.

Наголосимо, що у визначенні оцінок експертним способом, окрім похибки, яка вноситься браком інформації щодо досліджуваного об'єкта і недостатньою компетентністю експертів, можливою є похибка іншого роду, яка зумовлена зацікавленістю експертів у результатах, що неминуче відіб'ється на достовірності оцінювання.

Характерними особливостями методів експертних оцінок і моделей їх реалізації як інструментарію наукового розв'язання складних слабоформалізованих проблем є, по-перше, науково обґрунтована організація всіх етапів експертизи, що забезпечує ефективність роботи на кожному з них, і, по-друге, використання кількісних методів як в організації експертизи, так і в оцінюванні висновків експертів на основі формалізованого опрацювання результатів їхніх суджень. Ці особливості відрізняють методи експертних оцінок від звичайної, давно відомої експертизи, що використовується у різних сферах людської діяльності.

Загальна схема експертного оцінювання включає такі основні етапи[2]:

— добір експертів і формування експертних груп;

— формування запитань і складання анкет;

— формування правил визначення сумарних оцінок на основі висновків окремих експертів;

— аналіз і опрацювання експертних оцінок.

Запропонований підхід припускає низку модифікацій. Ясно, що коли вибірку становлять ВНЗ конкретного напряму підготовки фахівців та певного освітньо-кваліфікаційного рівня, то забезпечується більша об'єктивність результату.

---

[1] *Андрейчиков А. В., Андрейчикова О. Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике. — М.: Финансы и статистика, 2000. — 368 с.

[2] *Литвак Б. Г.* Экспертная информация. — М.: Сов. радио, 1982.

6.7. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Поясніть сутність концепції рейтингового управління.
2. Проблеми підготовки вихідних даних для рейтингового оцінювання.
3. Поясніть, у чому полягає сутність основних етапів та інструментарію статистичного аналізу даних, необхідних для рейтингового оцінювання.
4. Розкрийте суть трендового аналізу в рейтинговому оцінюванні та управлінні.
5. Основні моделі та методи процесу обчислення рейтингу.
6. Структура рейтингового управління.
7. Поясніть, як визначається рейтингова оцінка акцій та облігацій?
8. Поясніть сутність рейтингової оцінки інвестиційної привабливості підприємств, організацій, регіонів.
9. Рейтинг як засіб класифікації економічних об’єктів. Наведіть приклади.

6.8. Завдання для самостійної роботи

1. Сутність рейтингової оцінки в аналізі стану досліджуваної економічної системи, її основні елементи.
2. Поясніть, як здійснюється рейтингове оцінювання множини економічних об’єктів за деякими параметрами (критеріями).
3. Основний зміст ієрархічного подання проблеми. Шкала відношень, матриця парних порівнянь. Наведіть приклади.
4. Синтез пріоритетів та оцінка однорідності в методі аналізу ієрархій.
5. Основні етапи формалізованої схеми визначення рейтингу однорідних економічних об’єктів.
6. Аналіз підходів щодо визначення інтегрованого показника в рейтинговому оцінюванні. Сутність зваженого середньогеометричного як інтегрованого показника рейтингового оцінювання.
7. Узагальнений алгоритм аналізу ієрархій у рейтинговому оцінюванні.
8. Рейтингове оцінювання діяльності комерційних банків серед їх вибірки.
9. Рейтингова оцінка індексів на фондовому ринку України.
10. Процедура комплексної рейтингової оцінки фінансового стану економічної системи.
11. Рейтингові оцінки ризику країни. Їх аналіз, переваги і недоліки.
12. Рейтингове оцінювання якості послуг вищих навчальних закладів.
13. Можливості щодо використання рейтингового оцінювання та управління у виробничій та невиробничій сферах діяльності.
14. Структура процесу рейтингового управління.
15. Схема рейтингового управління.
16. Механізм рейтингового управління.
17. Рейтингове управління в проблемах фінансової стійкості страхових компаній.
18. Фондові індекси та рейтинги.

7 РОЗДІЛ

МОДЕЛІ ПОВЕДІНКИ СПОЖИВАЧІВ

Головне завдання під час вивчення питання щодо поведінки споживача полягає в тому, щоб установити, в яких обсягах він купує наявні товари та послуги за заданих цін і доходу.

7.1. ПЕРЕВАГИ СПОЖИВАЧА ТА ЙОГО ФУНКЦІЯ КОРИСНОСТІ

Рішення споживача щодо купівлі певного набору товарів математично можна подати як вибір точки у просторі товарів. Нехай n — скінченне число різноманітних товарів, де $x = (x_1, \ldots, x_n)'$ — вектор-стовпчик споживчих товарів (обсяги), що їх придбав споживач за певний термін (наприклад протягом року) за заданих цін, маючи певний обсяг доходів за цей самий період.

Простір товарів — це множина різноманітних наборів товарів x з невід'ємними координатами.

$$C = \{x : x \geq 0\}.$$

У теорії споживацького вибору припускається гіпотеза, що кожен споживач має свої пріоритети на певній підмножині простору товарів:

$$X \subset \{x : x \geq 0\}.$$

Це означає, що для кожної пари $x \in X$, $y \in Y$ має місце одне з трьох відношень:

$x \succ y$ — набір x є привабливішим, ніж y;

$x \prec y$ — набір x є менш привабливим, ніж y;

$x \sim y$ — для споживача обидва набори еквівалентні.

Відношення переваги мають такі властивості:

1) якщо $x \succ y$, $x \succ z$, то $x \succ z$ (транзитивності);

2) якщо $x \succ y$, то $x \succ y$ (ненасиченість: більший набір завжди привабливіший меншого).

Виконується така теорема:

> **Теорема Дебре**. Якщо множина *X* зв'язна без дір, а відношення переваг неперервні, то функція корисності існує (слабкі гіпотези). Переваги споживача можна подати у формі індикатора переваг, тобто такої функції корисності $u(x)$, що з $x \succ y$ випливає $u(x) > u(y)$, а з $x \sim y$ випливає $u(x) = u(y)$.

Для кожного споживача таке подання індикатора є багатоваріантним. Наприклад, якщо $u(x)$ — функція корисності, то і $cu(x)$, $ln\ u(x)$ — також індикатор переваг.

Уведення функції корисності дозволяє замінити відношення переваги звичними відношеннями між числами: більше, менше, дорівнює.

У теорії споживання припускаються гіпотези і вважається, що функція корисності має такі властивості:

1) $\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$ — зі зростанням споживання блага корисність зростає;

2) $\lim\limits_{x_i \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$ — невеликий приріст блага за його початкової відсутності різко збільшує корисність;

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0$ — зі зростанням споживання блага швидкість зростання корисності зменшується (спадає);

4) $\lim\limits_{x_i \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ — коли є дуже великий обсяг блага, його подальше зростання не приводить до зростання корисності.

Умова 3 зазвичай використовується у більш широкому трактуванні — як матриця других похідних (матриця Гессе)

$$U(x) = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \right\|$$

і є від'ємно визначеною.

Гранична корисність товару

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

показує, на скільки зростає корисність, якщо кількість товару зростає в малому обсязі.

Поверхнею байдужості називають гіперповерхню розмірністю $(n-1)$, на якій корисність постійна:

$$u(x) = c = \text{const},$$

або має диференційовану форму:

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = 0 \ . \qquad (7.1)$$

Умова (7.1) означає, що дотична до поверхні байдужості перпендикулярна градієнтові корисності.

Це означає (з погляду споживача) можливість заміни одного товару певною кількістю іншого (рівноцінного) товару.

Нехай в (7.1) $dx_i = 0$ для $i = 3, \ldots, n$, тоді це співвідношення має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = 0,$$

звідси

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}, \qquad (7.2)$$

тобто гранична **норма заміщення** першого товару другим дорівнює відношенню граничної корисності першого та другого товарів.

Норма заміщення показує, скільки необхідно одиниць другого товару, щоб замінити малий обсяг першого товару, який вибув.

Бюджетною множиною називають множину тих наборів товарів, які може придбати споживач, маючи дохід обсягом M:

$$B = \{x : px \le M\},$$

де $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — вектор-рядок цін.

Модель поведінки споживача

У теорії споживання вважається (робоча гіпотеза), що споживач завжди прагне максимізувати свою корисність, і єдине, що його стримує, — це обмежений дохід:

$$\max_{x \in B \cap X} u(x) = \max_{px = M} u(x). \qquad (7.3)$$

Ця задача на умовний екстремум приводиться до знаходження безумовного екстремума функції Лагранжа:

$$L(x) = u(x) - \lambda\,(px - M).$$

Необхідні умови локального екстремуму:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* = M, \tag{7.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_i^*) - \lambda^* p_i = 0, \quad i = 1, \ ..., \ n. \tag{7.5}$$

Це дійсно визначає точку максимуму, бо матриця *u* — від'ємно визначена. З (7.5) бачимо, що споживач за фіксованого доходу так обирає набір x^*, що в цій точці відношення граничної корисності дорівнює відношенню цін:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} = p_1 / p_2, ..., \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} : \frac{\partial u}{\partial x_n} = p_{n-1} / p_n.$$

Якщо розв'язати (7.4), (7.5) відносно x^*, отримаємо *функцію попиту споживача*:

$$x^* = x^*(p, M). \tag{7.6}$$

7.2. РІВНЯННЯ СЛУЦЬКОГО

Розгляньмо, як зміниться попит споживача, що визначається моделлю (7.3):

$$\max_{x \in B \cap X} u(x) = \max_{px = M} u(x),$$

якщо зміниться ціна одного з товарів.

Нехай ціна *n*-го товару зросла на ap_n, тоді згідно з (7.6) попит на кожен товар зміниться так:

$$dx_i^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_n} dp_n, \quad i = 1, \ 2, \ ..., \ n,$$

але, оскільки (7.6) — це лише інший запис (7.4) і (7.5), то рівняння для $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_n}$ одержимо, диференціюючи за p_n ці співвідношення, тобто:

$$-\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial p_n} = x_n^*, \tag{7.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j^*}{\partial p_n} - p_i \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} = \begin{cases} 0, & i = 1, ..., n-1, \\ \lambda^*, & i = n. \end{cases}$$

Система з (n + 1) лінійних рівнянь (7.7) відносно (n + 1) невідомих $\frac{\partial\lambda^*}{\partial p_n}, \frac{\partial x_1^*}{\partial p_n}, ..., \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n}$ у матричній формі запишеться таким чином (штрих означає транспонування, p — вектор-рядок цін, U — матриця Гессе, x^* — вектор-стовпчик попиту на товари):

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda^*}{\partial p_n} \\ \frac{\partial x^*}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n^* \\ 0 \\ \lambda^* \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Матриця, обернена до матриці рівнянь (7.8), має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & U \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mu & \mu\, pU^{-1} \\ \mu U^{-1} p' & \mu U^{-1} p' pU^{-1} + U^{-1} \end{pmatrix},$$

де $\mu = -(pU^{-1}p')^{-1} > 0$.

Тому розв'язок системи рівнянь (7.8) у матричній формі має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda^*}{\partial p_n} \\ \frac{\partial x^*}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \mu\, pU^{-1} \\ \mu U^{-1} p' & \mu U^{-1} p' pU^{-1} + U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^* \\ 0 \\ \lambda^* \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu\, x_n^* + \lambda^* (\mu\, pU^{-})_n \\ \mu U^{-1} p' x_n^* + \lambda^* (\mu U^{-1} p' pU^{-1} + U^{-1})_n \end{pmatrix}.$$

Індекс n у матриці (в дужках) означає, що взято її n-й стовпчик.

Отже, збільшення (зміна) ціни на n-й товар привело до такої зміни попиту на товари:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_n} dp_n = \mu U^{-1} p' x_n^* dp_n + \lambda^* (\mu U^{-1} p' pU^{-1} + U^{-1})_n\, dp_n \ . \quad (7.9)$$

Тепер доцільно з'ясувати зміст складових, що входять у рівняння (7.9).

Зміна попиту за збільшення ціни з компенсацією

Розгляньмо таке збільшення доходу на dM, яке компенсувало б споживачеві збільшення ціни на dp_n (на n-й товар, благо).

Згідно з теоремою споживання це означає, що корисність споживача збереглася на попередньому рівні, тобто:

$$du = 0.$$

Маємо використати рівняння (7.5), з якого отримаємо:

$$du=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*)dx_i^* =\lambda^*\sum_{i=1}^{n}p_i dx_i^*=\lambda^*\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial x_i^*}{\partial p_n}dp_n=0.$$

Звідси маємо, що:

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial x_i^*}{\partial p_n}dp_n=0$$

або, остаточно, умова постійності корисності:

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial x_i^*}{\partial p_n}=0. \qquad (7.10)$$

Тепер можемо визначити *dM*, використовуючи (7.4) та (7.10):

$$dM=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial x_i^*}{\partial p_n}+x_n^*dp_n=x_n^*dp_n, \quad dM=x_n^*dp_n,$$

тобто дохід зріс рівно настільки, скільки необхідно було б додатково витратити споживачеві на придбання *n*-го товару в попередньому обсязі за зростання ціни на величину dp_n.

Диференціювання рівняння (7.5) за p_n приводить до тих самих результатів, що і раніше. Тому за компенсованої зміни ціни отримаємо такі рівняння для $\frac{\partial\lambda^*}{\partial p_n},\frac{\partial x^*}{\partial p_n}$:

$$-\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial x_j^*}{\partial p_n}=0 \text{ випливає з } U=\text{const}.$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x^*)\frac{\partial x_j^*}{\partial p_n}-p_i\frac{\partial\lambda^*}{\partial p_n}=\begin{cases}0, & i=1,\dots,n-1,\\ \lambda^*, & i=n.\end{cases}, \qquad (7.11)$$

які в матричній формі наберуть вигляду:

$$\begin{pmatrix}0 & -p\\ -p' & U\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial\lambda^*}{\partial p_n}\\ \frac{\partial x^*}{\partial p_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \lambda^*\end{pmatrix}. \qquad (7.12)$$

Розв’язок системи рівнянь (7.12) знову ж знаходимо за допомогою оберненої матриці:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\lambda^*}{\partial p_n} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \mu\, pU^{-1} \\ \mu U^{-1} p' & \mu U^{-1} p' pU^{-1} + U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^* (\mu\, pU^{-1})_n \\ \lambda^* (\mu U^{-1} p' pU^{-1} + U^{-1})_n \end{pmatrix}.$$

Отже, збільшення ціни з компенсацією доходу приводить до такої зміни попиту:

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n} \right)_{\text{comp}} dp_n = \lambda^* (\mu U^{-1} p' pU^{-1} + U^{-1})_n \, dp_n \,. \qquad (7.13)$$

Тобто друга складова у правій частині (7.9) — це зміна попиту, якщо зростання ціни n-го товару на dp_n компенсується збільшенням доходу на $dM = x_n^* dp_n$.

Розгляньмо зміну попиту за зміни доходу.

Нехай дохід змінюється на dM, тоді попит зміниться так:

$$dx^* = \frac{\partial x^*}{\partial M} dM \,.$$

Рівняння для $\dfrac{\partial x^*}{\partial M}, \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial M}$ знову ж таки отримаємо, диференціюючи за M співвідношення (7.4), (7.5):

$$\begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \dfrac{\partial x_j^*}{\partial M} = -1, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) \dfrac{\partial x_j^*}{\partial M} - p_i \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial M} = 0, \; i = 1, ..., n \end{cases} \qquad (7.14)$$

або у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\lambda^*}{\partial M} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (7.15)$$

Тому

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\lambda^*}{\partial M} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \mu\, pU^{-1} \\ \mu U^{-1} p' & \mu U^{-1} p' pU^{-1} + U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \\ -\mu U^{-1} p' \end{pmatrix},$$

звідки маємо:

$$\frac{\partial x^*}{\partial M} = \mu U^{-1} p'. \qquad (7.16)$$

Об’єднуючи (7.9), (7.13), (7.16), отримаємо таке рівняння Слуцького, яке є серцевиною теорії корисності:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_n} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right)_{\text{comp}} - \frac{\partial x^*}{\partial M} x_n^* . \tag{7.17}$$

А оскільки вивчається зміна попиту за зростання ціни на n-й товар, що не компенсується підвищенням доходу, то друга складова в (7.17) (з від’ємним знаком) якраз і знімає штучний приріст попиту, що викликаний компенсуючим зростанням доходу.

Для того щоб скористатися рівнянням Слуцького, вивчимо властивості матриці: $H = \mu U^{-1} p' p U^{-1} + U^{-1}$.

Ця матриця *симетрична*, оскільки симетричною є матриця U^{-1}, а остання симетрична внаслідок симетричності матриці U.

Матриця H *від’ємно напіввизначена*, що означає: $zHz' \le 0$ для будь-якого вектор-рядка z.

Розглянемо випадок, коли $z = \alpha p$, $\alpha \neq 0$, тоді

$$(\alpha p)H(\alpha p)' = \alpha^2 (\mu\, pU^{-1} p' pU^{-1} + pU^{-1})\, p' =$$
$$= \alpha^2 (-pU^{-1} + pU^{-1})\, p' = 0,$$

де $\mu = -(pU^{-1}p')^{-1} > 0$).

Нехай тепер напрямок z не збігається з напрямком p (тобто $z \neq \alpha p$ за будь-якого α), тоді z можна подати у вигляді:

$$z = \alpha p + v, \quad v = z - \alpha p,$$

де $\alpha = \frac{zU^{-1}p'}{pU^{-1}p'}$ (це число), $\nu \neq 0$ (якщо б $\nu = 0$, то $z = \alpha p$).

З такого подання z маємо:

$$vU^{-1}p' = (z - \alpha p)U^{-1}p' = zU^{-1}p' - \frac{zU^{-1}p'}{pU^{-1}p'} pU^{-1}p' = 0,$$

а тому

$$zHz' = vHv' = \mu vU^{-1}p'pU^{-1}v' + vU^{-1}v' = vU^{-1}v' < 0,$$

оскільки U^{-1} від’ємно визначена.

Якщо взяти за z вектор $z = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, тобто вектор-рядок, усі елементи якого, окрім i-го, дорівнюють нулю, а i-й елемент дорівнює 1, то

$$zHz' = h_{ii} < 0,$$

тобто всі діагональні елементи матриці *H* є від’ємними. Тому

$$\left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_n}\right)_{\text{comp}} = \lambda^* h_{nn} < 0. \qquad (7.18)$$

Отже, навіть за компенсованого зростання ціни товару попит на цей товар усе-таки спадає.

Товар *i* називають *цінним*, якщо зі зростанням доходу попит на нього зростає $\frac{\partial x_i^*}{\partial M} > 0$, *малоцінним* — якщо $\frac{\partial x_i^*}{\partial M} \le 0$.

Оскільки згідно з (7.14)

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial M} = 1, \qquad (7.19)$$

то цінні товари обов’язково існують.

Попит на цінний товар спадає за зростання ціни на нього, це безпосередньо випливає з рівняння Слуцького для (*i*-го) товару:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{comp}} - \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial M}\right) x_i^* < 0.$$

Згідно з (7.11)

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{\text{comp}} = 0,$$

тому обов’язково знайдеться такий товар *l*, для якого $\left(\frac{\partial x_l^*}{\partial p_i}\right) > 0$.

Тобто зменшення попиту на *i*-й товар $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{comp}} < 0$ приводить до зростання попиту на *l*-й товар.

Такі товари називають *взаємозамінюваними*, наприклад, тваринні жири і рослинна олія.

Якщо ж $\left(\frac{\partial x_m^*}{\partial p_i}\right)_{\text{comp}} < 0$, то товари *i* та *m* утворюють взаємодоповнювальну пару (компенсоване зростання ціни на бензин спричинює спад попиту як на бензин, так і на автомобілі).

Продукт *l* називають *валовим замінником* продукту *i*, якщо

$$\frac{\partial x_l^*}{\partial p_i} > 0.$$

Функція попиту $x^*(p, M)$ має властивість валової замінності, якщо зі зростанням ціни на будь-який продукт i попит на решту продуктів не знижується:

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} \geq 0, \quad j \neq i,$$

Якщо ж $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} > 0$, то функція попиту має властивість *сильного валового заміщення*. Можна довести, що функція попиту, породжена функцією корисності

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j^{\gamma_j}, \quad \mu_j > 0, \quad 0 < \gamma_j < 1,$$

має властивості *сильного валового заміщення*.

Ефекти заміщення та доходу за підвищення (зниження) ціни на один із товарів ілюструють рис. 7.1 та 7.2 відповідно.

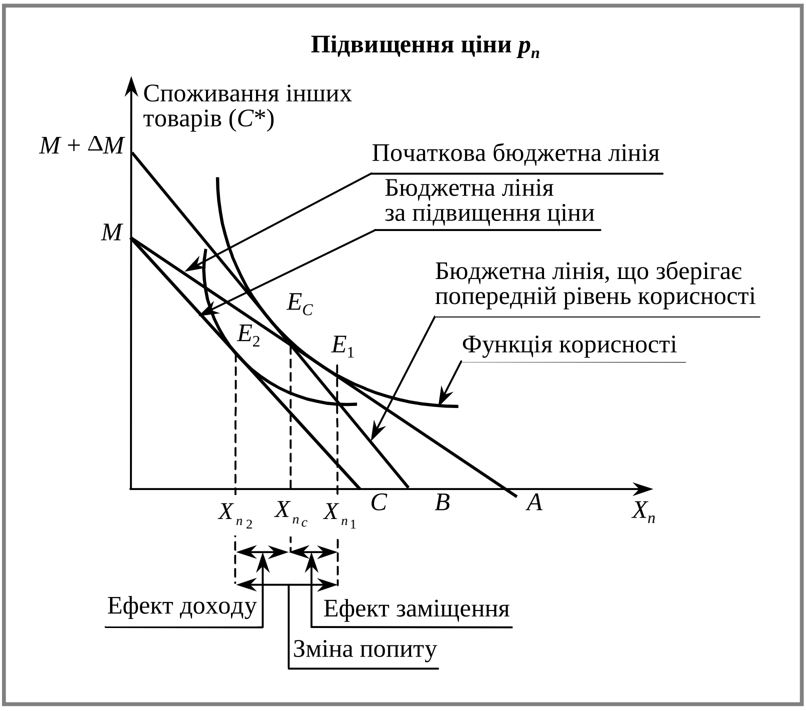


Рис. 7.1. Ефект заміщення та ефект доходу за підвищення ціни

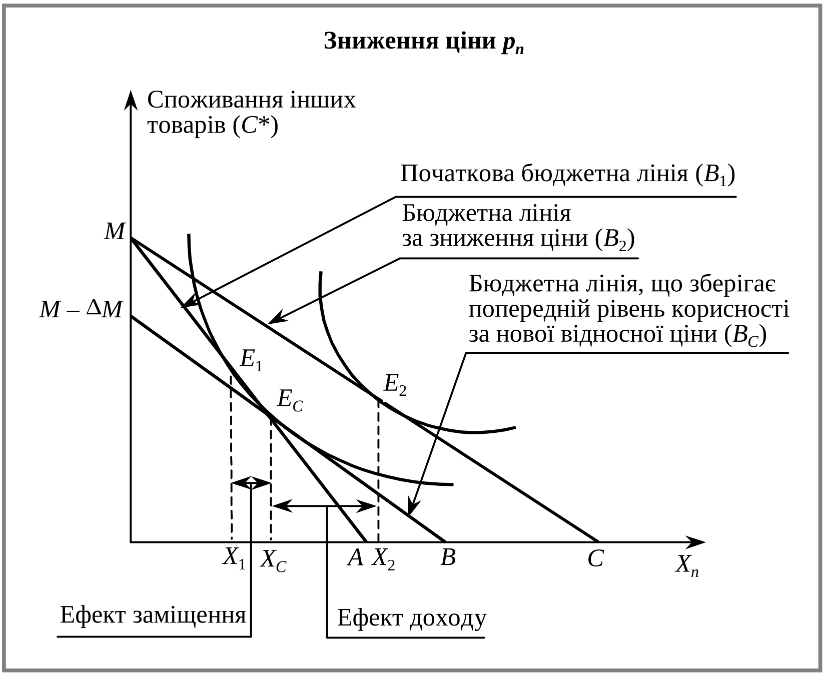


Рис. 7.2. Ефект заміщення та ефект доходу за зниження ціни

Ефект доходу полягає у зміні споживання внаслідок зміни реального доходу, яка виникла через зміну цін.

Ефект заміщення полягає у зміні споживання внаслідок зміни відносних цін.

7.3. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Покажіть, як можна формалізувати систему переваг (смаків) індивідуума, тобто побудувати функцію його корисності.
2. Визначте цілі особи як споживача.
3. Поясніть сутність та відмінності між кардиналістським та ординалістським підходами до визначення функції корисності.
4. Поясніть зміст першого та другого законів Госсена.
5. Розкрийте сутність коефіцієнта перехресної еластичності попиту.
6. Поясніть зміст гіпотези опуклості стосовно двох наборів благ.

7. Висвітліть сутність граничної норми заміщення.
8. Поясніть основні гіпотези, що припускаються у виведенні рівняння Слуцького, розкрийте його сутність.
9. Визначте, як зміниться попит, якщо станеться збільшення ціни та один із продуктів матиме компенсацію. Наведіть приклад.
10. Покажіть, як зміниться попит на товари зі зміненням доходу споживача. Наведіть приклад.

7.4. Завдання для самостійної роботи

1. Визначити, який набір товарів обере споживач, котрий має дохід у 300 грош. од., якщо його функція корисності:

$$U(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 x_2 x_3},$$

а ціни товарів відповідно дорівнюють:

p_1 = 2 грош. од./од.тов., p_2 = 4 грош.од./од.тов., p_3 = 1 грош.од./од.тов.

2. Переваги споживача задані такою функцією корисності:

$$U(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha},$$

його дохід становить M, ціни товарів відповідно — p_1, p_2.

Побудувати функцію попиту.

3. Проаналізуйте сутність ефекту доходу за Слуцьким та за Хіксом. Чи рівні вони між собою?

4. Визначити функцію збуту (попиту) на підставі таких даних:

Ціна товару, *грош. од.*	54	50	55	59	60	59	64	65
Обсяг попиту, *шт.*	570	600	580	100	480	500	450	500

5. Функція корисності споживача має вигляд:

$$U(x_1, x_2) = 3x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}.$$

Визначити максимальну корисність, якщо споживач має дохід у 100 грош. од., а ціни товарів дорівнюють відповідно 5 і 10 грош. од. / шт.

Якою буде норма заміщення другого товару першим в оптимальній точці?

8

РОЗДІЛ

МОДЕЛІ ПОВЕДІНКИ ВИРОБНИКІВ

Максимізація прибутку — основний критерій, на який орієнтуються виробники. Але це не єдиний критерій. Максимізація поточного прибутку повинна співвідноситися зі стратегічним прогнозом розвитку фірми тощо.

8.1. МОДЕЛЬ ФІРМИ

Нехай виробнича фірма випускає один продукт (чи багато продуктів, але з постійною структурою). *Річний випуск у натурально-речовій формі X — це кількість одиниць продукту одного виду* (чи кількість багатономенклатурних агрегатів).

Використані ресурси: *L — жива праця* (у вигляді середньої чисельності зайнятих за рік чи відпрацьованих за рік людино-годин); *K — засоби праці* (основні виробничі фонди); *M — предмети праці* (витрачене за рік паливо, енергія, сировина, матеріали, комплектувальні вироби тощо).

Кожен з агрегованих видів ресурсів (праця, фонди, матеріали) має певну кількість різновидів.

Позначимо вектор-стовпчик можливих обсягів витрат різних видів ресурсів через $x = (x_1, \ldots, x_n)'$. Тоді технологія фірми визначатиметься її виробничою функцією, яка виражає зв'язок між витратами ресурсів і випуском:

$$X = F(x). \qquad (8.1)$$

Припускається гіпотеза, що $F(x)$ двічі неперервно диференційована і неокласична, до того ж матриця її других похідних є від'ємно визначеною.

Якщо $w = (w_1, \ldots, w_j, \ldots, w_n)$ — вектор-рядок цін ресурсів, а p — ціна продукції, то кожному вектору витрат x відповідає прибуток:

$$\Pi(x) = pF(x) - wx. \qquad (8.2)$$

У (8.2) $R = pX = pF(x)$ — вартість річного випуску фірми або її річний дохід, $C = wx$ — витрати виробництва чи вартість витрат ресурсів за рік.

Якщо не вводити інших обмежень, окрім невід'ємних витрат ресурсів, то задача на максимум прибутку набере вигляду:

$$\max_{x \geq 0} [pF(x) - wx]. \tag{8.3}$$

Це задача нелінійного програмування з n умовами невід'ємності $x \geq 0$, необхідними умовами її розв'язання є умови Куна—Таккера:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = p\frac{\partial F}{\partial x} - w \leq 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} x = \left(p\frac{\partial F}{\partial x} - w \right) x = 0, \quad x \geq 0. \tag{8.4}$$

Якщо в оптимальному розв'язку використовуються всі види ресурсів, тобто $x^* > 0$, то умови (8.4) матимуть вигляд:

$$p\frac{\partial F(x^*)}{\partial x} = w, \tag{8.5}$$

або

$$p\frac{\partial F(x^*)}{\partial x_j} = w_j, \quad j = 1, ..., n,$$

тобто в оптимальній точці вартість граничного продукту даного ресурсу повинна дорівнювати його ціні.

Такий самий (за формою) розв'язок має задача на максимум випуску за заданого обсягу витрат

$$\max F(x), \quad wx \leq C, \quad x \geq 0. \tag{8.6}$$

Це задача нелінійного програмування з одним лінійним обмеженням і умовою невід'ємності змінних.

Побудуймо функцію Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = F(x) + \lambda\,(C - wx),$$

тепер максимізуємо її за умови невід'ємності змінних.

Для цього необхідно, щоб виконувались умови Куна—Теккера:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda w \leq 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda w \right) x = 0, \quad x \geq 0. \tag{8.7}$$

Як бачимо, умови (8.7) цілком збігаються з (8.4), якщо покласти $\lambda = \dfrac{1}{p}$.

Приклад 1 Випуск однопродуктової фірми задається виробничою функцією Кобба—Дугласа:

$$X = F(K, L) = 3K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}} .$$

Визначимо максимальний випуск, якщо на оренду фондів і оплату праці виділено 150 грош. од., вартість оренди одиниці фондів w_k = 5 грош. од., ставка зарплати w_L = 10 грош. од./люд.

Якою буде гранична норма заміни одного зайнятого фондами в оптимальній точці?

Розв'язання. Оскільки $F(0, L) = L(K, 0) = 0$, то в оптимальному розв'язку $K^* > 0$, $L^* > 0$, тому умови (8.7) наберуть вигляду:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \lambda w_K , \quad \frac{\partial F}{\partial L} = \lambda w_L \qquad (8.8)$$

або у нашому випадку:

$$\frac{2}{3} \frac{F(K^*, L^*)}{K^*} = \lambda w_K , \quad \frac{1}{3} \frac{F(K^*, L^*)}{L^*} = \lambda w_L .$$

Поділивши перше рівняння на друге, маємо:

$$\frac{2L^*}{K^*} = \frac{w_K}{w_L} .$$

Підставивши цей вираз в умову:

$$w_K K^* + w_L L^* = 150,$$

знайдемо

$$K^* = \frac{2}{3} \frac{150}{w_K} = 20, \ L^* = 5.$$

Розв'язання можна проілюструвати геометрично. На рис. 8.1 зображені ізокости (лінії постійних витрат для C = 50, 100, 150) та ізокванти (лінії постійних випусків для X = 25,2; 37,8).

Ізокости мають такі рівняння:

$$5K + 10L = C = \text{const}.$$

Ізокванти —

$$3K^{\frac{2}{3}} \ L^{\frac{1}{3}} = \text{const}.$$

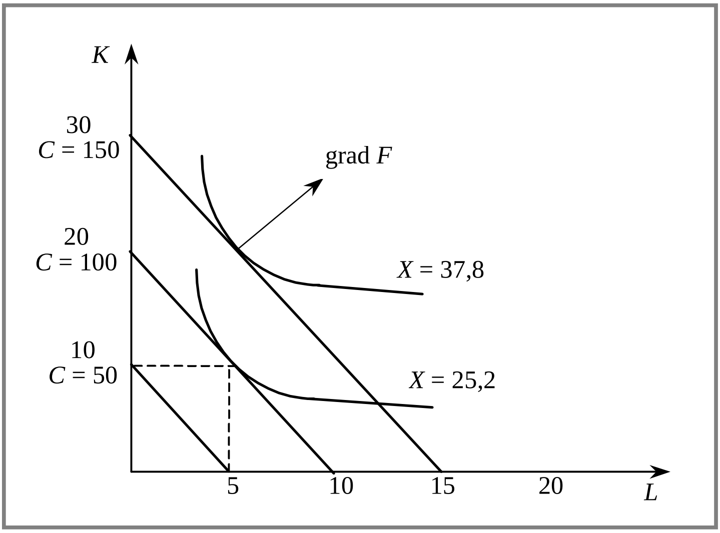


Рис. 8.1. Ізокости постійних витрат та ізокванти постійних випусків

В оптимальній точці $K^* = 20$, $L^* = 5$ ізокванта $X^* = 37{,}8$ та ізокоста $C = 150$, що проходять через цю точку, дотикаються, бо згідно з (8.8) нормалі до цих кривих, задані градієнтами $\left(\frac{\partial F}{\partial K}, \frac{\partial F}{\partial L}\right)$, (w_K, w_L), колінеарні.

Норма заміщення праці фондами в оптимальній точці:

$$-\frac{dK}{dL} = S_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{K^*}{L^*} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{5} = 2,$$

тобто один працюючий може бути замінений двома одиницями фондів.

Розв'язуючи задачу моделі фірми (8.3) на максимум прибутку, знаходимо єдиний оптимальний набір ресурсів $x^* > 0$ (розглядається випадок, коли всі ресурси входять до набору). Цьому набору відповідає єдине значення витрат: $C^* = wx^*$.

Розв'язуємо задачу моделі фірми (8.6) на максимум прибутку за заданих витрат C^*. Якщо $F(x)$ — неокласична, то в оптимальному розв'язку $\tilde{x}^* > 0$, причому цей розв'язок єдиний.

Таким чином, з одного боку,

$$\frac{\partial F(x^*)}{\partial x} = \frac{1}{p} w, \quad wx^* = C^*, \quad \Pi(x^*) \geq \Pi(\tilde{x}^*),$$

а з іншого —

$$\frac{\partial F(\tilde{x}^*)}{\partial x}=\lambda w, \quad w\tilde{x}^*=C^*, \quad F(\tilde{x}^*)\geq F(x^*).$$

Оскільки

$$\Pi(x^*)=pF(x^*)-wx^*\geq pF(\tilde{x}^*)-w\tilde{x}^*=\Pi(\tilde{x}^*) \text{ та } wx^*=w\tilde{x}^*=C^*,$$

то

$$F(x^*)\geq F(\tilde{x}^*), \text{ але } F(\tilde{x}^*)\geq F(x^*), \text{ тому } F(\tilde{x}^*)=F(x^*).$$

Через те що розв’язок задачі (8.3) єдиний, то $\tilde{x}^* = x^*$.

Отже, якщо задача на максимальний прибуток має єдиний розв’язок $x^* > 0$, то їй відповідає задача на максимальний випуск за заданих витрат $C^* = wx^*$, причому остання має такий самий розв’язок, як і перша (див. рис. 8.1): $\tilde{x}^* = x^*$.

Геометричне місце точок дотику ізокост та ізоквант за різних значень витрат C визначає довготерміновий шлях розвитку фірми $X(C)$, тобто показує, як зростатиме (спадатиме) випуск, якщо витрати зростуть (зменшаться). Оскільки ця залежність монотонна, то існує обернена монотонна функція витрат $C = C(X)$.

Оскільки $X(C)$ — максимальний випуск за заданих витрат C, то витрати $C(X)$, які відповідають цьому максимальному випуску X, — мінімальні, а оптимальний обсяг випуску знову ж визначається за умови максимального прибутку:

$$\max_x \Pi(x), \quad \Pi(x)=pX-C(X). \qquad (8.9)$$

Прирівнюючи до нуля похідну

$$\frac{d\Pi}{dX}=p-\frac{dC}{dX}=0,$$

бачимо, що в оптимальній точці граничні витрати дорівнюють ціні випуску:

$$\frac{dC(X^*)}{dX}=p.$$

Окрім того, максимум прибутку досягається за

$$\frac{d^2C}{dX^2}>0 \text{ (бо } \frac{d^2\Pi}{dX^2}<0\text{)}.$$

Розгляньмо n співвідношень (8.5):

$$\psi_j(x) = p\frac{\partial F(x^*)}{\partial x_j} - w_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ці співвідношення можуть бути розв'язані відносно x в околі оптимальної точки x^*, якщо якобіан $|J| \neq 0$, де

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1(x^*)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \psi_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_n(x^*)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_n(x^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} =$$

$$= p \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} = pH.$$

Це означає, що повинен бути відмінним від нуля гессіан $|H|$ виробничої функції (але H від'ємно визначений, тому дійсно $|J| \neq 0$), тоді

$$x^* = x^*(p, w) \tag{8.10}$$

або

$$x_j^* = x_j^*(p, w), \; j = 1, \ldots, n.$$

Ці n рівнянь задають *функцію попиту* (на ресурси), відшукані за допомогою моделі поведінки фірми. Функції попиту на ресурси можна також знайти експериментально за допомогою методів математичної статистики за відповідними вибірковими даними.

Функція пропозиції —

$$X^*(p, w) = F[x^*(p, w)].$$

Подібно до рівняння Слуцького, що показує реакцію споживача на зміни цін товарів, аналогічні рівняння описують реакцію виробника на зміну цін випуску і ресурсів.

За умови заданих цін p, w поведінка виробника визначається таким співвідношенням (усього (n + 1) співвідношень):

$$\begin{cases} X^*(p, w) = F[x^*(p, w)], \\ p\frac{\partial F}{\partial x}[x^*(p, w)] = w. \end{cases} \tag{8.11}$$

Нехай тепер ціна випуску змінилася чи змінилася ціна ресурсів, або і те і те.

1. Реакція виробника на зміну ціни випуску.

Диференціюємо (8.11) за p:

$$\frac{\partial X^*}{\partial p}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i^*}{\partial p},\quad \frac{\partial F}{\partial x_j}+p\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial x_i^*}{\partial p}=0,\quad j=1,\dots,n$$

або в матричному позначенні:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial X^*}{\partial p}=\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial x^*}{\partial p},\\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)'+pH\dfrac{\partial x^*}{\partial p}=0,\end{cases}\rightarrow\left|\begin{array}{l}-\dfrac{\partial X^*}{\partial p}+\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial x^*}{\partial p}=0\\ pH\dfrac{\partial x^*}{\partial p}=-\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)'\end{array}\right.,$$

де $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)$ — вектор-рядок, $\dfrac{\partial x^*}{\partial p}=\left(\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p},\dots,\dfrac{\partial x_n^*}{\partial p}\right)'$ — вектор-стовпчик, або

$$\begin{pmatrix}-1 & \dfrac{\partial F}{\partial x}\\ 0 & pH\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial X^*}{\partial p}\\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)'\end{pmatrix}. \tag{8.12}$$

Рівняння (8.12) являє собою реакцію виробника (зміну випуску) (зміну попиту на ресурси) на зміну ціни випуску p.

2. Реакція виробника на зміну цін ресурсів.

Нехай змінилася ціна k-го ресурсу w_k, тоді диференціюємо рівняння (8.11) за w_k:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial X^*}{\partial w_k}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_i^*}{\partial w_k},\\ p\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial x_i}\dfrac{\partial x_i^*}{\partial w_k}=\delta_{jk},\quad j=1,\dots,n;\ k=1,\dots,n.\end{cases} \tag{8.13}$$

Якщо позначити

$$\frac{\partial X^*}{\partial w}=\left(\frac{\partial X^*}{\partial w_1},\ \frac{\partial X^*}{\partial w_2},\dots,\ \frac{\partial X^*}{\partial w_n}\right),$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial w}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1^*(p,w)}{\partial w_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x_n^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_n^*}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial w_n}\end{pmatrix},$$

то $n(n + 1)$ рівняння (8.13) у матричній формі запишуться таким чином (це реакція виробника на зміну цін ресурсів):

$$\begin{pmatrix}-1 & \frac{\partial F}{\partial x}\\ 0 & pH\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial X^*}{\partial p}\\ \frac{\partial x^*}{\partial p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ I_n\end{pmatrix}. \tag{8.14}$$

3. Реакція виробника на одночасну зміну ціни випуску та ціни ресурсів. Поєднання (8.12) та (8.14) дає основне матричне рівняння теорії фірми:

$$\begin{pmatrix}-1 & \frac{\partial F}{\partial x}\\ 0 & pH\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial X^*}{\partial p} & \frac{\partial X^*}{\partial w}\\ \frac{\partial x^*}{\partial p} & \frac{\partial x^*}{\partial w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)' & I_n\end{pmatrix}, \tag{8.15}$$

яке показує реакцію виробника на одночасну зміну ціни випуску і цін ресурсів.

Розв’язуючи (8.15) відносно зміни випуску $\frac{\partial X^*}{\partial p}$, $\frac{\partial X^*}{\partial w}$ і зміни попиту на ресурси $\frac{\partial x^*}{\partial p}$, $\frac{\partial x^*}{\partial w}$, отримуємо:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial X^*}{\partial p} & \frac{\partial X^*}{\partial w}\\ \frac{\partial x^*}{\partial p} & \frac{\partial x^*}{\partial w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{\partial F}{\partial x}\\ 0 & pH\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)' & I_n\end{pmatrix}. \tag{8.16}$$

Скориставшись правилом обернення блочних матриць, маємо:

$$\begin{pmatrix}-1 & \frac{\partial F}{\partial x}\\ 0 & pH\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{p}\frac{\partial F}{\partial x}H^{-1}\\ 0 & \frac{1}{p}H^{-1}\end{pmatrix}.$$

Підставляючи останній вираз у (8.16), отримаємо систему рівнянь фірми відносно змін випуску і попиту на ресурси:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X^*}{\partial p} = -\dfrac{1}{p}\dfrac{\partial F}{\partial x} H^{-1}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)', \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} = -\dfrac{1}{p} H^{-1}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)', \\ \dfrac{\partial X^*}{\partial w} = \dfrac{1}{p}\dfrac{\partial F}{\partial x} H^{-1}, \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial w} = \dfrac{1}{p} H^{-1}. \end{cases} \qquad (8.17)$$

Перше рівняння системи (8.17) показує, як зміниться випуск за зростання ціни на продукцію фірми. Оскільки матриця Гессе *H* від'ємно визначена, то H^{-1} — також, тому

$$\frac{\partial F}{\partial x} H^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)' < 0,$$

отже,

$$\frac{\partial X^*}{\partial p} > 0, \qquad (8.18)$$

тобто зі зростанням ціни випуску обсяг випуску продукції зростає.

Таким чином, $\left[X^* = F(x^*(p, w))\right]$,

$$\frac{\partial X^*}{\partial p} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j^*}{\partial p} > 0. \qquad (8.19)$$

Але $\dfrac{\partial F}{\partial x_j} > 0$ (для неокласичної функції граничні продукти додатні), тому обов'язково деякі $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p} > 0,$ тобто зростання ціни випуску приведе до зростання попиту на деякі ресурси.

Ресурс *l*-го виду називають *малоцінним*, якщо $\dfrac{\partial x_l^*}{\partial p} < 0$ з (8.17) видно (друга та третя група рівнянь), що $\left(\dfrac{\partial X^*}{\partial w}\right)' = -\dfrac{\partial x^*}{\partial p},$ або у розгорнутому вигляді —

$$\frac{\partial X^*}{\partial w_j} = -\frac{\partial x_j^*}{\partial p}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{8.20}$$

тому зростання ціни на продукцію зумовлюватиме підвищення (зниження) попиту на окремі види витрат, якщо підвищення ціни на цей вид ресурсів приводить до скорочення (зростання) обсягів оптимального випуску. Зокрема, збільшення ціни на малоцінний ресурс сприятиме збільшенню випуску.

Підставляючи (8.20) у (8.19), отримаємо

$$\frac{\partial X^*}{\partial p} = \frac{\partial F(x^*)}{\partial x} \frac{\partial x^*}{\partial p} = -\frac{\partial F(x^*)}{\partial x} \left(\frac{\partial X^*}{\partial w}\right)' = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial X^*}{\partial w_j} > 0,$$

тому з $\frac{\partial F}{\partial x_j} > 0$ випливає, що $\frac{\partial X^*}{\partial w_j} < 0, \ j = 1, \ldots, n$, тобто зростання ціни на деякий вид ресурсів зумовить скорочення випуску.

Згідно з (8.17)

$$\frac{\partial x^*}{\partial w} = \frac{1}{p} H^{-1},$$

тому матриця $\frac{\partial x^*}{\partial w}$ — від'ємно визначена, отже, $\frac{\partial x_j^*}{\partial w_j} < 0$, тобто підвищення ціни на деякий ресурс завжди призводить до спаду попиту на нього, отже, криві попиту є спадними.

Оскільки матриця $\frac{\partial x^*}{\partial w}$ — симетрична, то

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial w_l} = \frac{\partial x_l^*}{\partial w_j}, \quad j, l = 1, \ldots, n, \tag{8.21}$$

тобто вплив зміни ціни на l-й ресурс на зміну попиту на j-й ресурс і зміна ціни на j-й ресурс на зміну попиту на l-й ресурс однакові.

Витрати j-го і l-го видів ресурсів є взаємозамінюваними (взаємодоповнюючими), якщо $\frac{\partial x_j^*}{\partial w_l} > 0$ $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial w_l} < 0\right)$ тощо.

8.2. ПОВЕДІНКА ФІРМИ НА КОНКУРЕНТНИХ РИНКАХ

За досконалої конкуренції, коли учасників ринку багато, ціни на ринку не залежать від дій окремих виробників і споживачів. Коли ж, навпаки, учасників ринку небагато, ціни на ринку залежать від стратегій, що їх дотримуються ці учасники.

Розгляньмо приклад з двома конкурентами, що виробляють одну й ту саму продукцію, кожен згідно зі своєю виробничою функцією:

$$X_i = F_i(x^i),\ i = 1, 2. \tag{8.22}$$

У цьому разі ціна продукції залежить від обох випусків (обох учасників):

$$p = p(X_1, X_2), \tag{8.23}$$

причому вона знижується зі зростанням випуску:

$$\frac{\partial p}{\partial X_1} < 0, \quad \frac{\partial p}{\partial X_2} < 0.$$

Ціни на ресурси залежать від обсягів їх купівлі:

$$w_j = w_j(x_j^1, x_j^2), \quad j = 1, ..., n. \tag{8.24}$$

Ціни зростають за зростання попиту:

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j^1} > 0, \quad \frac{\partial w_j}{\partial x_j^2} > 0.$$

Кожна фірма прагне максимізувати свій прибуток. Наприклад, перша фірма повинна діяти таким чином:

$$\max_{X_1, x_1^1, ..., x_n^1} [p(X_1, X_2)X_1 - \sum_{j=1}^{n} w_j(x_j^1, x_j^2)x_j^1], \tag{8.25}$$

за умови $X_1 = F_1(x_1^1, ..., x_n^1)$.

Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(X_1, x^1, \lambda) = p(X_1, X_2)X_1 - \sum_{j=1}^{n} w_j(x_j^1, x_j^2)x_j^1 + \lambda(F_1(x_1^1, ..., x_n^1) - X_1),$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial X_1} = p(X_1, X_2) + X_1 \dfrac{\partial p}{\partial X_1} + X_1 \dfrac{\partial p}{\partial X_2} \dfrac{\partial X_2}{\partial X_1} - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j^{(1)}} = -w_j(x_j^1, x_j^2) - x_j^1 \dfrac{\partial w_j}{\partial x_j^1} - x_j^1 \dfrac{\partial w_j}{\partial x_j^{(2)}} \dfrac{\partial x_j^{(2)}}{\partial x_j^{(1)}} + \lambda \dfrac{\partial F_1}{\partial x_j^1} = 0,\ j = 1, ..., n, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = F_1(x_1^1, ..., x_n^1) - X_1 = 0. \end{cases}$$

Виключивши λ з 1-го рівняння, одержимо (n + 1) рівняння для визначення стратегії $X_1, x_1^1, ..., x_n^1$ першої фірми:

$$\left[p(X_1, X_2) + X_1 \left(\frac{\partial p}{\partial X_1} + \frac{\partial p}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial X_1} \right) \right] \frac{\partial F_1}{\partial x_j^1} = w_j + x_j^{(1)} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_j^1} + \frac{\partial w_j}{\partial x_j^2} \frac{\partial x_j^2}{\partial x_j^1} \right), \quad (8.26)$$

$j = 1,\ ...,\ n,\ \ X_1 = F_1(x_1^1,\ ...,\ x_n^1).$

Розв’язок цих рівнянь залежить від $\dfrac{\partial X_2}{\partial X_1}$ і $\dfrac{\partial x_j^2}{\partial x_j^1}$, $j = 1, ..., n.$

Останні є очікуваною реакцією другої фірми на стратегію $X_1, x_1^1, ..., x_n^1$ першої.

Роблячи різні припущення та припускаючи гіпотези щодо цієї реакції, одержимо різні розв’язки задачі конкуренції.

Проаналізуймо різні варіанти розв’язку задачі у спрощеній постановці, коли не розглядається конкуренція на ринку ресурсів.

Витрати обох фірм є однаковими лінійними функціями випуску (c — граничні витрати, d — постійні витрати):

$$C_i(X_i) = cX_i + d,\ \ i = 1, 2,$$

ціна продажу — лінійна функція від загального випуску (X) обох фірм:

$$p(X) = a - bX,\ X = X_1 + X_2$$

(b — спадання ціни за умови зростання на одиницю спільного випуску).

Тоді вирази для прибутків конкуруючих фірм наберуть вигляду:

$$\begin{aligned} \Pi_i(X_1, X_2) &= [a - b(X_1 + X_2)]X_i - cX_i - d = \\ &= bX_i[X_0 - (X_1 + X_2)] - d,\ \ i = 1, 2, \end{aligned} \quad (8.27)$$

де $X_0 = (a - c)/b$ — величина спільного випуску, за якої прибуток кожної фірми є від’ємним і дорівнює $-d$.

Маємо

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial X_1} = b[X_0 - (X_1 + X_2)] - bX_1 - bX_1 \frac{dX_2}{dX_1} =$$
$$= b\left[X_0 - (X_1 + X_2) - X_1(1 + \frac{dX_2}{dX_1})\right] = 0, \quad (8.28)$$

звідси випуск, що максимізує прибуток, дорівнює:

$$X_1^* = \frac{X_0 - X_2}{2 + \frac{dX_2}{dX_1}}, \quad (8.29)$$

аналогічно

$$X_2^* = \frac{X_0 - X_1}{2 + \frac{dX_1}{dX_2}}. \quad (8.30)$$

1. Рівновага за Курно

Розгляньмо випадок, коли кожна фірма припускає гіпотезу щодо незмінної стратегії конкуруючої фірми (X_1 — не залежить від X_2, і навпаки), тоді:

$\frac{dX_2}{dX_1} = 0, \frac{dX_1}{dX_2} = 0$ і з (8.29) та (8.30) видно, що: $X_1^* = X_2^*$,

тому $X_1^* = \frac{X_0 - X_1^*}{2}$, отже, $X_1^* = X_2^* = \frac{X_0}{3}$.

Позначимо елементи отриманого розв'язку індексом K (Курно), тоді:

$$X_1^K = X_2^K = \frac{X_0}{3}, \quad X^K = X_1^K + X_2^K = \frac{2}{3} X_0, \quad p^K = a + bX^K = a - \frac{2}{3} bX_0 .$$

Точка рівноваги за Курно $X_1^K = \frac{X_0}{3}$, $X_2^K = \frac{X_0}{3}$ може бути подана як результат такого, що сходиться, алгоритму Курно: перша фірма обирає спочатку будь-який випуск $X_1^1 < X_0$; друга діє так, ніби перша весь час обирала б X_1^1, тобто

$$X_2^1 = \frac{X_0 - X_1^1}{2}.$$

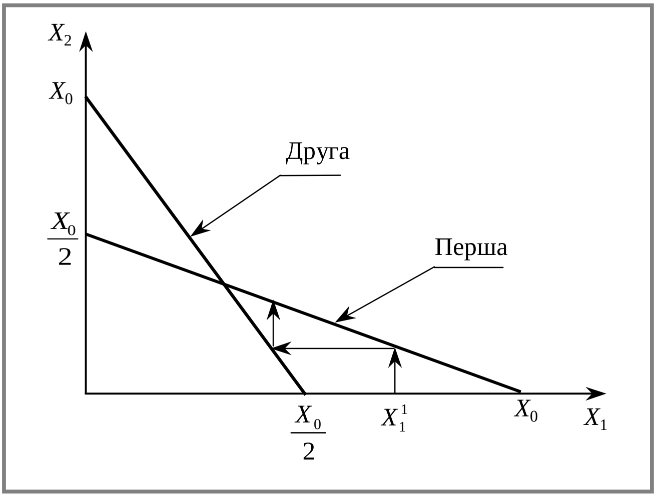


Рис. 8.2. Ітераційна процедура знаходження точки рівноваги за Курно

Далі обидві фірми діють аналогічно (l — номер ітерації):

$$X_1^{l+1} = \frac{X_0 - X_2^l}{2}, \; X_1^l = \frac{X_0 - X_1^l}{2}.$$

Збіжність даної процедури можна простежити на рис. 8.2.

На цьому рисунку зображені прямі, що означають реакції фірм, кожна з яких є геометричним місцем точок оптимального випуску однієї фірми за заданого фіксованого випуску другої. Траєкторія руху до точки рівноваги показана стрілками. Як можна помітити, має місце монотонна збіжність до точки рівноваги.

2. Рівновага та нерівновага за Стакельбергом

1. Уявімо, що перша фірма припускає гіпотезу, за якою друга фірма діятиме згідно з Курно, тобто:

$$X_2 = \frac{X_0 - X_1}{2}, \text{ тоді } \frac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\frac{1}{2},$$

тому випуск першої фірми, що максимізує її прибуток (див. (8.29)), дорівнюватиме:

$$X_1^* = \frac{X_0 - X_2}{2 - \frac{1}{2}}.$$

Точку рівноваги за Стакельбергом одержимо, розв’язуючи рівняння:

Перша фірма: $$X_1^S = \frac{X_0 - \frac{1}{2}(X_0 - X_1)}{\frac{3}{2}} = \frac{X_0}{2}.$$

Друга фірма: $$X_2^S = \frac{X_0 - X_1^S}{2} = \frac{X_0}{4}.$$

За таких стратегій перша фірма отримує прибуток:

$$\frac{bX_0^2}{8} - d,$$

а друга лише

$$\left[\Pi_2(X_1^S, X_2^S)\right] = b\frac{X_0}{4}\left[X_0 - \frac{3}{4}X_0\right] - d = \frac{bX_0}{4}\ \frac{1}{4}X_0 - d = \frac{bX_0^2}{16} - d.$$

У точці рівноваги за Стакельбергом:

$$X^S = \frac{3}{4}X_0, \quad p^S = a - \frac{3}{4}bX_0,$$

тобто випуск більший, а ціна нижча, ніж у точці Курно (споживачам це вигідно).

2. Якщо і друга фірма так само, як і перша, діятиме за Стакельбергом, тобто виходячи з того, що перша діє згідно з Курно $\left(\frac{\partial X_1}{\partial X_2} = -\frac{1}{2}\right)$, то отримаємо ситуацію, що має назву *нерівновага за Стакельбергом.*

У цьому випадку стратегії симетричні, тому за однакових функцій витрат $X_1^* = X_2^*$, а отже, (8.29) набере вигляду:

$$X_1^{\tilde S} = \frac{X_0 - X_1^{\tilde S}}{3/2},$$

звідси $$X_1^{\tilde S} = X_2^{\tilde S} = \frac{2}{5}X_0.$$

За цих припущень прибуток обох фірм виявиться меншим, ніж у точці Курно:

$$\Pi_1(X_1^{\tilde S}, X_2^{\tilde S}) = \Pi_2(X_1^{\tilde S}, X_2^{\tilde S}) = \frac{2bX_0^2}{25} - d < \frac{1}{9}bX_0^2 - d =$$
$$= \Pi_1(X_1^K, X_2^K) = \Pi_2(X_1^K, X_2^K).$$

Загальний випуск і ціна у цьому випадку дорівнюватимуть:

$$X^{\tilde{S}} = \frac{4}{5} X_0, \quad p^{\tilde{S}} = a - \frac{4}{5} bX_0,$$

тобто це ще більшою мірою підходить споживачеві, ніж у точці рівноваги за Стакельбергом, бо випуск (пропозиція) зростає, а ціни знижуються.

3. Якщо фірми об'єднаються чи домовляться про максимальний прибуток, то йтиметься про утворення монополії. За цих припущень максимальний сумарний прибуток можна подати так:

$$\max_X [bX(X_0 - X) - 2d],$$

або, беручи похідну за X ($X = X_1 + X_2$ — спільний випуск монопольного об'єднання), одержимо:

$$bX_0 - 2bX_M = 0,$$

звідси спільний випуск дорівнює:

$$X^M = \frac{X_0}{2},$$

ціна: $$p^M = a - \frac{bX_0}{2},$$

тобто випуск суттєво зменшиться, а ціна суттєво зросте порівняно з точкою Курно та Стакельберга.

Отже, утворення монополії — це найгірший варіант для споживача.

Усі отримані результати зібрані в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Стан (стратегія)	X_1	X_2	X	$П_1$	$П_2$	$П$	p
Точка Курно	$X_0/3$	$X_0/3$	$2X_0/3$	$bX_0^2/9 - d$	$bX_0^2 \cdot 9 - d$	$bX_0^2 \cdot 2/9 - 2d$	$a - 2/3b\,X_0$
Рівновага за Стакельбергом	$X_0/2$	$X_0/4$	$3X_0/4$	$bX_0^2/8 - d$	$bX_0^2/16 - d$	$bX_0^2 \cdot 3/16 - 2d$	$a - 3/4b\,X_0$. Добре для споживача
Нерівновага за Стакельбергом	$2X_0/5$	$2X_0/5$	$4X_0/5$	$2bX_0^2/25 - d$	$2bX_0^2/25 - d$	$\frac{4}{25}bX_0^2 - 2d$	$a - 4/5b\,X_0$. Дуже добре для споживача
Монополія	—	—	$X_0/2$	—	—	$1/4 \cdot bX_0^2 - 2d$	$a - 1/2b\,X_0$. Погано для споживача

Деякі основні параметри ринкової стратегії учасника олігопольного ринку з урахуванням навчання, динаміки наводяться у низці наукових праць[1].

Наголосимо, що актуальними є подальші дослідження та моделювання конкурентних ринків. Важливо більш глибоко використовувати концептуальні засади рефлексивної поведінки учасників олігопольних ринків. Ураховувати, що «мій конкурент (конкуренти) враховує те, що я враховую рефлексивність його стратегії».

Отже, необхідне всебічне врахування невизначеності, конфліктності та зумовленого ними ризику, ставлення до ризику осіб, які приймають рішення. Доречно використовувати концептуальні положення сучасної теорії гри[2].

8.3. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Виробнича функція та технологічна результативність виробництва. Сутність макроекономічної виробничої функції. Наведіть приклад.
2. Сутність ефективної та неефективної областей ізокванти.
3. Підходи щодо визначення функції витрат у короткотерміновому та довготерміновому періодах. Наведіть приклади.
4. Сутність ізокост постійних витрат. Наведіть приклад.
5. Сутність реакції виробника на зміну ціни випуску.
6. Сутність реакції виробника на зміну цін ресурсів.
7. Поясніть, у чому полягає сутність реакції виробника на одночасну зміну ціни випуску та цін ресурсів.
8. Розкрийте сутність рівноваги за Курно на олігопольному ринку.
9. Поясніть сутність рівноваги за Стакельбергом на олігопольному ринку.

8.4. Теми рефератів

1. Стратегічна привабливість і цінність напряму діяльності.
2. Базові стратегії для формування конкурентних переваг.
3. Ціноутворення на монополізованому ринку.

---

[1] *Наливайко А. Й.* Теорія стратегії підприємства: Сучасний стан та напрямки розвитку. — К.: КНЕУ, 2001.

[2] Економічний ризик: ігрові моделі: Навч. посібник / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко, А. В. Сігал, Я. С. Наконечний; За ред. В. В. Вітлінського. — К.: КНЕУ, 2002.

4. Ціноутворення в умовах олігополії пропозиції.
5. Ціноутворення на ринках чинників виробництва.
6. Паретто-ефективність у виробництві.
7. Стратегія зниження витрат.
8. Стратегія диверсифікації продукції та сегментів ринку
9. Стратегія організаційного розвитку.
10. Еволюційний розвиток ринкової поведінки.
11. Теоретичні аспекти стратегії технічного розвитку.
12. Динаміка капітального чинника виробництва.
13. Мікроекономічна оцінка стратегії вертикальної інтеграції.
14. Програмно-цільове управління.

8.5. Завдання для самостійної роботи

1. Виробнича функція фірми має такий вигляд: $X = -4x_1^2 + 24x_1 + + 2x_1x_2 + 6x_2 - x_2^2$, де x_1, x_2 — витрати ресурсів.

Визначити максимальний випуск і витрати ресурсів (обсяги), що забезпечують цей випуск.

2. Виробнича функція має такий вигляд: $X = 3x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$.

Визначити граничні продукти за ресурсами та побудувати ізокванту. Виписати рівняння ізокліналі (лінії найбільшого зростання випуску), що проходить через точку $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, знайти норму заміщення першого ресурсу другим у цій точці.

3. Виробнича функція $X = 5x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{3}}$ описує залежність між витратами ресурсів x_1, x_2, x_3 і випуском X.

Визначити максимальний випуск, якщо: $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Якими будуть значення граничних продуктів у оптимальній точці?

4. Рекламне оголошення в газеті коштує 500 грн, хвилина телевізійного часу — 1500 грн. Тижневий рекламний бюджет фірми становить 15 000 грн. Якщо x_1, x_2 — це відповідно кількість оголошень у газеті та кількість хвилин рекламного часу на телебаченні за тиждень, то прибуток фірми за тиждень становить: $\Pi(x_1, x_2) = 4x_1 x_2 - 5x_1^2 - x_2^2 + 20x_1 + 100\,000$.

Поясніть, як необхідно використати рекламний бюджет, щоб прибуток був максимальним (max Π, x_1, x_2)?

5. Обчислити середню та граничну ефективність ресурсу x_2, якщо виробнича функція має вигляд: $F(x_1, x_2) = x_2 \dfrac{2x_1^2 + x_2^2}{3x_1^2 + x_2^2}$.

6. За заданого рівня виробництва граничний продукт праці дорівнює 5 одиницям продукції за місяць, а граничний продукт фондів — 10 одиницям продукції за місяць. Визначити граничні норми заміщення праці фондами і фондів працею.

7. Виробнича функція невеликого підприємства, яке виготовляє рами для картин, має вигляд: $X=5K^{1/2}L^{1/2}$, де X — кількість картин, уставлених у раму за день; K — кількість годин роботи машин за день; L — кількість робітників.

Визначити, якими будуть середній і граничний продукти праці за $K = 9$, $L = 9$? Як зміняться ці продукти в разі подвоєння витрат ресурсів?

8. Прибутки двох фірм, що конкурують на ринку одного товару, і ціна товару відповідно дорівнюють: $\Pi_i(x_1, x_2)=[9-(x_1+x_2)]x_i$, $i=1, 2$, $p(x_1, x_2)=15-(x_1+x_2)$, де x_1, x_2 — обсяги випуску фірм.

Визначити оптимальний обсяг випуску кожної фірми за відомого обсягу випуску іншої. Якими (найкращими) будуть стратегії першої фірми з огляду на стратегії другої фірми:

а) $X_2=\dfrac{9-X_1}{2}$; б) $X_2=\dfrac{9-X_1}{3/2}$.

Показати, яким буде спільний випуск за умови об’єднання цих фірм. Визначити, який із варіантів («а», «б» чи об’єднання фірм) буде привабливішим для споживача продукції та чому?

9. Витрати і ціна на продукцію однопродуктової фірми, таким чином, залежать від випуску X: $(C)(X)=\gamma X^2+\beta X+\alpha$, $p(X)=a-bX$.

А. Який обсяг випуску обере фірма?

Б. Як змінюватиметься поведінка фірми за умови введення податкової ставки t (долучимо явним чином витрати на сплату податків у витрати $\beta=\beta_0+t$)?

В. Знайти залежність надходжень до бюджету від податкової ставки (крива Лаффера).

10. Виробнича функція фірми становить: $X=F(x_1, x_2)=A\ln x_1, x_2$, $x_i>x_i^0>1$, $i=1,2$.

Визначити функції попиту на ресурси: $x_1(p, w_1, w_2)$, $x_2(p, w_1, w_2)$, якщо p — ціна продукції ; w_1, w_2 — ціни ресурсів. Як зміняться випуск і попит на ресурси за зростання ціни продукції?

11. Виробнича функція фірми: $X=10x_1^{1/3}x_2^{2/3}$.

Ціни купівлі ресурсів — 5 грн і 10 грн відповідно. Визначити, яким буде максимальний випуск за витрат $C = 100$ грн? Якого змісту можна надати множнику Лагранжа?

9 РОЗДІЛ

МОДЕЛІ ВЗАЄМОДІЇ СПОЖИВАЧІВ І ВИРОБНИКІВ

Існує низка моделей встановлення рівноважної ціни на ринку одного товару. Ми вже розглядали найвідомішу модель — «павутиноподібну» з дискретним часом. Розгляньмо, зокрема, модель Еванса з неперервним часом та модель Вальраса.

9.1. МОДЕЛЬ ЕВАНСА

Маємо ринок одного товару. Час t вважатимемо неперервним.

Позначимо через $d = d(t) = \Phi[p(t)]$, $s = s(t) = \psi[p(t)]$ інтегрований попит і пропозицію в момент t, а через $p(t)$ — ціну товару в цей момент.

У моделі постулюється, що попит і пропозиція є лінійними функціями ціни:

$\Phi(p) = a - bp$, $a > 0$, $b > 0$ (попит зі зростанням ціни спадає);

$\psi(p) = \alpha + \beta p$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (пропозиція зі зростанням ціни зростає).

Окрім цього, слушно вважати, що $a > \alpha$ (за нульової ціни попит перевищує пропозицію).

Основна гіпотеза моделі полягає в тому, що зміна ціни пропорційна перевищенню попиту над пропозицією:

$$\Delta p = \gamma\,(d - s)\Delta t,\ \ \gamma > 0. \tag{9.1}$$

Згідно з гіпотезою (9.1) взаємодія споживачів і виробників відбувається таким чином, що ціна, яка відображає цю взаємодію, неперервно пристосовується до ситуації на ринку: за перевищення попиту над пропозицією ціна зростає, у протилежному разі — спадає.

Використовуючи зроблені припущення, можна прийти до такого диференційного рівняння щодо ціни:

$$\frac{dp}{dt} = -(b+\beta)\,p + a - \alpha,\ \ p(0) = p_0. \tag{9.2}$$

Це рівняння має стаціонарну (рівноважну) точку p^0 (коли $\frac{dp}{dt}=0$):

$$p^0=\frac{a-\alpha}{b+\beta}>0. \qquad (9.3)$$

З виразу (9.2) видно, що за $p_0<p^0$, $\frac{dp}{dt}>0$, а за $p_0>p^0$, $\frac{dp}{dt}<0$, тому $\lim_{t\to\infty}p(t)=p^0$ (у першому випадку ціна досягає рівноважного значення, зростаючи, а в другому — спадаючи, при цьому рівноважна ціна p^0 не залежить від початкової p_0). Рівноважна ціна є абсцисою точки перетину прямих попиту і пропозиції, тобто за такої ціни попит дорівнює пропозиції.

Ці висновки отримані без розв'язку рівняння (9.2). Вони будуть такими самими, якщо прямо використати розв'язок цього рівняння:

$$p(t)=p_0e^{-\gamma(b+\beta)t}+\frac{a-\alpha}{b+\beta}[1-e^{-\gamma(b+\beta)t}].$$

Дискретний аналог моделі Еванса подано на рис. 9.1, де зображені прямі інтегрованого попиту і пропозиції і показано механізм виникнення послідовності p_n, що зростає від початкової ціни p_0, за якої попит не дорівнює пропозиції. Час розподілено на інтервали Δt, ціна в момент $t=n\Delta t$ дорівнює:

$$p_n=p_{n-1}+\gamma\Delta t\delta_{n-1},\ \delta_{n-1}=(a-\alpha)-(b+\beta)p_{n-1}.$$

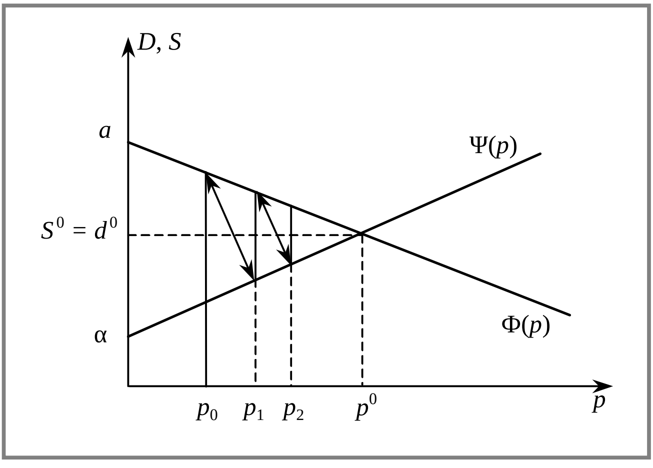


Рис. 9.1. Дискретний аналог моделі Еванса

9.2. МОДЕЛЬ ВАЛЬРАСА

До складу сучасної розвинутої економіки входять численні господарські одиниці та споживачі. Кожний із цих учасників ринку досконалої конкуренції має свої цілі, що уможливлює наявність конфліктних ситуацій. Та щоб економічна система функціонувала нормально, індивідуальні дії різних учасників повинні бути відносно добре узгодженими.

У моделі Вальраса, що включає скінченну кількість споживачів і виробників, таке вирішення (подолання) конфлікту досягається не втручанням держави, а опосередковано, через конкретний ринковий механізм, що ґрунтується на регулюючій дії системи цін. Якщо система цін визначена, то будь-яка ринкова угода незалежно від того, чи є ринок конкурентним, чи ні, здійснюється відповідно до цієї системи цін.

Якщо учасники не можуть впливати на ціни, то ринок називають конкурентним. На конкурентному ринку ціни для кожного з учасників є некерованими, і їм (учасникам) залишається лише пристосовуватися до існуючої системи цін.

Основна ідея Вальраса полягає у тому, щоб за певної системи цін індивідуальні плани (наміри) учасників стали спільними, тобто така система цін забезпечує розподіл ресурсів і продукції на основі розв'язання конфлікту між учасниками. Таку рівноважну ситуацію називають конкурентною рівновагою.

У моделі Вальраса розглядається економіка з l споживачами ($i = 1, \ldots, l$), m виробниками ($k = 1, \ldots, m$) і n типами товарів ($j = 1, \ldots, n$). Через $p = (p_1, \ldots, p_n)$ позначатимемо вектор-рядок цін, а через $x = (x_1, \ldots, x_n)'$ — вектор-стовпчик товарів.

У даній моделі поняття «товар» трактується розширено. Під товаром маються на увазі і предмет (продукт праці), і засіб праці (капітальне обладнання, споруди тощо), і первинні ресурси (праця та природні ресурси).

Модель Вальраса можна розглядати як формалізацію річного циклу виробництва і розподілу товарів у результаті взаємодії суб'єктів економіки (споживачів і виробників), кожний із яких має свої цілі.

Кожен споживач володіє доходом $K(p)$ і має своє поле переваг щодо товарів, яке може бути задане у вигляді індикатора переваг (функції корисності $u(x)$). Якщо позначити через $X(p) = \{x : x \in X, px \le K(p)\}$ множину допустимих наборів товарів, що є доступними споживачеві за цін p, X — область визначення $u(x)$, то функція попиту споживача може бути задана таким чином:

$$\Phi(p)=\begin{cases} x^* : x\in X(p),\ u(x^*)=\max\limits_{x\in X(p)} u(p), \\ \varnothing, \text{якщо максимум не досягається,} \end{cases} \qquad (9.4)$$

тобто функція попиту — це така множина допустимих наборів товарів, кожний із яких (наборів) максимізує корисність споживача за заданого рівня цін p. Отже, кожний споживач характеризується функцією попиту $\Phi_i(p)$ і доходом $K_i(p)$. Припускається, що дохід кожного споживача складається з двох частин: з доходу pb_i від продажу початкового запасу товарів b_i та доходу $l_i(p)$ в результаті участі споживача у виробництві, тобто

$$K_i(p)=pb_i+l_i(p).$$

Кожен виробник (фірма) формалізується своїми технологічними можливостями. Позначимо через $y_k=(y_{k_1},...,y_{k_m})'$ вектор-стовпчик витрат—випуску k-го виробника: додатні компоненти цього вектора задають випуск фірми, від’ємні компоненти — витрати. Тому скалярний добуток py_k є прибутком фірми. Технологічні можливості фірми визначаються як множина всіх допустимих векторів витрат—випуску Y_k. Цю множину називають *множиною виробничих можливостей.*

Під функцією пропозиції фірми розуміють один чи кілька векторів витрат—випуску, котрі за заданих цін p максимізують прибуток:

$$\psi_k(p)=\left\{ y_k : y_k\in Y_k,\ py_k^*=\max_{y_k\in Y_k} py_k \right\}. \qquad (9.5)$$

Вважається, що Y_k для будь-якого k є замкнутою множиною і $O\in Y_k$, тобто фірма може не випускати продукцію та не робити витрат.

Вектор витрат—випуску для всієї економіки визначається як сума векторів витрат—випуску для всіх виробників:

$$y=\sum_{k=1}^{m} y_k. \qquad (9.6)$$

За такої інтеграції проміжні продукти взаємно скорочуються, тому в подальшому аналізі не беруть участі.

У результаті у вектор y увійдуть з додатним знаком лише кінцеві продукти (кінцевий випуск), а з від’ємним знаком — первинні ресурси.

Вектор y набуває певних значень із загальноекономічної множини виробничих можливостей:

$$Y = \left\{ y : y = \sum_{k=1}^{m} y_k ,\ y_k \in Y_k ,\ k = 1, \ldots, m \right\}.$$

Основна функція економіки незалежно від того, чи вона є централізованою, а чи децентралізованою, полягає в розподілі сукупного (інтегрованого) виробництва між виробниками і в розподілі вироблених продуктів серед споживачів.

Розподіл виробництва здійснюється обранням вектора витрат—випуску y_k із технологічної множини виробничих можливостей Y_k для кожного виробника (k = 1, …, m), сума $y = \sum_{k=1}^{m} y_k$ являє собою сукупний (інтегрований) виробничий процес.

Такі сукупні процеси утворюють сукупну технологічну множину Y (загальноекономічну множину виробничих можливостей).

Сума по всіх споживачах $b = \sum_{i=1}^{l} b_i$ становить *сукупну початкову власність.*

У поняття початкової власності можуть входити не лише споживчі товари, а й проміжні продукти (предмети праці), капітальне обладнання (засоби праці), земля та інші природні ресурси, праця. Множина $\{b\} + Y$ являє собою *множину сукупної пропозиції.*

Розподіл споживання здійснюється через вибір кожним споживачем меню споживання:

$$x_i \in X_i ,\ i = 1, \ldots, l ,$$

$x = \sum_{i=1}^{l} x_i$ є вектором сукупного попиту, деякі з компонент якого можуть бути від’ємними, якщо вони є пропозицією (наприклад праця).

Під спільним розподілом виробництва і споживання мають на увазі такий набір векторів споживання і векторів витрат—випуску

$$(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_l,\ \ y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_m),\ \ x_i \in X,\ \ y_k \in Y_k ,$$

для якого сукупний попит збігається із сукупною пропозицією, тобто

$$x = \sum_{i=1}^{l} x_i = b + \sum_{k=1}^{m} y_k = b + y. \qquad (9.7)$$

Набір $(x_1^*, \ldots, x_l^*,\ y_1^*, \ldots, y_m^*,\ p^*)$ задає конкурентну рівновагу в моделі Вальраса, якщо:

$$x_i^* \in \Phi_i(p^*),\ i = 1, ..., l,$$
$$y_k^* = \psi_k(p^*),\ k = 1, ..., m, \tag{9.8}$$

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^* + b \geq \sum_{i=1}^{l} x_i^*, \tag{9.9}$$

$$p^*\left(\sum_{k=1}^{m} y_k^* + b\right) = p^* \sum_{i=1}^{l} x_i^*. \tag{9.10}$$

Тут p^* називають *вектором конкурентних цін*.

Співвідношення (9.9), (9.10) іменують *законом Вальраса у широкому розумінні*, якщо ж у (9.9) має місце рівність, — це *закон Вальраса у вузькому розумінні*.

Таким чином, конкурентна рівновага являє собою сумісний розподіл виробництва та споживання, а сукупний попит у цьому разі не перевищує сукупної пропозиції (9.9). Вартість сукупного попиту в конкурентних цінах дорівнює вартості сукупної пропозиції в тих самих цінах (9.10), де кожний із споживачів максимізує свою корисність у цінах p^*, а кожний із виробників — свій прибуток у тих самих цінах (9.8). Отже, існування конкурентної рівноваги означає існування такої системи рівноважних (конкурентних) цін p^*, за якої узгоджуються конфліктні інтереси споживачів і виробників.

Постає питання, за яких умов існує конкурентна рівновага в моделі Вальраса?

Згідно з теоремою Ерроу—Дебре конкурентна рівновага існує за наявності таких умов:

1. Множина наборів споживчих благ X_i для кожного із споживачів є замкнутою, опуклою і необмеженою множиною: $X_i \subset R^n$.

2. Кожна множина X_i має нижню границю c_i: $x_i \geq c_i$, $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, l$.

3. Функція U_i неперервна і ввігнута на X_i, $i = 1, \ldots, l$.

4. Кожен споживач має, взагалі кажучи, необмежені потреби і володіє певною невід'ємною початковою власністю b_i, $i = 1, \ldots, l$.

5. Кожна технологічна множина є замкнутою опуклою множиною: $Y_k \subset R^n$, $O \in Y_k$.

6. Сукупна технологічна множина Y є опуклою та задовольняє умову: $Y \cap R_n^+ = \{O\}$, тобто не може існувати додатного чистого випуску хоча б по одному з товарів без існування хоча б по одному з товарів (ресурсу) від'ємних витрат.

7. Існують такі lm константи $\alpha_{ik} \le 1, \sum_{i=1}^{l} \alpha_{ik} = 1, \ k = 1, ..., m$, що $K_i(p) = pb_i + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik} py_k$, тобто α_{ik} — частка (питома вага) участі i-го споживача у прибутках k-го виробника (це умова, окрім іншого, означає, що прибуток кожного виробника без залишку розподіляється між споживачами, які є пайовиками).

Зазначимо, що навіть за існування конкурентної рівноваги немає гарантії того, що економіка перейде в цей стан. Необхідно досліджувати, для яких станів економіки є можливим перехід у стан конкурентної рівноваги, а для яких він неможливий. Якщо ж перехід є можливим, треба вказати керівне правило, за якого цей перехід можна здійснити.

9.3. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Економічний сенс моделі конкурентної рівноваги за Вальрасом.
2. Інтерпретація умов теореми Ерроу—Дебре з погляду економіки.
3. Поясніть, які з умов теореми Ерроу—Дебре виконуються в моделі, наведеній нижче.
   Нехай на ринку наявні лише два товари і один узагальнений споживач. Технологічна множина виробничого сектору задається в такому вигляді: $Y = \{(y_1, y_2) : 0 \le y_1 \le 1, y_2 = 0\}$.
   Функція корисності споживача має вигляд: $u(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$ і визначена на множині $X = \{(x_1, x_2) : x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_2 - 1 \le x_1 \le x_2 + 1\}$.
   Увесь дохід виробничого сектору $p_1 y_1 + p_2 y_2$ надходить у розпорядження споживача.

9.4. Завдання для самостійної роботи

1. На ринку є три продавці та три покупці. Відомі функції пропозиції і ціни продавців:

$$Q_1^S = 2p - 6; \quad Q_2^S = 3p - 15; \quad Q_3^S = 5p$$

та функції попиту за ціни продавців:

$$Q_1^D = 12 - p; \quad Q_2^D = 16 - 4p; \quad Q_3^D = 10 - 0{,}5p,$$

де *p* — ціна товару.

Потрібно визначити ціну рівноваги та обсяг угоди кожного з учасників торгівлі.

2. На ринку мобільних телефонів установилася рівновага за $p = 60$ грош. од. та $Q = 190$. Коефіцієнт прямої еластичності попиту дорівнює 0,05, а коефіцієнт прямої еластичності пропозиції + 0,1.

Якою буде ціна мобільних телефонів, якщо попит зросте на 10 %, а їх пропозиція — на 5 %, за гіпотези, що в даній області змін попиту та пропозиції їхні графіки є лінійними?

3. Функція попиту на торти має вигляд:

$$Q_1^D = 200 - 0{,}5p_t,$$

а функція їх пропозиції —

$$Q_1^S = 0{,}7p_{t-1} - 10,$$

де $t = 0, 1, ..., 6$ — дні тижня від неділі до суботи.

А. Визначити рівноважну ціну тортів.

Б. Якою буде ціна у кожний день тижня, якщо в неділю на ринку була рівноважна ціна, а в понеділок попит знизився настільки, що за кожним значенням ціни купували на 10 тортів менше?

В. Якою буде рівноважна ціна за зниження попиту?

4. Відомі функції ринкового попиту: $Q^D = 10 - p$ та пропозиції: за кожну продану одиницю продукції виробник повинен сплачувати податок у обсязі 1,5 грош. од. Яку частку цього податку виробник перекладе на споживача?

5. Ринок цементу характеризується такими функціями попиту й пропозиції:

$$Q^D = 12 - p; \quad Q^S = -3 + 2p.$$

1) Який обсяг податків буде зібрано з продажу цементу, якщо встановити 50 % податку з виручки?

2) На скільки зросте обсяг продажу цементу за умови скасування податку?

6. Яким чином, використовуючи діаграму Еджворта, можна побудувати криву трансформації виробничих потужностей?

7. Миттєва, короткотермінова та довготермінова рівновага

8. Сутність механізмів адаптації за Вальрасом і за Маршаллом.

10

РОЗДІЛ

МІКРОЕКОНОМІЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БАНКІВСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

10.1. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ЩОДО МОДЕЛЮВАННЯ ДІЯЛЬНОСТІ БАНКІВ

Почнемо з означення поняття *банк*. Одне з них формулюється так: *банк* — це кредитна установа, котра має виняткове право здійснювати в сукупності такі операції: залучення до вкладення грошових засобів (коштів) фізичних і юридичних осіб; розміщення вкладених коштів від свого імені та на свій рахунок на умовах повернення, платності, терміновості; відкриття та ведення банківських рахунків фізичних та юридичних осіб.

Серед основних функцій, що їх виконують банки як суб'єкти економічних відносин, можна виокремити такі чотири групи:

1. Забезпечення розрахунків і сплат.
2. Трансформація активів.
3. Управління ризиками.
4. Опрацювання інформаційних потоків, моніторинг позичальників.

У фінансовому словнику[1] дається означення комерційного банку (БК) як фінансово-кредитної установи, що створюється для залучення коштів і розміщення їх від свого імені на умовах повернення й оплатності. БК здійснює розрахункові операції за дорученням клієнтів, касове обслуговування їх, операції з валютою, коштовними металами, цінними паперами та інші операції, дозволені законом. БК класифікуються за такими ознаками: за належністю статутного капіталу та способами його формування — акціонерні товариства і товариства з обмеженою відповідальністю, банки за участі іноземного капіталу, іноземні банки; за видами здійснюваних операцій — універсальні та спеціалізовані; за територією та сферами діяльності — загальнодержавні, регіональні, галузеві.

---

[1] *Загородній А. Г., Вознюк Г. Л., Смовженко Т. С.* Фінансовий словник. — 3-тє вид., випр. та доп. — К.: Т-во «Знання», КОО, 2000.

Банки та загальна теорія рівноваги

Розгляньмо модель деякої (найпростішої) економічної системи, в межах якої діють агенти трьох видів:

- домашні господарства (чи споживачі), які мають заощадження в грошовій формі S, котрі вони можуть тимчасово вкласти в активи, які приноситимуть дохід;
- підприємства (фірми чи підприємці), котрі пропонують деякі проекти, що приноситимуть дохід, але вимагають початкових інвестицій в обсязі I. Фінансування проектів може здійснюватись у двох формах: за рахунок кредитів і за рахунок емісії (випуску) цінних паперів (прямих зобов'язань). Потребу фірми у кредитах позначатимемо через L^-, а зобов'язання як B_f;
- банки — фінансові посередники, що займаються залученням коштів як за допомогою емісії цінних паперів (зобов'язань), так і за рахунок прийняття на депозити збережень домашніх господарств з метою їх інвестування в проекти, пропоновані фірмами. Через L^+ позначатимемо обсяг кредитів, що їх пропонують фірмам банки, через D^- — попит банків на депозити домашніх господарств (відповідно, через D^+ — їх пропозицію домашніми господарствами), через B_b — обсяг зобов'язань, емітованих банками.

Для спрощення припустимо, що банки і фірми лише емітують цінні папери, а їх придбанням в обсязі B_h займаються лише домашні господарства, використовуючи це як форму розміщення збережених коштів — альтернативу депозитам. Для фінансового ринку має місце спрощене рівняння балансу:

$$B_f + B_b = B_h.$$

Спинімося на деяких задачах, які треба розв'язувати у межах описаної ситуації. Зробимо також, для спрощення, припущення: фірми можна подати як деяку усереднену фірму (типового представника). А також, для спрощення, обмежимося розглядом лише двох часових етапів функціонування цієї гіпотетичної економічної системи[1].

Нехай на початок першого етапу домашнє господарство володіє коштами обсягом W. Воно розподіляє їх на дві частини (споживання і накопичення). «Поведінка» домашнього господарства описується двовимірним вектором (C_1, C_2), де C_t — обсяг його споживання у періоді $t = 1, 2$. Якість споживання можна описати деякою функцією корисності $u(C_1, C_2)$. Ідеться про обрання такої

---

[1] *Вишняков Н. В.* Экономико-математические модели оценки деятельности коммерческих банков. — СПб., 1999.

стратегії споживання (C_1, C_2), котра б максимізувала корисність з урахуванням бюджетних обмежень:

$$\max u\ (C_1, C_2), \tag{10.1}$$

$$C_1 + B_h + D^+ = W, \tag{10.2}$$

$$C_2 = \pi_f + \pi_b + (1 + \mathrm{r})B_h + (1 + r_D)D^+, \tag{10.3}$$

де π_f і π_b — чистий прибуток фірм і банків відповідно, що розподіляється серед домашніх господарств упродовж етапу $t = 2$;

r — норма відсоткових сплат за цінними паперами (зобов'язаннями);

r_D — норма відсоткових сплат за депозитами.

У даній (виродженій) ситуації, очевидно, депозити і цінні папери є досконалими субститутами. Неважко показати, що отриманий розв'язок задачі (10.1)—(10.3) досягається за умови

$$r = r_D\ . \tag{10.4}$$

Завдання, що стоїть перед фірмою, полягає в обранні значень обсягів прямого та банківського фінансування (L^- та B_f), які максимізують її прибуток:

$$\max \pi_f\ , \tag{10.5}$$

за умов

$$\pi_\mathrm{f} = f\,(I) - (1 + r)\ B_f - (1 + r_L)L^{-1}, \tag{10.6}$$

$$I = B_\mathrm{f} + L^-, \tag{10.7}$$

де $f\,(I)$ — виробнича функція фірми, що визначає обсяги її валового випуску залежно від обсягу інвестицій I;

r_L — норма відсотка за банківськими кредитами.

За аналогією з припущеннями стосовно до «поведінки» домашнього господарства для фірми кредити та цінні папери також є досконалими субститутами, і розв'язок задачі (10.5)—(10.7) досягається лише тоді, коли

$$r = r_L\ . \tag{10.8}$$

Одна із цілей функціонування банку полягає в максимізації прибутку π_b за рахунок визначення оптимальних значень обсягів виданих фірмам кредитів L^+, зібраних з домашніх господарств депозитів D^- та емітованих цінних паперів B_b. Задача має вигляд:

$$\max \pi_b\ , \tag{10.9}$$

$$\pi_b = r_L\, L^+ - rB_b - D^-, \tag{10.10}$$

$$L^+ = B_b + D^-\ . \tag{10.11}$$

Загальна рівновага в даній економічній системі характеризується:

- вектором відсоткових ставок (r, r_L, r_D);
- вектором, що його обирають домашні господарства — (C_1, C_2, B_h, D^+), фірми — (I, B_f, L^-) і банки — (L^+, B_b, D^-). Звичайно, повинні виконуватись умови:
- елементи описаних вище векторів відповідають оптимальному плану щодо вибору домашніми господарствами, фірмами та банками, тобто є розв'язками задач (10.1—10.3), (10.5—10.7), (10.9—10.11);
- для всіх ринків виконуються умови балансу:

— для ринку заощаджень та інвестицій: $I = S$;

— для ринку депозитів: $D^+ = D^-$;

— для ринку капіталів: $L^+ = L^-$,

— для фінансового ринку (ринку цінних паперів): $B_h = B_f + B_b$.

Ураховуючи умови (10.4) та (10.8), можна дійти висновку, що умова рівноваги в даній моделі полягає в рівності всіх відсоткових ставок:

$$r = r_L = r_D. \qquad (10.12)$$

У межах описаної моделі в ситуації рівноваги банки отримують нульовий прибуток, а структура їхнього портфеля (співвідношення залучених депозитів та емітованих зобов'язань) не впливає на діяльність інших агентів ринку (фірм і домашніх господарств).

Даний висновок, по суті, є аналогічним щодо фундаментальної теореми Модільяні—Міллера стосовно до структури капіталу фірми в умовах досконалої конкуренції. Отже, в межах класичної парадигмиЕрроу—Дебре неможливо пояснити причини існування і закономірності функціонування банківської системи. Тобто необхідна побудова моделей, що враховують додаткові аспекти фінансово-економічної діяльності, котрі й розробляються в останні десятиріччя. Серед напрямів розвитку мікроекономічної теорії в даній сфері є, зокрема, такі:

- моделі, що аналізують діяльність банків як фінансових посередників, з урахуванням інформаційної невизначеності та ризику, інформаційної асиметрії;
- моделі, що ґрунтуються на виробничо-організаційному підході;
- моделі банків з позицій сукупності стохастичних фінансових потоків тощо.

10.2. БАНКИ ТА СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІНАНСОВИХ ПОТОКІВ

10.2.1. Основні концепції стохастичного моделювання фінансових потоків

Як зовнішні умови, що впливають на діяльність комерційного банку (чи фінансової фірми), так і процеси, що розвиваються у самому банку, є результатом складної і неоднозначної взаємодії багатьох чинників, причин, залежностей, багато з яких має випадкову (ймовірнісну) і/чи нечітку (розпливчасту) природу. Наслідком цього є те, що робота банківської установи значною мірою обтяжена невизначеністю та зумовленим нею ризиком.

Одним зі способів, за допомогою якого можна описати поточний стан банку (чи іншої фінансової інституції), є його опис за допомогою вектора характеристик:

$$x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Кількісний та якісний склад компонент вектора x визначається ступенем деталізації.

Фактично ця форма опису стану банку за змістом адекватна банківському балансу: компоненти вектора x можуть бути інтерпретовані як звичайні статті балансу, а кількість їх і структура відповідають рівню його агрегованості (щоденний — який включає рахунки другого порядку, чи узагальнений — квартальний тощо). Конкретні значення кожної з компонент x_j вектора стану x визначаються обранням одиниць вимірювання для відповідного ресурсу (характеристики). Здебільшого це вимірювачі коштів у тій чи іншій валюті; можуть бути і так звані ресурсні одиниці (р. од.). Стан окремого j-го ресурсу ототожнюється з деяким елементом множини невід'ємних дійсних чисел $R_+^1 = [0, +\infty)$, геометричним образом якої є додатна піввісь дійсної числової осі. Отже, стан банку загалом можна подати деякою точкою невід'ємного ортанту n-мірного евклідового простору:

$$x \in R_+^n = \left\{ x = (x_1, ..., x_j, ..., x_n) \middle| x_j \in R_+^1 \right\}.$$

Множина всіх можливих (допустимих) точок (векторів) x утворює простір станів банку:

$$X = \{x\} \subset R_+^n.$$

Можуть створюватися також певні похідні (вторинні) характеристики:

$$y=(y_1, ..., y_i, ..., y_m)\in R^m.$$

Зазначимо, що вектор похідних характеристик y є функцією від вектора $x : y = f(x)$.

Як типовий приклад похідних (вторинних) характеристик стану банку постає система обов’язкових фінансових нормативів (коефіцієнтів), що їх установлюють центральні банки чи інші регулюючі органи.

Для врахування чинника часу потрібно задати деяку множину T, елементи котрої $t \in T$ називають моментами часу. Традиційно як модель «неперервного фізичного» часу використовують множину точок нескінченної одномірної дійсної числової осі R^1 з фіксованим початком відліку, а множина всіх ураховуваних моментів часу T — це певний відрізок на цій осі.

Якщо задана модель неперервного часу, то стан j-ї характеристики можна розглядати як значення функції $x_j(t)$, що визначена на множині T і набуває значення на множині R^1_+. Графік функції $x_j(t)$ відіграє роль траєкторії зміни в часі j-ї характеристики. Стан банку загалом — це значення векторної функції часу:

$$x(t) = (x_1(t), ..., x_j(t), ..., x_n(t)), \tag{10.13}$$

а траєкторія системи $\{x(t)\}_{t\in T}$ є деякою кривою (гіперповерхнею) в n-мірному просторі.

Визначається також таке поняття, як «потік».

Потік — це економічна величина, котра вимірюється в русі з урахуванням розглядуваного часового інтервалу. Розмірність потоку — це обсяг, поділений на інтервал часу.

Змістовний бік поняття «потік» пов’язаний з поняттям швидкості зміни стану системи.

Якщо припустити, що функції $x_j(t)$, що задають траєкторії зміни характеристик стану банку, є гладкими та диференційованими в усіх точках інтервалу $T = (T_-, T_+)$, то відповідні перші похідні

$$x'_j(t)=\dot{x}_j(t)=\frac{dx_j(t)}{dt}, \; j=1, ..., n \tag{10.14}$$

можна інтерпретувати як швидкості зміни цих характеристик. Розглядаючи конкретний ресурс, отримують відповідні види потоків: фінансовий, грошовий, потік готівки тощо.

Динаміка банку в цілому може бути описана за допомогою векторного ресурсного потоку

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_j(t), ..., \dot{x}_n(t)),$$

який задає вектор швидкості зміни стану досліджуваного об'єкта в просторі.

Значення окремої характеристики об'єкта дослідження для будь-якого моменту часу $t \in (T_-, T_+)$ визначається за формулою:

$$x_j(t) = \int_{T_-}^{t} \dot{x}_j(\tau)d\tau. \qquad (10.15)$$

Формується також модель, яка ґрунтується на відображенні банку як системи (вектора) первинних ресурсних потоків:

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_j(t), ..., \dot{x}_n(t)),\ t \in (T_-, T_+). \qquad (10.16)$$

Аналогічно можна розглядати і похідні (вторинні) ресурсні потоки:

$$\dot{y}(t) = (\dot{y}_1(t), ..., \dot{y}_i(t), ..., \dot{y}_m(t)),\ t \in (T_-, T_+). \qquad (10.17)$$

Обидві з наведених моделей ((10.13) та (10.16)) дають уявлення щодо стану банку для кожного моменту часу t. Однак можна навести низку прикладів, коли виникає необхідність у переході від «точкового» подання до «інтегрального» опису поводження j-ї характеристики на певному заданому інтервалі часу

$$\left((t_-, t_+) \subseteq (T_-, T_+)\right). \qquad (10.18)$$

Для цього вводиться поняття середнього значення характеристики (j-ї компоненти вектора стану) на інтервалі (t_-, t_+):

$$\bar{x}_j(t_-, t_+) = \frac{1}{t_+ - t_-} \int_{t_-}^{t_+} \dot{x}_j(t)dt, \qquad (10.19)$$

яке вимірюється у відповідних ресурсних одиницях, а також середнього потоку:

$$\bar{\dot{x}}(t_-, t_+) = \frac{x_j(t_+) - x_j(t_-)}{t_+ - t_-}, \qquad (10.20)$$

що вимірюється в ресурсних одиницях на одиницю часу. Зазначимо, що (10.20) визначає середню швидкість зміни обсягу j-го ресурсу за інтервал (t_-, t_+).

Моделі динаміки банківських ресурсів, що ґрунтуються на неперервному поданні часових інтервалів, не повною мірою відповідають процесам, які реалізуються на практиці. По-перше, «фізичний час» як такий, що плине рівномірно і неперервно, не відповідає зазвичай внутрішнім ритмам «життєвого циклу» економічних суб’єктів. Класичний приклад невідповідності «фізичного» і «економічного» часу пов’язаний з необхідністю врахування вихідних і святкових днів, упродовж яких банки не виконують свої операції. По-друге, неперервність висуває високі вимоги щодо масивів даних, необхідних для відповідного їх тестування та експлуатації.

Для переходу від неперервного часу до дискретного, що більш адекватно враховує умови діяльності фінансово-економічних інститутів, може використовуватися так звана інтертемпоральна модель Хікса[1]. Згідно з цією концепцією скінченний відрізок часу $[t_{-}, t_{+}]$, впродовж якого спостерігається функціонування досліджуваної системи, поділяється на рівні K частини (відрізки та напівінтервали) довжиною δ:

$$[t_{-},\ t_{-}+\delta),\ [t_{-}+\delta,\ t_{-}+2\delta),\dots,[t_{-}+(K-1)\delta,\ t_{+}],$$

де $t_{-}+K\delta = t_{+}$.

В основі такого поділу — гіпотеза, за якою всередині цих інтервалів $[t_{-},(k-1)\delta,\ t_{-}+k\delta)]$ усі параметри $x_j(t)$, що характеризують стан банку та умови його функціонування, залишаються (наближено) постійними і змінюються лише на межах часових інтервалів. Ця ідея на принциповому рівні зображена на рис. 10.1.

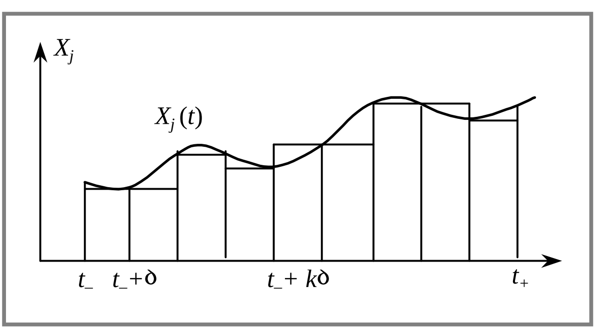


Рис. 10.1. Перехід від неперервного часу до дискретного в інтертемпоральній схемі Хікса

[1] *Хікс Дж.* Стоимость и капитал. — М., 1993.

Отже, отримуємо дискретний «банківський» час τ, що прибирає значення 0,1, …, k, …, K. Легко здійснити узагальнення, враховуючи те, що моменти «банківського» часу τ відділені проміжками часу різної довжини. Це дозволяє враховувати більш точно вимогу постійності процесів усередині цих відрізків та чинник вихідних і святкових днів.

За впровадження дискретного часу відбувається фіксація відносно його моментів векторів стану (вихідних характеристик):

$$x(\tau) = (x_1(\tau), ..., x_j(\tau), ..., x_n(\tau))$$

та векторів ресурсних потоків:

$$\dot{x}(\tau)=(\dot{x}_1(\tau), ..., \dot{x}_j(\tau), ..., \dot{x}_n(\tau)).$$

Можна також перейти від «щоденного» часу до «щотижневого», «щомісячного» тощо.

Наступний крок у процесі вдосконалення розглядуваного класу моделей — урахування в них чинників невизначеності та зумовленого ними ризику. Для цього зручно скористатися термінологією теорії випадкових процесів. Під випадковим (стохастичним) процесом (випадковою функцією часу) розуміють функцію $x(t)$, котра може мати ту чи іншу конкретну реалізацію (траєкторію) з деякої фіксованої множини можливих траєкторій:

$$X = \{x(t, \theta) | \theta \in \Theta\}.$$

Отже, в умовах невизначеності моделлю динаміки стану банку може слугувати векторний випадковий процес:

$$\tilde{x}(t)=(\tilde{x}_1(t), ..., \tilde{x}_j(t), ..., \tilde{x}_n(t)),$$

кожна компонента $\tilde{x}_j(t)$ якого описує стохастичну динаміку j-ї характеристики (ресурсу) банку. Аналогічно чинник невизначеності, наявний у системі ресурсних потоків банку, можна описати у формалізованому вигляді за допомогою векторного випадкового процесу:

$$\tilde{\dot{x}}(\tau)=(\tilde{\dot{x}}_1(\tau), ..., \tilde{\dot{x}}_j(\tau), ..., \tilde{\dot{x}}_n(\tau)), \; i \in (T_-, T_+).$$

Дослідження, спрямовані на змістовний аналіз закономірностей функціонування банків, мають спиратися на дані та гіпотези, що конкретизують тип і параметри використовуваних випадкових величин і функцій[1].

[1] *Хованов Н. В.* Математические модели риска и неопределенности. — СПб., 1998.

10.2.2. Найпростіша мультиплікативна стохастична модель динаміки фінансового ресурсу

За деякий ресурс, що розглядається, можна обрати як залучені кошти загалом, так і депозити до запитання, термінові депозити тощо.

Досліджувана модель ґрунтується на гіпотезі щодо можливості відслідкувати обсяги досліджуваного ресурсу через дискретні рівновеликі проміжки часу t. Позначимо через x_t обсяг ресурсу в момент часу t, а x_0 — обсяг у початковий момент часу (припустимо, що $x_0 > 0$). Припустимо також, що перехід обсягу ресурсу, котрий визначається дійсним числом $x_{i-1} > 0$ у момент часу $t = i - 1$ до ресурсу обсягом $x_i > 0$, що відповідає моменту часу $t = i$, можна описати співвідношенням:

$$x_i = \alpha_i \, x_{i-1}, \qquad (10.21)$$

де $\alpha_i > 0$ — невід'ємний коефіцієнт елементарного переходу від x_{i-1} до x_i, $i = 1, \ldots, n$.

З (10.21) випливає:

$$x_n = x_0 \prod_{i=1}^{n} \alpha_i, \qquad (10.22)$$

де x_0, x_n, $\alpha_i \in R^1$, $x_0 > 0$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

У частковому випадку, коли всі коефіцієнти елементарних переходів є однаковими ($\alpha_i = \alpha > 0$, $i = 1, \ldots, n$), формула (10.22) набуває вигляду:

$$x_n = x_0 \alpha^n = x_0 \exp(n \ln \alpha), \qquad (10.23)$$

що вказує на експоненційну залежність обсягу ресурсу від часу. Тому $x_n \to \infty$, якщо $\alpha > 1$; $x_n \to 0$, якщо $\alpha < 1$.

Якщо спостережувані значення $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ інтерпретувати як реалізації випадкових величин $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$, то формула (10.22) перетворюється у таку стохастичну мультиплікативну модель динаміки ресурсу на дискретному відрізку часу $(0, n)$:

$$\tilde{x}_n = x_0 \prod_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i, \qquad (10.24)$$

де $\tilde{x}_n$ — випадкова величина обсягу ресурсу в момент $t = n$.

Припустимо, що всі випадкові коефіцієнти елементарних переходів є незалежними і кожен з них має логнормальний закон розподілу ($\tilde{\alpha}_i \in L_n(\mu_i, \sigma_i^2)$), де μ_i, σ_i^2 — відповідно математичне сподівання та дисперсія логнормально розподіленої випадкової величини $\tilde{\alpha}_i$:

$$M(\ln\tilde{\alpha}_i) = \mu_i;\ D(\ln\tilde{\alpha}_i) = \sigma_i^2.$$

Функція щільності розподілу $\tilde{\alpha}_i$ запишеться так:

$$f(\alpha; \tilde{\alpha}_i) = \frac{1}{\alpha\sigma_i^{2\delta_i\sqrt{2\pi}}} \exp\left[-\frac{(\ln\alpha - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right],\ \alpha > 0. \qquad (10.25)$$

Вираз для математичного сподівання:

$$m_i = M(\tilde{\alpha}_i) = \int_0^{\infty} \alpha f(\alpha; \tilde{\alpha}_i) d\alpha = \exp\left(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right). \qquad (10.26)$$

Другий початковий момент:

$$M(\tilde{\alpha}_i^2) = \int_0^{\infty} \alpha^2 f(\alpha; \tilde{\alpha}_i) d\alpha = \exp(\mu_i + 2\sigma_i^2). \qquad (10.27)$$

Дисперсія

$$S_i^2 = D(\tilde{\alpha}_i^2) = M(\tilde{\alpha}_i^2) - m_i^2 = \exp(2\mu_i + 2\sigma_i^2) - \exp(2\mu_i + \sigma_i^2). \qquad (10.28)$$

Знайдемо тепер функцію розподілу випадкового коефіцієнта:

$$\tilde{\alpha}_{1,n} = \prod_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i. \qquad (10.29)$$

Очевидно, що в цьому випадку коефіцієнти $\tilde{\alpha}_{1,n}$ мають логнормальний закон розподілу:

$$\left(\tilde{\alpha}_{1,n} \in L_n(\mu, \sigma^2)\right)$$

з параметрами:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \qquad (10.30)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2. \qquad (10.31)$$

Звідси легко отримати вираз для математичного сподівання

$$m_{1,n} = M(\tilde{\alpha}_{1,n}) = \exp\left[\sum_{i=1}^{n} \mu_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right], \qquad (10.32)$$

другого початкового моменту

$$M(\tilde{\alpha}_{1,n}^2)=\exp\left[2\sum_{i=1}^{n}\mu_i+2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right] \qquad (10.33)$$

та дисперсії

$$S_{1,n}^2=\exp\left[2\sum_{i=1}^{n}\mu_i+2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right]-\exp\left[2\sum_{i=1}^{n}\mu_i+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right]. \qquad (10.34)$$

Отримаємо також вираз для випадкової величини $\tilde{x}_n$:

$$\tilde{x}_n=x_0\tilde{\alpha}_{1,n}. \qquad (10.35)$$

Для прогнозування обсягу ресурсу, що здійснюється у момент $t = 0$ на момент часу $t = n$, можна використати математичне сподівання $(\bar{x}_n)$ випадкової величини $\tilde{x}_n$:

$$\bar{x}_n=M(\tilde{x}_n)=x_0M(\tilde{\alpha}_{1,n})=x_0m_{1,n}. \qquad (10.36)$$

Точність такого прогнозу природно оцінити за допомогою середньоквадратичного відхилення:

$$S_n=\sqrt{D(\tilde{x}_n)}=x_0\sqrt{D(\tilde{\alpha}_{1,n})}=x_0S_{1,n}, \qquad (10.37)$$

яке можна використати для побудови довірчого інтервалу:

$$[\bar{x}_n-\gamma S_n, \bar{x}_n+\gamma S_n]. \qquad (10.38)$$

Щодо можливих значень прогнозованої величини ресурсу в момент $t = n$ коефіцієнт $\gamma > 0$ обирається так, щоб забезпечити задану ймовірність потрапляння значень випадкової величини ресурсу $\tilde{x}_n$ у відрізок (10.38) або ймовірність ($\alpha = 1 - \gamma$) (ризик) того, що випадкова величина $\tilde{x}_n$ сягне за межі вказаного відрізка.

Якщо всі незалежні випадкові величини $\tilde{\alpha}_i, i=1, ..., n$ мають один і той самий логнормальний закон розподілу з параметрами μ, $\sigma^2 (\tilde{\alpha}_i \in L_n(\mu, \sigma^2))$, то можна запропонувати наведену нижче схему оцінювання параметрів μ та σ^2.

Нехай спостерігається низка послідовних значень x_0, x_1, …, x_k обсягу ресурсу. Припускаючи, що всі ці значення невід’ємні, обчислюємо низку значень α_1, …, α_n коефіцієнта елементарного переходу:

$$\alpha_i=\frac{x_i}{x_{i-1}}, \quad i=1, ..., k. \qquad (10.39)$$

Згідно з нашою моделлю низку значень $\ln\alpha_i$, $i = 1, …, k$ можна розглядати як просту випадкову вибірку обсягу k з генеральної сукупності, що описується нормальним законом розподілу з математичним сподіванням μ і дисперсією σ^2. Тому обґрунтованою, незміщеною й ефективною оцінкою для параметра слугує вибіркове математичне сподівання:

$$\overline{\mu} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln \alpha_i \ , \tag{10.40}$$

а обґрунтованою й незміщеною оцінкою параметра σ^2 — вибіркова дисперсія:

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} (\ln \alpha_i - \overline{\mu})^2. \tag{10.41}$$

Можна отримати й емпіричні формули для прогнозованої величини $\hat{x}_n$ обсягу ресурсу на момент часу $t = n$ і середньоквадратичне відхилення $\hat{S}_n$ цього прогнозу (для оцінки його точності):

$$\hat{x}_n = x_0 \exp\left[n \left(\overline{\mu} + \frac{\overline{\sigma}^2}{2} \right) \right], \tag{10.42}$$

$$\hat{S}_n = x_0 \left\{ \exp\left[2n(\overline{\mu} + \overline{\sigma}^2) \right] - \exp\left[n(2\overline{\mu} + \overline{\sigma}^2) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{10.43}$$

Однією з проблем, що виникають у ході практичної реалізації викладеної вище методики прогнозування динаміки фінансових ресурсів, є те, що передбачаються досить широкі межі для оцінки можливих відхилень фактичних величин від прогнозних. Натомість величина $\hat{S}_n$, що визначає ці межі, як правило, швидко зростає зі збільшенням номера кожного наступного періоду. Усе це знижує практичну цінність отримуваних результатів.

Очевидно, що значення n^*, починаючи з якого швидкість розходження меж довірчого інтервалу суттєво зростає, може визначатися за умови:

$$(\hat{S}_n)'' = 0. \tag{10.44}$$

З (10.44) можна отримати:

$$n^* = \frac{\ln \left\{ (1-b) \left(1 + \sqrt{1+b^2} \right) + b^2 \right\}}{\overline{\sigma}^2}, \tag{10.45}$$

де

$$b = \frac{2\overline{\mu} + \overline{\sigma}^2}{2\left(\overline{\mu} + \overline{\sigma}^2 \right)}. \tag{10.46}$$

Гіпотеза щодо логнормального закону розподілу коефіцієнтів елементарного переходу забезпечує зручність і простоту мультиплікативних перетворень, що, на жаль, не поширюється на операції адитивного характеру. Практично всі конкретні фінансові ресурси пов’язані тими чи іншими адитивними співвідношеннями, як-от, наприклад, сума всіх депозитів складається із суми трансакційних, ощадних та інших депозитів. Відповідно, узявши гіпотезу щодо логнормального закону розподілу коефіцієнтів переходу для окремих видів депозитів, ми автоматично визначаємо закон розподілу для аналогічних коефіцієнтів сумарних депозитів, який не буде логнормальним. Найбільш раціональним вбачається саме такий підхід до розв’язання цієї суперечності.

Ураховуючи те, що сума незалежних випадкових величин розподілена за нормальним законом, на практиці можна вважати, що розподіл коефіцієнтів елементарного переходу для сумарного фінансового ресурсу можна апроксимувати логнормальним, особливо тоді, коли значення їхніх параметрів мало відрізняються.

10.3. МОНІТОРИНГ СТОХАСТИЧНОЇ ДИНАМІКИ ФІНАНСОВОГО РЕСУРСУ КОМЕРЦІЙНОГО БАНКУ

Побудована вище мультиплікативна стохастична модель визначає достатню точність прогнозів на обмежений часовий період прогнозування, що характеризується незмінністю умов.

Звідси стає актуальною задача щодо розроблення методів оперативного та ефективного визначення моменту зміни чинників, які впливають на динаміку ресурсу (момент зміни значень μ, σ^2). Вона може бути розв’язана за рахунок моніторингу (постійного відстежування) значень математичного сподівання $m_i = M(\tilde{\alpha}_i)$ та дисперсії $S_i^2 = D(\tilde{\alpha}_i)$ випадкових коефіцієнтів елементарного переходу $\tilde{\alpha}(i)$, $i = 1, ..., n...$.

Значення m_i визначає очікувану зміну ресурсу в разі переходу від моменту часу $t = i - 1$ до наступного моменту $t = i$: якщо $m_i < 1$ ($m_i > 1$), то можна очікувати зменшення (збільшення) ресурсу, а коли $m_i = 1$, то суттєвих змін обсягу ресурсу не передбачається. Дисперсія S_i^2 визначає ступінь невизначеності очікуваної величини ресурсу і може слугувати за оцінку ступеня ризику фінансово-економічних операцій, що орієнтуються на очікуваний обсяг ресурсу.

Оскільки математичне сподівання

$$m = M(\tilde{\alpha}) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \qquad (10.47)$$

і дисперсія

$$\sigma^2 = D(\tilde{\alpha}) = \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2) \qquad (10.48)$$

випадкового коефіцієнта елементарного переходу $\tilde{\alpha} \in L_n(\mu, \sigma^2)$ однозначно взаємозв'язані з параметрами

$$\mu = M(\ln\tilde{\alpha}) = 2\ln m - \ln\sqrt{m^2 + S^2}\,, \qquad (10.49)$$

$$\sigma^2 = D(\ln\tilde{\alpha}) = \ln(m^2 + S^2) - 2\ln m \qquad (10.50)$$

відповідної випадкової, розподіленої за нормальним законом величини $\ln\tilde{\alpha} \in N(\mu, \sigma^2)$, то моніторинг параметрів m_i, S_i^2 може редукуватись до відстежування математичного сподівання μ_i та дисперсії σ_i^2, розподілених за нормальним законом випадкових величин, для котрих розроблено солідний арсенал засобів статистичного дослідження. Отже, для здійснення моніторингу параметрів m_i, S_i^2 стохастичної динаміки ресурсу можна запропонувати таку схему:

Нехай системний аналітик спостерігає низку послідовних значень обсягу ресурсу $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Вважаючи, що всі ці величини невід'ємні, обчислюємо низку значень $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$\alpha_i = \frac{x_i}{x_{i-1}}, \quad i = 1, \ \ldots, \ n.$$

Згідно з мультиплікативною стохастичною моделлю динаміки ресурсу низку значень $\ln\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$ можна інтерпретувати як ряд однократних реалізацій незалежної нормально розподіленої випадкової величини $\ln\tilde{\alpha}_i \in N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$.

Для моніторингу математичного сподівання (тренду) цього ряду можна використати ковзне середнє k-го порядку $\bar{\mu}(i;k)$, яке обчислюється за формулою:

$$\bar{\mu}(i;k) = \frac{1}{k}\sum_{j=i-k+1}^{i} \ln\alpha_j \qquad (10.51)$$

для моментів часу $i = k, k + 1, \ldots, n$. Аналогічно обчислюється ковзна дисперсія k-го порядку

$$\bar{\sigma}^2(i;\,k) = \frac{1}{k}\sum_{j=i-k+1}^{i} \left[\ln\alpha_j - \bar{\mu}(i;k)\right]^2, \qquad (10.52)$$

де $i = k, k+1, \ldots, n$. Підставляючи (10.51), (10.52) у формули (10.47), (10.48), отримаємо вирази шуканих ковзних оцінок для математичного сподівання та дисперсії випадкового коефіцієнта i-го елементарного переходу $\tilde{\alpha}(i) \in L_n(\mu_i, \sigma_i^2)$:

$$\overline{m}(i;\, k) = \exp\left[\overline{\mu}(i;\, k) + \frac{\overline{\sigma}^2(i;\, k)}{2}\right], \tag{10.53}$$

$$\overline{S}^2(i;k) = \exp\left[2\overline{\mu}(i;\, k) + 2\overline{\sigma}^2(i;\, k)\right] - \overline{m}^2(i;\, k),\ \ i = k, k+1, \ldots, n. \tag{10.54}$$

Якщо, зокрема, припустити, що в момент $t = 0$ є одиничний обсяг ресурсу ($x_0 = 1$), то величина $\overline{m}(i;\, k)$ має зміст обсягу ресурсу на момент $t = i$.

Однією з цілей моніторингу стохастичної динаміки ресурсу є своєчасне виявлення зміни параметрів m_i, S_i^2 (параметрів μ_i, σ_i^2) цієї динаміки. У простому випадку таку зміну можна подати як перехід від ряду значень $\ln\alpha_1, \ldots, \ln\alpha_{n_1}$, що являє собою n_1-кратну реалізацію нормально розподіленої випадкової величини $\ln\overline{\alpha}_1 \in N(\mu_1, \sigma_1^2)$ до ряду значень $\ln\alpha_{n_1+1}, \ldots, \ln\alpha_{n_1+n_2}$, що становить n_2-кратну реалізацію нормально розподіленої випадкової величини $\ln\overline{\alpha}_2 \in N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Якщо припустити, що дисперсії цих двох рядів спостережень однакові $\left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2\right)$, то перевірку статистичної гіпотези щодо рівності математичних сподівань $(H_0 : \mu_1 = \mu_2)$ можна здійснити за допомогою критерію Стьюдента:

$$T(n_1, n_2) = \frac{\overline{\mu}(n_1; n_2) - \overline{\mu}(n_1 + n_2;\, n_2)}{\overline{\sigma}(n_1, n_2)\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}, \tag{10.55}$$

де

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)\overline{\sigma}^2(n_1; n_2) + (n_2 - 1)\overline{\sigma}^2(n_1 + n_2; n_2)}{n_1 + n_2 - 2}. \tag{10.56}$$

Зафіксувавши рівень довіри $\beta \in (0,1)$ чи рівень допустимого ризику ($\gamma = 1 - \beta$) щодо вихідної гіпотези $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ й обчисливши відповідне критичне значення $T(\beta; \gamma)$ для критерію Стьюдента з $\nu = n_1 + n_2 - 2$ ступенями свободи, беремо вихідну гіпотезу H_0 за умови $\left|T(n_1, n_2)\right| \le T(\beta; \nu)$ і відхиляємо цю гіпотезу на користь альтернативи $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ (чи на користь альтернативи $H_2 : \mu_1 < \mu_2$ — залежно від знака величини $T(n_1, n_2)$ за умови $|T(n_1, n_2)| > T(\beta; \nu)$).

Наведену процедуру виявлення статистично значущих змін параметра μ можна включити в загальну схему моніторингу ресурсу.

Для моментів часу $i = k, k + 1, \ldots, n$ обчислюється «ковзний» дріб Стьюдента:

$$T(i;\, k) = \frac{\overline{\mu}(k;\, k) - \overline{\mu}(i;\, k)}{\overline{\sigma}(k;\, i)\sqrt{\frac{2}{k}}}, \qquad (10.57)$$

де

$$\overline{\sigma}^2(k, i) = \frac{\overline{\sigma}^2(k;\, k) + \overline{\sigma}^2(i;\, k)}{2}, \qquad (10.58)$$

і для значень $i = 2k, 2k + 1, \ldots, n$ перевіряється гіпотеза H_0 за допомогою критерію Стьюдента з $\nu = 2(k - 1)$ ступенями свободи.

Процедуру перевірки статистичної гіпотези $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ за допомогою критерію Стьюдента можна поширити і на випадок нерівних дисперсій σ_1^2, σ_2^2. Численні дослідження показують, що за нерівних дисперсій доречно використовувати критерій Стьюдента з кількістю ступенів свободи ν, що лежать в інтервалі від $k - 1$ до $2(k - 1)$.

Аналогічно проводиться моніторинг дисперсії σ_i^2 для періодичної перевірки гіпотези щодо рівності дисперсій на різних, що не перетинаються, відрізках часу. Для цього обчислюється «ковзний» дріб дисперсій:

$$F(i, k) = \frac{\overline{\sigma}^2(i; k)}{\overline{\sigma}^2(k; k)} \qquad (10.59)$$

для моментів часу $i = k,\ k + 1, \ldots, n$.

Якщо зафіксувати ступінь допустимого ризику γ (чи рівень довіри $\beta = 1 - \gamma$) щодо гіпотези $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, де σ_1^2 — постійна дисперсія випадкових величин $\ln\tilde{\alpha}_1, \ldots, \ln\tilde{\alpha}_k$, а σ_2^2 — постійна дисперсія випадкових величин $\ln\tilde{\alpha}_{i-k+1}, \ldots, \ln\tilde{\alpha}_i$ $i = k, k + 1, \ldots, n$, то гіпотезу H_0 можна перевірити порівнянням обчислюваної величини $F(i, k)$ з критичним значенням $F(\beta, \nu_1, \nu_2)$ F-критерію зі ступенями свободи $\nu_1 = \nu_2 = k - 1$.

10.4. РЕКУРЕНТНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ФІНАНСОВИХ РЕСУРСІВ[1]

Зазначимо, що прибуток, який отримує комерційний банк в окремі періоди часу, не може бути єдиним показником ефективності його діяльності. Окрім прибутку, потрібно враховувати ще й такі характеристики, як обсяг власних коштів (власного капіталу), темпи його зміни, ринкову вартість банку тощо.

Уведемо позначення:

t — індекс періоду ($t = 1, \ldots, T$);

q_t — обсяг власних коштів (засобів) фірми у t-й період;

x_t — обсяг залучених коштів (засобів) фірми у t-й період;

v — усереднена норма витрат на одиницю залучених засобів;

u — усереднена норма доходу на одиницю використовуваних засобів;

θ — частка власних засобів, що перетворюються в активи, тобто використовуваних для отримання доходу;

(vx_t) — витрати на залучення засобів у t-й період;

$u(\theta q_{t-1} + x_t)$ — дохід t-го періоду.

Величина власних засобів визначається за допомогою рекурентного співвідношення:

$$q_{t+1} = q_t + u(\theta q_t + x_{t+1}) - vx_t. \qquad (10.60)$$

Описана модель ґрунтується на таких гіпотезах, що спрощують реальну ситуацію:

- незмінність норм u, v, θ для всіх періодів t, що зумовлює можливість безпосереднього використання даної моделі для відносно короткострокових часових періодів;
- зміна обсягів залучених та використовуваних засобів, а також витрати й отримання доходів відбувається дискретно.

Співвідношення (10.60) є лінійним різницевим рівнянням, для розв'язку котрого можна, зокрема, використати Z-перетворення. Апарат інтегральних та дискретних перетворень ґрунтується на взаємовідповідності однозначної функції (зображення) з відповідною функцією дійсної змінної (оригіналом). Для важливих класів задач це дозволяє здійснювати більш прості операції над зображеннями, що широко використовується для розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь (інтегральні перетворення)

[1] *Конюховський П. В.* Микроэкономическое моделирование банковской деятельности. — СПб.: Питер, 2001.

та в теорії імпульсних систем (дискретне перетворення Лапласа, Z-перетворення).

Нагадаймо, що Z-перетворенням функції дискретного аргументу $f(k) = f_k$, $k = 0, 1, \ldots$ називають функцію

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} ,$$

визначену на певній області комплексної площини.

Перетворимо для зручності вираз (10.60) до вигляду

$$q_{t+1} = (1 + u\theta)q_t + u\, x_{t+1} - v\, x_t \tag{10.61}$$

або

$$q_{t+1} - \rho q_t = u\, x_{t+1} - v\, x_t , \tag{10.62}$$

де

$$\rho = 1 + u\theta . \tag{10.63}$$

Величину ρ можна трактувати як норму накопичення власних засобів (коштів) фірми (банку) впродовж одного періоду.

10.5. БАГАТОЕТАПНА ДИНАМІКА ФІНАНСОВИХ РЕСУРСІВ НА ПІДСТАВІ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЇ СТОХАСТИЧНОЇ МОДЕЛІ [1]

Розгляньмо відносно просту ситуацію. Вважатимемо, що обсяги залучених засобів (коштів) за періодами є деяким зовнішнім чинником, динаміку котрого можна описати за допомогою введеної в п. 10.2. мультиплікативної стохастичної моделі.

Обсяг залучених коштів у період $t + 1$ можна подати як

$$x_{t+1} = x_0 \prod_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i , \tag{10.64}$$

де коефіцієнти приростів $\tilde{\alpha}_i$ — випадкові величини, розподілені згідно з логнормальним законом із параметрами μ_i та σ_i. Припускається, що μ_i залежать від v ($\tilde{\alpha}_i \in L_n(\mu_i(v), \sigma_i)$). Отже, рівняння (10.62) матиме вигляд:

$$q_{t+1} - \rho q_t = x_0 (u\tilde{\alpha}_{t+1} - v) \prod_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i . \tag{10.65}$$

[1] *Конюховський П. В.* Микроэкономическое моделирование банковской деятельности. — Спб.: Питер, 2001.

Розв’язок даного рівняння можна відшукати, використовуючи метод Дюамеля для Z-перетворення. Для цього розглянемо допоміжне рівняння:

$$g_{t+1} - \rho g_t = \delta_t, \quad g_0 = 0, \tag{10.66}$$

де

$$\delta_t = \begin{cases} 1, \text{ якщо } t = 0; \\ 0, \text{ якщо } t > 0. \end{cases} \tag{10.67}$$

Нехай $g_t \to G(z)$ і $\delta_t \to 1$ — Z-перетворення функцій g_t і δ_t. Тоді $g_{t+1} \to ZG(Z)$, а зображення рівняння для (10.66) матиме вигляд:

$$ZG(Z) - \rho G(Z) = 1. \tag{10.68}$$

Отже,

$$G(Z) = \frac{1}{Z-\rho} = \frac{1}{Z}\,\frac{Z}{Z-\rho}. \tag{10.69}$$

Оригіналом для

$$\frac{1}{Z-\rho}$$

послуговує послідовність ρ^t. Маємо з відомих властивостей Z-перетворення:

$$g_t = \begin{cases} 0, \quad \text{якщо } t = 0; \\ \rho^{t+1}, \text{ якщо } t > 0. \end{cases} \tag{10.70}$$

Щоб привести рівняння (10.65) до нульової початкової умови, введемо нову змінну $h_t = q_t - q_0$. Якщо припустити, що

$$\tilde{A}_t = x_0(u\tilde{\alpha}_{t+1} - v)\prod_{i=1}^{t}\tilde{\alpha}_i, \tag{10.71}$$

то рівняння для h_t набере вигляду:

$$h_{t+1} - \rho h_t = \tilde{A}_t + (\rho - 1)q_0. \tag{10.72}$$

Після низки перетворень знайдемо, що

$$h_t = q_0(\rho^t - 1) + \sum_{i=0}^{t-1}\tilde{A}_i\rho^{t-i-1}. \tag{10.73}$$

Таким чином, маємо розв’язок різницевого рівняння (10.65):

$$q_t = q_0\rho^t + x_0(u\tilde{\alpha}_{t+1} - v)\sum_{i=1}^{t-1}\left[\left(\prod_{j=1}^{i}\tilde{\alpha}_j\right)\rho^{t-i-1}\right]. \tag{10.74}$$

Якщо коефіцієнти елементарного переходу мають однакові розподіли для всіх моментів $t(\tilde{\alpha}_t = \tilde{\alpha})$, розв'язок (10.74) набуде вигляду:

$$q_t = q_0\rho^t + x_0(u\tilde{\alpha}_{t+1} - v)\sum_{i=0}^{t-1}\left[\tilde{\alpha}^i\rho^{t-i-1}\right] = q_0\rho^t + x_0(u\tilde{\alpha}_{t+1} - v)\frac{\tilde{\alpha}^t - \rho^t}{\tilde{\alpha} - \rho}. \quad (10.75)$$

Використовуючи результати, отримані за допомогою стохастичних мультиплікативних моделей, прогноз обсягів залучених коштів на момент $t + 1$ матиме вигляд:

$$\bar{x}_{t+1} = \bar{A}^t x_0,\ \bar{A} = \exp\left(\bar{\mu}_0 + \frac{\bar{\sigma}_0^2}{2}\right), \quad (10.76)$$

де x_0 — обсяг залучених коштів на початковий момент ($t = 0$); $\bar{\mu}_0, \bar{\sigma}_0$ — оцінки значень параметрів μ, σ відповідно.

Згідно з гіпотезою щодо взаємної незалежності коефіцієнтів переходу α_t, замінивши їх у формулі (10.75) відповідними оцінками, отримаємо вираз для прогнозного значення обсягу власних коштів на момент t:

$$\bar{q}_t = q_0\rho^t + x_0\frac{u\bar{A} - v}{\bar{A} - \rho}(A^t - \rho^t), \quad (10.77)$$

де $\bar{A}$ можна отримати з (10.76).

В окремому випадку, якщо $\rho \approx \bar{A}$, після розкриття невизначеності $\frac{\bar{A}^t - \rho^t}{\bar{A} - \rho}$ вираз (10.77) матиме більш компактну форму:

$$\bar{q}_t = q_0\bar{A}^t + x_0(u\bar{A} - v)t\bar{A}^{t-1}. \quad (10.78)$$

Формули (10.77) та (10.78) мають чітку економічну інтерпретацію — обсяг власних коштів фінансової фірми на момент часу t залежить від двох складових (у межах сформованої моделі):

- $q_0\rho^t$ — величини початкового капіталу з урахуванням політики накопичення;
- $x_0\frac{u\bar{A} - v}{\bar{A} - \rho}(\bar{A}^t - \rho^t)$ — результатів діяльності щодо залучення коштів та отримання доходів від активного та раціонального використання їх.

Можна здійснити графічну ілюстрацію «поведінки» послідовності $\bar{q}_t$ стосовно різних значень норми витрат на залучення коштів (v).

Розгляньмо приклади для демонстрації означених методів на концептуальному рівні.

За статистичну базу візьмімо щорічну фінансову звітність Банку Нью-Йорка (США), яку можна отримати у Web-сервері FDIC. Так, у табл. 10.1 містяться дані щодо динаміки власного капіталу, зобов'язань та обсягів відсоткових доходів цього банку (у млн доларів США) за період 1992—1997 роки.

Таблиця 10.1

ДИНАМІКА ВЛАСНОГО КАПІТАЛУ, ЗОБОВ'ЯЗАНЬ, ВІДСОТКОВИХ ДОХОДІВ І ВИТРАТ БАНКУ НЬЮ-ЙОРКА ЗА 1992—1997 рр., ***млн дол.****

Рік	Зобов'язання, x_t	Власний капітал, q_t	Відсотковий дохід, U_t	Відсоткові витрати, V_t	Чистий відсотковий дохід, $U_t - V_t$
1992	34038	2606	2065	1131	934
1993	33207	2881	1808	836	972
1994	36226	3062	2087	1030	1057
1995	39225	3487	2634	1447	1188
1996	48096	4025	2785	1419	1366
1997	51193	4961	3093	1599	1494

* html: www.fdic.gov

На підставі даних табл. 10.1 знайдемо оцінки значень норми доходу від застосування коштів $\hat{\hat{u}}$ як усереднене відношення відсоткового доходу U_t до всього капіталу $x_t + q_t$ і норми витрат на їх залучення $\hat{\hat{v}}$, що дорівнюють усередненому відношенню відсоткових витрат V_t до обсягу зобов'язань попереднього періоду x_{t-1}.

Ураховуючи, що з розгляду вилучені такі чинники, як невідсоткові доходи і витрати, витрати на сплату податків тощо, для зіставлення обсягів чистого відсоткового доходу $U_t - V_t$ з приростами власного капіталу Δq_t треба ввести нормуючий коефіцієнт $\frac{\Delta q_t}{U_t - V_t}$. Після множення на нього первинних оцінок норм доходу та витрат $\left(\hat{\hat{u}}, \hat{\hat{v}}\right)$ отримаємо оцінки $(\bar{u}, \bar{v})$. Використовуючи для знаходження оцінки величини коефіцієнта елементарного переходу обсягів зобов'язань $\bar{A}$ формулу (10.76) і підставляючи замість u та v оцінки їх $\bar{u}$ та $\bar{v}$ у формулу (10.77), можна отримати прогнозні значення обсягів власного капіталу $\overline{q}$ по роках розглядуваного періоду. Результати обчислень подано у вигляді таблиці (табл. 10.2).

Таблиця 10.2

ФАКТИЧНІ ТА ПРОГНОЗНІ ЗНАЧЕННЯ ОБСЯГУ ВЛАСНОГО КАПІТАЛУ БАНКУ НЬЮ-ЙОРКА, ***млн дол.********

Рік	Зобов’язання, x_t	Власний капітал — факт, q_t	Власний капітал — прогноз, $\overline{q}_t$	Зокрема		Відхилення прогнозу від факту, %
				$q_0\ \rho^t$	$\frac{x_0\overline{u}\overline{A}-\overline{v}^{\left(\overline{A}^t-\rho^t\right)}}{\overline{A}-\rho}$	
1992	34038	2606	—	—	—	—
1993	33207	2886	3053	2609	445	–6,0
1994	36226	3062	3541	2612	939	–15,7
1995	39225	3487	4072	2615	1457	–16,8
1996	48096	4025	4651	2618	2033	–15,6
1997	51193	4961	5281	2621	2660	–6,5

* Розрахунок здійснено за даними html:www.fdic.gov

Припустимо відповідно $\Theta = 0{,}05$, $\rho \approx 1{,}001$.

Відносно високий рівень відхилення між розрахунковими і фактичними обсягами адекватний рівню похибки, закладеної у використовуваних даних.

Розвивати викладений вище підхід можна, наприклад, таким чином. Для вивчення впливу рішень, що їх приймає фінансова фірма відносно політики залучення ресурсів, на динаміку її розвитку (зокрема на динаміку власного капіталу) можуть досить ефективно використовуватись рекурентні динамічні моделі, котрі ґрунтуються на математичному апараті лінійних різницевих рівнянь.

Для побудови прогнозів очікуваних значень обсягів фінансових ресурсів депозитної природи, акумульованих за рахунок коштів значної кількості вкладників (однотипових рахунків), можуть бути використані стохастичні моделі банківських депозитів, у яких за основу можна взяти гіпотезу щодо можливості опису процесів, які зумовлюють зміну кількості рахунків і кількості операцій з ними за допомогою випадкових величин, розподілених за законом Пуассона, а коефіцієнтів відносної зміни рахунків у розрізі окремих операцій — за допомогою випадкових величин, що мають логнормальний закон розподілу.

10.6. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Поясніть сутність управління процесами залучення коштів у комерційному банку.
2. Назвіть основні функції, що їх виконують банки як суб'єкти економічних відносин.
3. Поясніть сутність банківської виробничої функції. Наведіть приклад.
4. Концепція ринкової рівноваги для банківської сфери. Її концептуальні засади.
5. Поясніть сутність моделі динаміки фінансового стану банку.
6. Сутність методики прогнозування динаміки фінансових ресурсів комерційного банку.
7. Основні концептуальні засади моніторингу стохастичної динаміки фінансового ресурсу комерційного банку.

10.7. Теми рефератів

1. Стохастична модель поведінки реального вкладника комерційного банку.
2. Стохастична модель поведінки потенційного вкладника комерційного банку.
3. Стохастична модель поведінки сукупності вкладників комерційного банку.
4. Прогнозування очікуваних значень обсягів фінансових ресурсів комерційного банку.
5. Моделювання конкурентної рівноваги на ринку депозитів.
6. Моделювання та управління ринком пасивних операцій комерційного банку.
7. Взаємозв'язки між ризиком, надійністю, ліквідністю та стійкістю комерційного банку.
8. Моделювання та управління портфелем комерційного банку.
9. Моделювання та управління кредитним ризиком комерційного банку.
10. Оцінка ризику ліквідності комерційного банку.

10.8. Завдання для самостійної роботи

1. Рекурентні моделі динаміки фінансових ресурсів.

2. Мультиплікативна стохастична модель багатоетапної динаміки залучених коштів комерційного банку.

3. Основні підходи до моделювання та управління пасивами банку.

11

РОЗДІЛ

МОДЕЛЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

11.1. БАЛАНСОВИЙ МЕТОД. ПРИНЦИПОВА СХЕМА МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ (МГБ)

Балансові моделі широко використовують в економічних дослідженнях, аналізі, плануванні. Ці моделі будуються на підставі балансового методу, тобто узгодженні матеріальних, трудових і фінансових ресурсів. Якщо описувати економічну систему загалом, то під балансовою моделлю мають на увазі систему рівнянь, кожне з яких виражає балансові співвідношення між виробництвом окремими економічними об’єктами обсягів продукції й сукупною потребою в цій продукції. За такого підходу розглядувана економічна система складається з об’єктів, кожен з яких випускає певний продукт, частина якого споживається ним же та іншими об’єктами системи, а решта виводиться за межі системи як її кінцева продукція. Якщо замість поняття «продукт» увести більш загальне поняття «ресурс», то під *балансовою моделлю* розуміють систему рівнянь, котрі задовольняють вимоги відповідності щодо наявності ресурсу та його використання. Можна також розглядати приклади балансової відповідності, як-от: відповідність наявної робочої сили й кількості робочих місць, платоспроможного попиту населення та продукції (товарів і послуг) тощо.

Розгляньмо деякі відомі види балансових моделей:

- часткові матеріальні, трудові й фінансові баланси стосовно до народного господарства чи окремих галузей (регіонів);
- міжгалузеві баланси;
- матричні техпромфінплани підприємств і фірм.

Балансові моделі на підставі звітних балансів характеризують наявні пропорції, де ресурсна частина завжди дорівнює витратній. Для виявлення диспропорцій використовують балансові моделі, в котрих фактичні ресурси узгоджувались би не тільки з їх фактичним споживанням, а й з потребою в них. Зазначимо, що балансові моделі не містять якогось механізму порівняння окремих варіантів економічних рішень (як це має місце, наприклад, у разі вибору одного з альтернативних варіантів інвестиційного проекту, див. розділ 4) і не передбачують взаємозаміни різних видів ресурсів, що не дозволяє здійснити вибір оптимального варіанта розвитку економічної системи. Власне, це й визначає деяку обмеженість балансових моделей і балансового методу загалом.

Основу інформаційного забезпечення балансових моделей в економіці становить матриця коефіцієнтів витрат ресурсів за конкретними напрямами їхнього використання. Наприклад, у моделі міжгалузевого балансу таку роль відіграє так звана *технологічна матриця* — таблиця міжгалузевого балансу, що складається з коефіцієнтів (нормативів) прямих витрат на виробництво одиниці продукції в натуральному вираженні. З багатьох причин вихідні дані реальних господарюючих об'єктів не можуть бути використані в балансових моделях безпосередньо, тому підготовка інформації до введення в модель є досить складною проблемою. Так, для побудови моделі міжгалузевого балансу використовується специфічне поняття чистої (чи технологічної) галузі, що поєднує все виробництво певного (агрегованого) продукту незалежно від адміністративної підпорядкованості й форм власності підприємств і фірм. Перехід від господарських галузей до чистих галузей вимагає спеціального перерахунку реальних даних господарських об'єктів, наприклад, агрегування галузей, вилучення внутрішньогалузевого обігу тощо.

Балансові моделі будуються як числові матриці — прямокутні таблиці чисел. У зв'язку з цим балансові моделі належать до типу матричних економіко-математичних моделей. У матричних моделях балансовий метод дістає чітке математичне вираження. Отже, матричну структуру мають міжгалузевий і міжрегіональний баланси виробництва та розподілу продукції окремих регіонів, моделі промфінпланів підприємств і фірм тощо. Попри специфіку цих моделей їх об'єднує не лише спільний формальний (математичний) апарат побудови та єдиний алгоритм обчислень, а й аналогічність низки економічних характеристик. Це дає змогу розглядати структуру, зміст і основні залежності матричних моделей на прикладі міжгалузевого балансу та розподілу продукції в народному господарстві. Даний баланс відображає виробництво та розподіл суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузевих виробничих зв'язків, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення й розподіл національного доходу.

Принципова схема міжгалузевого балансу (МГБ) виробництва й розподілу суспільного продукту у вартісному вираженні наведена в таблиці 11.1. У підґрунтя цієї схеми покладено поділ сукупного продукту на дві частини: проміжний і кінцевий продукт; усе народне господарство подане тут як сукупність галузей (чисті галузі). Кожна з цих галузей фігурує в балансі як виробник і як споживач. Розгляньмо схему МГБ в розрізі його блоків, що мають різний економічний зміст, — їх заведено називати *квадрантами балансу* (на схемі квадранти позначені римськими цифрами).

Таблиця 11.1

ПРИНЦИПОВА СХЕМА МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ (МГБ)

Галузі-виробники	Галузі-споживачі					Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	3	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}	Y_3	X_3
⋮	⋮	⋮	⋮	I ⋮	⋮	II	⋮
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизація	C_1	C_2	C_3	…	C_n		
Оплата праці	v_1	v_2	v_3	III	v_n	IV	
Чистий дохід	m_1	m_2	m_3	…	m_{n}		
Валовий продукт	X_1	X_2	X_3	…	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$

Перший квадрант МГБ — це таблиця міжгалузевих потоків. Показники, що містяться на перетині рядків і стовпців, є обсягами міжгалузевих потоків продукції x_{ij}, i та j — відповідно номери галузей виробників і споживачів. Перший квадрант за формою є квадратною матрицею n-го порядку, сума всіх елементів якої дорівнює річному фонду відтворення амортизації засобів виробництва у матеріальній сфері.

У другому квадранті подана кінцева продукція всіх галузей матеріального виробництва, де під кінцевою продукцією мається на увазі продукція, що виходить зі сфери виробництва в кінцеве використання (на споживання та накопичення). У табл. 11.1 цей розділ подано в узагальненому вигляді як один стовпчик величин $Y_{i,}$; у розгорнутій схемі балансу кінцевий продукт кожної галузі можна подати диференційовано за напрямами використання: на особисте споживання населення, суспільне споживання, на накопичення, покриття збитків, експорт тощо.

Третій квадрант МГБ також характеризує національний дохід, але з боку його вартісного складу — як суму чистої продукції й амортизації; чисту продукцію тлумачать як суму оплати праці та чистого доходу галузей. Обсяг амортизації (C_j) та чистої продукції ($v_j + m_j$) деякої галузі називають умовно чистою продукцією цієї галузі й позначають у подальшому через Z_j.

Четвертий квадрант відбиває розподіл і використання національного доходу. В результаті перерозподілу створеного національного доходу утворюються скінченні доходи населення, підприємств, держави.

Дані четвертого квадранта важливі для відображення в міжгалузевій моделі балансу доходів і витрат населення, джерел фінансування капіталовкладень, поточних витрат невиробничої сфери, для аналізу загальної структури доходів за групами споживачів. Загалом МГБ у межах єдиної моделі об’єднує баланси галузей матеріального виробництва, баланс сукупного суспільного продукту, баланс національного доходу, баланс доходів і витрат населення.

Якщо, як показано в табл. 11.1, позначити валовий продукт j-ї галузі літерою X_j, то можна записати два співвідношення, що відбивають сутність МГБ та є підґрунтям його економіко-математичної моделі.

По-перше, розглядаючи схему балансу по стовпчиках, можна зробити висновок, що сума матеріальних витрат будь-якої галузі-споживача та її умовно чистий продукт дорівнює валовій продукції цієї галузі:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j, \; j = 1, ..., n. \qquad (11.1)$$

По-друге, розглядаючи МГБ по рядках для кожної галузі-виробника, бачимо, що валова продукція будь-якої галузі дорівнює сумі матеріальних витрат галузей, які споживають її продукцію, і кінцевої продукції даної галузі:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \; i = 1, ..., n. \qquad (11.2)$$

Підсумовуючи за j систему рівнянь (11.1), дістаємо

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j .$$

Аналогічно, підсумовуючи за *i* систему рівнянь (11.2), дістаємо

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i .$$

Звідси легко помітити, що

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i . \qquad (11.3)$$

Це рівняння показує, що в міжгалузевому балансі виконується принцип еквівалентності матеріального та вартісного складу національного доходу.

11.2. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

Основу інформаційного забезпечення моделі міжгалузевого балансу становить технологічна матриця, що містить коефіцієнти прямих матеріальних витрат на виробництво одиниці продукції. Ця матриця є базою економіко-математичної моделі міжгалузевого балансу.

Припускається гіпотеза, згідно з якою для виробництва одиниці продукції в *j*-й галузі необхідна певна кількість витрат проміжної продукції *i*-ї галузі, що становить a_{ij}, і ця величина не залежить від обсягів виробництва в *j*-й галузі та є досить стабільною величиною в часі. Величини a_{ij} називають коефіцієнтами прямих матеріальних витрат та обчислюють таким чином:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad a_{ij} = \text{const}, \quad i, j = 1, ..., n. \qquad (11.4)$$

Коефіцієнти прямих матеріальних витрат показують, яку кількість продукції *i*-ї галузі необхідно витратити, якщо враховувати лише прямі витрати, для виробництва одиниці продукції *j*-ї галузі. З урахуванням формули (11.4) систему рівнянь балансу (11.2) можна записати у вигляді

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ X_i + Y_i , \ i = 1, ..., n. \qquad (11.5)$$

Якщо ввести до розгляду матрицю коефіцієнтів прямих матеріальних витрат $A = (a_{ij})$, вектор-стовпчик валової продукції X та вектор-стовпчик кінцевої продукції Y:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix},$$

то система рівнянь (11.5) у матричній формі матиме вигляд

$$X = AX + Y. \tag{11.6}$$

Систему рівнянь (11.5), чи у матричній формі (11.6), називають *економіко-математичною моделлю міжгалузевого балансу (моделлю Леонтьєва, моделлю «витрати — випуск»)*. За допомогою цієї моделі можна виконати три варіанти обчислень:

- задаючи в моделі обсяги валової продукції кожної галузі (X_i), можна визначити обсяги кінцевої продукції кожної галузі (Y_i):

$$Y = (E - A)X, \tag{11.7}$$

де E — одинична матриця n-го порядку;

- задаючи обсяги кінцевої продукції всіх галузей (Y_i), можна визначити обсяги валової продукції кожної галузі (X_i):

$$X = (E - A)^{-1}Y; \tag{11.8}$$

- для низки галузей задаючи обсяги валової продукції, а для решти — обсяги кінцевої продукції, можна відшукати величини кінцевої та валової продукції всіх галузей.

У формулах (11.7) та (11.8) E позначає одиничну матрицю n-го порядку, а $(E - A)^{-1}$ — матрицю, обернену до матриці $(E - A)$.

Якщо визначник матриці $(E - A)$ не дорівнює нулеві, тобто ця матриця не вироджена, тоді існує матриця, обернена до неї. Позначимо цю матрицю через B:

$$B = (E - A)^{-1}. \tag{11.9}$$

Систему рівнянь у матричній формі (11.8) можна записати:

$$X = BY. \tag{11.10}$$

Елементи матриці B позначатимемо через b_{ij}, тоді з матричного рівняння (11.10) для будь-якої i-ї галузі можна отримати співвідношення:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j, \; i = 1, ..., n. \tag{11.11}$$

Із співвідношення (11.11) випливає, що валова продукція постає як зважена сума обсягів кінцевої продукції, ваговими коефіцієнтами тут є b_{ij}, котрі показують, скільки всього необхідно виробити валової продукції i-ї галузі для випуску у сферу кінцевого використання одиниці продукції j-ї галузі. На відміну від коефіцієнтів прямих витрат a_{ij}, коефіцієнти b_{ij} називають *коефіцієнтами повних матеріальних витрат*, і вони включають у себе як прямі, так і опосередковані витрати всіх порядків. Якщо прямі витрати відбивають кількість засобів виробництва, використаних безпосередньо на виготовлення певних обсягів даного продукту, то опосередковані стосуються попередніх стадій виробництва і входять у виробництво продукції не прямо, а через інші (проміжні) засоби виробництва.

Коефіцієнти повних матеріальних витрат b_{ij} показують, який обсяг продукції j-ї галузі необхідно виробити, щоб з урахуванням прямих і опосередкованих витрат цієї продукції отримати одиницю кінцевої продукції j-ї галузі.

Коефіцієнти повних матеріальних витрат можна застосовувати, коли необхідно визначити, як вплинуть на валовий випуск певної галузі деякі зміни щодо обсягів випуску кінцевої продукції всіх галузей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Y_j, \qquad (11.12)$$

де ΔX_i та ΔY_j — зміни (прирости) обсягів валової й кінцевої продукції відповідно.

11.3. КОЕФІЦІЄНТИ ПРЯМИХ І ПОВНИХ МАТЕРІАЛЬНИХ ВИТРАТ

Здійснюючи аналіз моделі міжгалузевого балансу, потрібно розглянути основні властивості матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A. Ці коефіцієнти за визначенням є невід'ємними, отже, матриця A в цілому є невід'ємною: $A \geq 0$. Процес відтворення не можна було б здійснити, якщо б для власного відтворення в галузі витрачався більший обсяг продукту, ніж створювався. Звідси очевидно, що діагональні елементи матриці A менші ніж одиниця: $a_{ii} < 1$, $i = 1, ..., n$.

Система рівнянь міжгалузевого балансу відображає реальні економічні процеси, в котрих сенс можуть мати лише невід'ємні значення валових випусків; таким чином, вектор валової продукції складається з невід'ємних компонентів вектора X, який є невід'ємним вектором: $X > 0$. Постає питання, за яких умов економічна система здатна забезпечити невід'ємний кінцевий випуск у всіх галузях? Відповідь на це питання пов'язана з поняттям продуктивності матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат.

Означення. Називатимемо невід'ємну матрицю A продуктивною, якщо існує такий невід'ємний вектор X, що

$$X > AX. \qquad (11.13)$$

Очевидно, що умова (11.13) означає існування невід'ємного вектора кінцевої продукції $Y > 0$ для моделі міжгалузевого балансу (11.6).

Щоб матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A була продуктивною, необхідно і достатньо, аби виконувалася одна з перелічених нижче умов:

1) матриця $(E - A)$ має бути невід'ємно оберненою, тобто повинна існувати обернена матриця $(E - A)^{-1} \geq 0$;

2) матричний ряд $E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ має збігатися, $A^k \to 0$, $k \to \infty$, а його сума дорівнює оберненій матриці $(E - A)^{-1}$;

3) найбільший за модулем λ розв'язок (власне значення) характеристичного рівняння $|\lambda E - A| = 0$ має бути строго меншим від одиниці;

4) усі головні мінори матриці $(E - A)$, тобто визначники матриць, що утворені елементами перших рядків і перших стовпчиків цієї матриці порядку від 1 до n, мають бути додатними.

Більш простою, але лише достатньою ознакою продуктивності матриці A є обмеження на величину її норми, тобто на величину найбільшої із суми елементів матриці A в кожному стовпчику. Якщо норма матриці A строго менша від одиниці, то ця матриця є продуктивною. Наголосимо, що дана умова є лише достатньою, і матриця A може виявитися продуктивною й у разі, якщо її норма буде більшою за одиницю.

Найбільший за модулем корінь характеристичного рівняння, наведеного в третій умові продуктивності матриці A (позначимо його через λ^*), може слугувати за оцінку загального рівня коефіцієнтів прямих матеріальних витрат, а отже, величина $(1 - \lambda^*)$ характеризує залишок після витрат, тобто продуктивність. Чим більшим є $(1 - \lambda^*)$, тим більшими є можливості досягнення інших цілей, окрім поточного виробничого процесу. Іншими словами, чим вищим є загальний рівень коефіцієнтів матриці A, тим більшим — максимальне за модулем власне значення (λ^*) і нижчим — рівень продуктивності, і навпаки, чим нижчий загальний рівень коефіцієнтів матриці A, тим меншим є максимальне по модулю власне значення (λ^*) і вищою продуктивність.

Проаналізуймо матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат, тобто матрицю $B = (E - A)^{-1}$. Елемент цієї матриці b_{ij} показує, скільки всього необхідно виробити продукції i-ї галузі, щоб одержати одиницю кінцевої продукції j-ї галузі.

Дамо інше означення коефіцієнта повних матеріальних витрат з огляду на те, що окрім прямих витрат існують опосередковані витрати тієї чи іншої продукції для виробництва продукції даної галузі. Розгляньмо для прикладу формування витрат електроенергії на випуск стального прокату, обмежуючись технологічним ланцюжком «руда—чавун—сталь—прокат». Витрати електроенергії для отримання прокату зі сталі називатимемо прямими витратами, ті самі витрати для отримання сталі з чавуну — опосередненими витратами 1-го порядку, а витрати електроенергії для отримання чавуну з руди — опосередкованими витратами електроенергії на випуск сталевого прокату 2-го порядку тощо. Отже, можна дати таке означення:

Коефіцієнтом квазіповних матеріальних витрат c_{ij} називають суму прямих і опосередкованих витрат продукції i-ї галузі для виробництва одиниці продукції j-ї галузі через проміжні продукти на всіх попередніх стадіях виробництва. Якщо коефіцієнти опосередкованих матеріальних витрат k-го порядку позначати через a_{ij}^{k}, то має місце формула

$$c_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \ldots + a_{ij}^{(k)} + \ldots, \qquad (11.14)$$

а якщо ввести до розгляду матрицю коефіцієнтів квазіповних матеріальних витрат $C = (c_{ij})$ та матриці коефіцієнтів опосередкованих матеріальних витрат різних порядків $A^{(k)} = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$, то поелементну формулу (11.14) можна подати в матричній формі:

$$C = A + A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(k)} + \ldots. \qquad (11.15)$$

З огляду на змістовну суть коефіцієнтів опосередкованих матеріальних витрат можна записати такі математичні співвідношення:

$$A^{(1)} = AA = A^2;$$

$$A^{(2)} = AA^{(1)} = AA^2 = A^3;$$

$$A^{(k)} = AA^{(k-1)} = AA^k + A^{k+1},$$

за використання котрих матрична формула (11.15) набирає вигляду

$$C = A + A^1 + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} A^k. \qquad (11.16)$$

Якщо матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A є продуктивною, то з другої умови продуктивності існує матриця $B = (E - A)^{-1}$, яка є сумою збіжного матричного ряду:

$$B=(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \qquad (11.17)$$

Порівнюючи вирази (11.16) та (11.17), дістанемо:

$$B = E + C,$$

або в поелементному записі:

$$b_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, \text{ якщо } i \neq j, \\ 1 + c_{ij}, \text{ якщо } i = j. \end{cases}$$

Це визначає економічний сенс, що пояснює відмінність між коефіцієнтами (елементами) матриць B та C: на відміну від коефіцієнтів матриці C, що враховують лише витрати на виробництво продукції, коефіцієнти матриці B включають у себе, окрім витрат, також одиницю кінцевої продукції, котра виходить за сферу виробництва.

11.4. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АСПЕКТИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПІДСТАВІ МОДЕЛІ МГБ

Основний обсяг обчислень за моделлю МГБ пов'язаний з обчисленнями матриці коефіцієнтів повних матеріальних витрат B. Якщо матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A задана та є продуктивною, то матрицю B можна обчислювати за допомогою формул обернення матриць, що розглядаються в курсі матричної алгебри, або наближеним способом, використовуючи розклад у матричний ряд (11.17).

Розглянемо *перший спосіб* знаходження матриці B. Знаходимо матрицю $(E - A)$, а потім, застосовуючи один із прямих методів пошуку обернених невироджених матриць, обчислюємо матрицю $(E - A)^{-1}$. Одним із широковживаних методів обернення матриць є метод Жордана. Використовують також метод, що ґрунтується на застосуванні формули

$$B=(E-A)^{-1}=\frac{\overline{(E-A)}}{|E-A|}, \qquad (11.18)$$

де в чисельнику — матриця, приєднана до матриці ($E - A$), елементи котрої є алгебраїчними доповненнями для елементів транспонованої матриці $(E - A)'$, а в знаменнику — визначник матриці ($E - A$). Алгебраїчні доповнення, у свою чергу, для елементів з індексами i та j дістають множенням співмножника $(-1)^{i+j}$ на мінор, що отримується після викреслювання з матриці A i-го рядка й j-го стовпчика.

Згідно з *другим способом* обчислення матриці коефіцієнтів повних матеріальних витрат використовують формулу (11.17). Обов'язковою умовою коректності цих обчислень є умова щодо продуктивності матриці A, а, здійснюючи обчислення, обмежуються врахуванням опосередкованих матеріальних витрат до певного порядку (наприклад 3-го порядку). Тут використовується процедура множення квадратних матриць з їхнім наступним додаванням, а коефіцієнти повних матеріальних витрат отримуються з деяким наближенням (із заниженням).

Приклад Для тригалузевої економічної системи задані матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат і вектор кінцевої продукції:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}; \; Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Необхідно обчислити коефіцієнти повних матеріальних витрат і вектор валової продукції, а також заповнити схему міжгалузевого матеріального балансу.

Розв'язання.

1. Визначимо матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат згідно з другим (наближеним) способом, ураховуючи опосереднені матеріальні витрати до 2-го порядку включно. Запишемо матрицю коефіцієнтів опосередкованих витрат 1-го порядку:

$$A^{(1)} = A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0{,}12 & 0{,}20 \\ 0{,}16 & 0{,}27 & 0{,}08 \\ 0{,}17 & 0{,}10 & 0{,}16 \end{pmatrix},$$

матрицю коефіцієнтів опосередкованих витрат 2-го порядку:

$$A^{(2)} = AA^{(1)} = A^3 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0{,}12 & 0{,}20 \\ 0{,}16 & 0{,}27 & 0{,}08 \\ 0{,}17 & 0{,}10 & 0{,}16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}153 & 0{,}103 & 0{,}132 \\ 0{,}126 & 0{,}159 & 0{,}080 \\ 0{,}119 & 0{,}083 & 0{,}100 \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця коефіцієнтів повних матеріальних витрат наближено дорівнюватиме:

$$B \approx E + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1{,}683 & 0{,}323 & 0{,}732 \\ 0{,}486 & 1{,}929 & 0{,}160 \\ 0{,}589 & 0{,}283 & 1{,}460 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислимо матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат за допомогою формул обернення невироджених матриць (перший спосіб):

а) знаходимо матрицю $(E – A)$:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}1 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & -0{,}0 \\ -0{,}3 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix};$$

б) обчислимо визначник цієї матриці:

$$|\,E - A\,| = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}1 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & -0{,}0 \\ -0{,}3 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} = 0{,}196\,;$$

в) транспонуємо матрицю $(E – A)$:

$$|\,E - A\,|' = \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}1 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & 0{,}5 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}0 & 0{,}8 \end{vmatrix};$$

г) знайдемо алгебраїчні доповнення для елементів матриці $|E - A|'$:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0{,}5 & -0{,}1 \\ 0{,}0 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}40;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}12;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0{,}1 & 0{,}5 \\ -0{,}4 & 0{,}0 \end{vmatrix} = 0{,}20;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0{,}1 & 0{,}5 \\ -0{,}4 & 0{,}0 \end{vmatrix} = 0{,}20;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0{,}2 & -0{,}3 \\ 0{,}0 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}16;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}44;$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}0 \end{vmatrix} = 0{,}08;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0{,}2 & -0{,}3 \\ 0{,}5 & -0{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}17;$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}33.$$

Отже, приєднана до матриці ($E - A$) матриця має вигляд:

$$\overline{(E-A)} = \begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}12 & 0{,}20 \\ 0{,}16 & 0{,}44 & 0{,}08 \\ 0{,}17 & 0{,}10 & 0{,}33 \end{pmatrix};$$

д) використовуючи формулу (11.18), знаходимо матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат:

$$B = (E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix}.$$

Як зазначалося, елементи матриці B, що обчислені згідно з першим способом, є дещо більшими, ніж відповідні елементи матриці, обчисленої згідно з другим (наближеним) способом.

3. Знаходимо обсяги валової продукції трьох галузей (вектор X), використовуючи формулу (11.10):

$$X = BY = \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 775{,}3 \\ 510{,}1 \\ 729{,}6 \end{pmatrix}.$$

4. Для обчислення елементів першого квадранта матеріального міжгалузевого балансу скористаємося формулою, що випливає з (11.4), тобто $x_{ij} = a_{ij}X_j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Для отримання елементів першого квадранта необхідно елементи першого стовпчика матриці A перемножити на величину $X_1 = 775{,}3$, елементи другого стовпчика матриці A — на $X_2 = 510{,}1$; елементи третього стовпчика матриці A — на $X_3 = 729{,}6$.

Складові третього квадранта (умовно чиста продукція) знаходять з урахуванням формули (11.1) як різницю між обсягами валової продукції та сумами елементів відповідних стовпчиків відшуканого першого квадранта.

Четвертий квадрант у наведеному прикладі складається лише з одного показника й слугує, зокрема, для контролю правильності обчислень: сума елементів другого квадранта повинна (у вартісному матеріальному балансі) збігатися із сумою елементів третього квадранта.

Результати обчислень подано у вигляді таблиці (табл. 11.2).

Таблиця 11.2

МІЖГАЛУЗЕВИЙ БАЛАНС ВИРОБНИЦТВА Й РОЗПОДІЛУ ПРОДУКЦІЇ

Галузі-виробники	Галузі-споживачі			Кінцева продукція	Валова продукція
	1	2	3		
1	232,6	51,6	291,8	200,0	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100,0	510,1
3	232,6	51,0	145,9	300,0	729,6
Умовно чиста продукція	155,0	153,1	291,9	600,0	
Валова продукція	775,3	510,1	729,6		2015,0

11.5. МІЖГАЛУЗЕВІ БАЛАНСОВІ МОДЕЛІ В АНАЛІЗІ ЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ

Різноманітні модифікації моделі міжгалузевого балансу виробництва й розподілу продукції в народному господарстві дозволяють розширити коло показників, що їх охоплює модель. Розгляньмо застосування міжгалузевого балансового методу для аналізу таких важливих економічних показників, як праця, фонди, ціни.

Важливими аналітичними можливостями даного методу є, зокрема, визначення прямих і повних витрат праці на одиницю продукції та розроблення на підставі цього балансових продуктово-трудових моделей; вихідною моделлю тут слугує звітний міжпродуктовий баланс у натуральному вираженні.

Позначимо витрати живої праці для виробництва j-го продукту через L_j, а обсяг виробництва цього продукту (валовий випуск), як і раніше, через X_j, тоді прямі витрати праці на одиницю

j-го виду продукції (*коефіцієнта прямої трудомісткості*) можна подати формулою:

$$t_j = \frac{L_j}{X_j}, \quad j = 1, ..., n. \tag{11.19}$$

Уведемо таке поняття, як повні *затрати праці* — сума прямих затрат живої праці та затрат уречевленої праці, які переносяться на продукт через використані засоби виробництва. Якщо позначити величину повних затрат праці на одиницю продукції j-го виду через T_j, то добутки $a_{ij} T_j$ відбивають затрати уречевленої праці, перенесеної на одиницю j-го продукту через i-й засіб виробництва. Припускається, що коефіцієнти прямих матеріальних витрат a_{ij} виражені в натуральних одиницях. Тоді повні трудові затрати на одиницю j-го виду продукції (*коефіцієнти повної трудомісткості*) дорівнюватимуть:

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i + t_j, \ j = 1, ..., n. \tag{11.20}$$

Уведемо до розгляду вектор-рядок коефіцієнтів прямої трудомісткості

$$t = (t_1, \ t_2, ..., t_n)$$

і вектор-рядок коефіцієнтів повної трудомісткості

$$T = (T_1, \ T_2, ..., T_n).$$

Тепер, із використанням розглядуваної вище матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A (у натуральному вираженні), систему рівнянь (11.20) можна подати в матричному вигляді:

$$T = TA + t. \tag{11.21}$$

Виконавши відповідні математичні перетворення з використанням одиничної матриці E, а власне:

$$T - TA = TE - TA = T(E - A),$$

$$T(E - A) = t,$$

дістанемо таке співвідношення:

$$T = t(E - A)^{-1}, \tag{11.22}$$

де

$$(E - A)^{-1} = B$$

є матрицею коефіцієнтів повних матеріальних витрат, отже,

$$T = tB. \tag{11.23}$$

Позначимо через L величину сукупних затрат живої праці за всіма видами продукції, котрі з урахуванням (11.19) дорівнюватимуть

$$L=\sum_{j=1}^{n}L_j=\sum_{j=1}^{n}t_j X_j=tX. \qquad (11.24)$$

Використовуючи співвідношення (11.24), (11.23) та (11.10), дістанемо:

$$tX=TY, \qquad (11.25)$$

де t і T — вектор-рядки коефіцієнтів прямої та повної трудомісткості, а X та Y — вектор-стовпці валової та кінцевої продукції відповідно.

Рівняння (11.25) є основним балансовим рівнянням у теорії міжгалузевого балансу праці. Його конкретний економічний сенс полягає в тому, що вартість кінцевої продукції, яка оцінена за повними затратами праці, дорівнює сукупним затратам живої праці. Порівнюючи споживчий ефект різних взаємозамінюваних продуктів з повними трудовими затратами на їх випуск, можна аналізувати порівняльну ефективність їх виробництва.

За допомогою показників повної трудомісткості більш повно й точно, ніж за використання існуючих вартісних показників, виявляється структура витрат на випуск різних видів продукції, а також співвідношення між затратами живої й матеріалізованої праці.

На підставі використання коефіцієнтів прямої та повної трудомісткості можуть розроблятися міжгалузеві й міжпродуктові баланси затрат праці та використання трудових ресурсів. Схематично ці баланси будуються за спільним типом матричних моделей, а всі показники в них (міжгалузеві зв’язки, кінцевий продукт, умовно чиста продукція тощо) виражаються в трудових вимірювачах.

Приклад Нехай у доповнення до вихідних даних попереднього прикладу, наведеного у підрозд. 11.4, задані також затрати живої праці (трудові ресурси) в розрізі трьох галузей: L_1 = 1160; L_2 = 460; L_3 = 875 — в однакових одиницях вимірювання. Треба визначити коефіцієнти прямої та повної трудомісткості й скласти міжгалузевий баланс затрат праці.

Розв’язання.

1. Скориставшись формулою (11.19) та розв’язком попереднього прикладу, знайдемо коефіцієнти прямої трудомісткості:

$$t_1=\frac{1160}{775{,}3}=1{,}5; \quad t_2=\frac{460}{510{,}1}=0{,}9; \quad t_3=\frac{875}{729{,}6}=1{,}2.$$

2. За формулою (11.23) знайдемо коефіцієнти повної трудомісткості:

$$T = (1{,}5;\ 0{,}9;\ 1{,}2)\cdot\begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix} = (4{,}84;\ 3{,}55;\ 3{,}92)\ .$$

3. Перемножуючи відповідно перший, другий і третій рядки першого та другого квадрантів міжгалузевого матеріального балансу, побудованого в попередньому прикладі, на відповідні коефіцієнти прямої трудомісткості, отримаємо схему міжгалузевого балансу праці (в трудових вимірювачах) (табл. 11.3).

Таблиця 11.3

МІЖГАЛУЗЕВИЙ БАЛАНС ЗАТРАТ ПРАЦІ

Галузі-виробники	Галузі-споживачі			Затрати праці на кінцеву продукцію	Затрати праці в галузях (трудові ресурси)
	1	2	3		
1	348,9	76,5	437,7	300,0	1163,0
2	139,6	229,5	0,0	90,0	459,1
3	279,1	61,2	175,1	360,0	875,5

Незначні розходження між даними таблиці та вихідними даними зумовлені похибками заокруглення в обчисленнях.

Розвиток основної (базової) моделі міжгалузевого балансу знайшов своє втілення також завдяки включенню в неї показників фондомісткості продукції. В найпростішому випадку модель доповнюється окремим рядком, в якому подані у вартісному вираженні обсяги виробничих фондів Φ_j, задіяних у кожній j-й галузі (j = 1, …, n). На підставі цих даних та обсягів валової продукції всіх галузей визначаються коефіцієнти прямої *фондомісткості* продукції j-ї галузі:

$$f_j = \frac{\Phi_j}{X_j}, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (11.26)$$

Коефіцієнт прямої фондомісткості показує обсяг виробничих фондів, безпосередньо задіяних у виробництві в даній галузі, в розрахунках на одиницю її валової продукції. На відміну від цього показника коефіцієнт повної фондомісткості F_j відображає обсяг фондів, необхідних у всіх галузях для випуску одиниці кінцевої продукції j-ї галузі (j = 1, …, n). Якщо a_{ij} — коефіцієнти прямих матеріальних витрат, то для коефіцієнтів повної фондомісткості справедливою буде рівність, аналогічна рівності (11.20) для коефіцієнтів повної трудомісткості:

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_i + f_j, \quad j = 1, ..., n. \qquad (11.27)$$

Якщо ввести до розгляду вектор-рядок коефіцієнтів прямої фондомісткості $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ і вектор-рядок коефіцієнтів повної фондомісткості $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$, то систему рівнянь (11.27) можна переписати в матричній формі:

$$F = FA + f. \qquad (11.28)$$

Звідси за допомогою перетворень, аналогічних використовуваним вище щодо коефіцієнтів трудомісткості, можна отримати матричне співвідношення

$$F = f\ B, \qquad (11.29)$$

де $B = (E - A)^{-1}$ — матриця коефіцієнтів повних матеріальних витрат.

Для глибшого аналізу потрібно деталізувати фонди на основні та обігові, а в межах основних — на будівлі, споруди, виробниче устаткування, транспортні засоби тощо.

Нехай у цілому всі виробничі фонди деталізовано на m груп. Тоді характеристика задіяних у народному господарстві фондів задається матрицею показників Φ_{kj}, що відображають обсяг фондів k-ї групи, задіяних у j-й галузі:

$$\left(\Phi_{kj}\right) = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \cdots & \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \cdots & \Phi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{m1} & \Phi_{m2} & \cdots & \Phi_{mn} \end{pmatrix}.$$

Коефіцієнти прямої фондомісткості також утворюють матрицю розмірності $m \times n$, елементи котрої визначають обсяги виробничих фондів k-ї групи, безпосередньо використовуваних у виробництві одиниці продукції j-ї галузі:

$$f_{kj} = \frac{\Phi_{kj}}{X_j}, \quad k = 1, ..., m; \ \ j = 1, ..., n.$$

Для кожної j-ї галузі можна обчислити коефіцієнти повної фондомісткості F_{kj}, що відображають повну потребу в фондах k-ї групи для випуску одиниці кінцевої продукції цієї галузі:

$$F_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_{kj} + f_{kj}, \; k = 1, ..., m; \; j = 1, ..., n. \qquad (11.30)$$

Розв’язок системи рівнянь (11.30) дозволяє подати коефіцієнти повної фондомісткості за кожною з груп фондів як функцію коефіцієнтів прямої фондомісткості:

$$F_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} f_{kj}, \; k = 1, ..., m; \; j = 1, ..., n. \qquad (11.31)$$

У формулах (11.30) та (11.31) величини a_{ij} та b_{ij} — це вже відомі коефіцієнти прямих і повних матеріальних витрат.

Коефіцієнти фондомісткості в міжгалузевому балансі дозволяють узгодити планований випуск продукції з наявними виробничими потужностями. Зокрема, потреба у функціонуючих фондах k-ї групи для отримання запланованого обсягу матеріального виробництва X_j, $j = 1, \ldots, n$ по всіх галузях задається формулою:

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^{n} f_{kj} X_j, \; k = 1, ..., m. \qquad (11.32)$$

11.6. ЗАСТОСУВАННЯ БАЛАНСОВИХ МОДЕЛЕЙ У ЗАДАЧАХ МАРКЕТИНГУ

Розгляньмо розв’язування однієї із задач маркетингу на підставі моделі міжгалузевого балансу.

У моделях міжпродуктових балансів до обсягів кінцевої продукції Y_i, як правило, входить обсяг продукції, що спрямовується на приріст запасів і резервів. Обсяги цього приросту за кожним видом продукції часто задаються поза моделлю (екзогенно), що визначає загальний обсяг продукції кожного найменування, котрий іде на приріст запасів, але не дає можливості дізнатися, в якому саме обсязі необхідні ці запаси для забезпечення неперервності виробництва, якими повинні бути оптимальні обсяги сукупних запасів. Аби відповісти на ці запитання, треба разом з прямими витратами відображати обсяги запасів і резервів у тому розділі балансу, де у рядках розміщені виробничі зв’язки та витрати, а у стовпчиках — витрати різних продуктів на виробництво продукту даного виду.

Ці проблеми можна вирішити введенням так званих коефіцієнтів запасомісткості.

Означення. Коефіцієнт запасомісткості S_{ij} показує, який обсяг запасу продукції *i*-го виду потрібно мати у виробництві одиниці продукції *j*-го виду. Якщо S_{ij} — це величина запасу продукції *i*-го виду, що використовується для виробництва *j*-ї продукції, а X_j — загальний обсяг виробництва *j*-ї продукції, то величину коефіцієнта запасомісткості можна визначити таким чином:

$$S_{ij} = \frac{S_{ij}}{X_j}; \quad i, j = 1, \ ..., \ n \ . \qquad (11.33)$$

На практиці коефіцієнти запасомісткості можна обчислити на підставі статистичних даних за попередні роки.

Якщо до схеми міжпродуктового балансу ввести показник запасомісткості, то рівняння (11.5) (див. підрозд. 11.2) матиме вигляд

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} X_j + Y_i, \ \ i = 1, ..., n \qquad (11.34)$$

або у матричному вигляді:

$$X = AX + SX + Y, \qquad (11.35)$$

де $S = (s_{ij})$ — матриця коефіцієнтів запасомісткості. Звідси маємо:

$$X = (E - A - S)^{-1} Y. \qquad (11.36)$$

Матриця $B^S = (E - A - S)^{-1}$ аналогічна матриці (B) коефіцієнтів нових матеріальних витрат. Поряд з прямими та опосередкованими витратами вона містить також обсяги запасів на одиницю кінцевої продукції.

Балансові моделі можуть бути корисними й у реалізації збутової функції маркетингу, зокрема в питаннях ціноутворення. В умовах формування ринкових цін ці моделі допомагають, наприклад, виявити дисбаланс міжгалузевих і внутрішньогалузевих цін в умовах вільного ринкового ціноутворення.

11.7. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Сутність балансового методу дослідження економічних систем. Основні припущення та гіпотези.
2. Сутність принципової схеми міжгалузевого балансу. Що покладено в основу цієї схеми? Які основні розділи вона містить? Їхня економічна сутність.

3. Сутність економіко-математичної моделі статичного міжгалузевого балансу. Яка основна гіпотеза використовується у побудові моделі МГБ?
4. Сутність коефіцієнтів прямих і повних матеріальних витрат. Основні способи їх обчислення. Навести приклад.
5. Пояснити сутність поняття продуктивності матриці прямих матеріальних витрат. Навести приклад, коли матриця не є продуктивною.
6. Економічний зміст коефіцієнтів прямої та повної трудомісткості.
7. Сутність та основні підходи щодо побудови економіко-математичної моделі міжгалузевого балансу затрат праці.
8. Сутність та способи обчислення коефіцієнтів прямої та повної трудомісткості. Навести приклади.
9. Пояснити економічний сенс коефіцієнтів прямої та повної фондомісткості. Навести приклади.
10. Навести схему та послідовність обчислення коефіцієнтів трудомісткості та фондомісткості на підставі економіко-математичної моделі МГБ.
11. Обчислювальні аспекти розв’язування задач на підставі моделі МГБ.
12. Пояснити сутність поняття продуктивності матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат. Навести приклади.
13. Навести приклади використання балансових моделей та моделі МГБ в задачах маркетингу.
14. Сутність поняття запасомісткості. Основна схема обчислення та практичного застосування матриці коефіцієнтів запасомісткості. Навести приклади.
15. Основні сфери використання в економіці моделей МГБ. Навести приклади.
16. Пояснити, за яких умов модель Леонтьєва є продуктивною.

11.8. Завдання для самостійної роботи

1. На підставі даних, наведених у таблиці, обчислити коефіцієнти прямих і повних матеріальних витрат.

а)

Галузь	Прямі міжгалузеві потоки			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	50	60	80	60
2	25	90	40	25
3	25	60	40	35

б)

Галузь	Прямі міжгалузеві потоки			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	40	18	25	21
2	16	9	25	16
3	80	45	50	75

в)

Галузь	Прямі міжгалузеві потоки			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	18	36	25	1
2	45	90	25	20
3	36	36	50	30

2. У таблицях, поданих нижче, наведені коефіцієнти прямих математичних витрат та обсяги кінцевої продукції в міжгалузевому балансі для трьох галузей:

а)

Галузь	Прямі міжгалузеві потоки			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0,2	0,2	0,1	50
2	0,5	0,3	0,2	0
3	0,2	0,2	0,4	30

б)

Галузь	Прямі міжгалузеві потоки			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0,3	0,4	0,2	40
2	0,2	0,1	0,3	15
3	0,1	0,5	0,2	10

Потрібно:

1) перевірити умови продуктивності матриці коефіцієнтів прямих витрат;

2) обчислити коефіцієнти повних матеріальних витрат;

3) обчислити обсяги валової продукції галузей.

3. На підставі даних таблиць у вправі 2 відтворити схеми міжгалузевого матеріального балансу.

4. Три цехи підприємства випускають продукцію трьох видів:

Виробництво	Споживання			Кінцева продукція	Валовий продукт
	1	2	3		
1	232,6	51	291,8	200	775,3
2	155,1	255	0	100	510,1
3	232,6	51	145,9	300	729,6
Усього	620,3	357	437,7	600	2015

Частина продукції йде на внутрішнє споживання, решта є кінцевою продукцією. Скласти міжпродуктовий баланс виробництва та розподілу продукції підприємства на плановий період, якщо ставиться завдання щодо планового випуску кінцевої продукції в обсягах відповідно: 250; 100; 360.

5. Задана матриця коефіцієнтів прямих витрат чотиригалузевого МГБ.

$$A=\begin{bmatrix} 0{,}52 & 0{,}12 & 0{,}04 & 0{,}20 \\ 0{,}07 & 0{,}35 & 0{,}03 & 0{,}12 \\ 0{,}04 & 0{,}03 & 0{,}30 & 0{,}14 \\ 0{,}05 & 0{,}03 & 0{,}04 & 0{,}20 \end{bmatrix}.$$

Визначити обсяги валової продукції кожної галузі (X_1, X_2, X_3, X_4) за умови, що кінцевий платоспроможний попит на продукцію в прогнозованому періоді в порівнянних цінах складе відповідно:

$$Y_1 = 40{,}3 \text{ млрд грн;}$$
$$Y_2 = 21 \text{ млрд грн;}$$
$$Y_3 = 1{,}3 \text{ млрд грн;}$$
$$Y_4 = 2{,}5 \text{ млрд грн.}$$

6. Який вплив в умовах ринку справить підвищення ціни на продукцію першої галузі в 10 разів на зміну цін в інших галузях? Структуру витрат останнього звітного періоду наведено в таблиці:

ПЕРШИЙ І ТРЕТІЙ КВАДРАНТИ ТРИГАЛУЗЕВОГО МГБ

Галузі-виробники	Галузі-споживачі		
	1	2	3
1	984,4	173,7	59,1
2	227,1	86,9	136,3
3	37,9	37,2	48,3
Заробітна плата	377,1	351,9	75,4
Прибуток від реалізації	563,5	469,3	173,9
Опосередковані податки	207,6	0,0	40,0
Дотації	–579,6	0,0	0,0
Витрати основного капіталу	75,0	122,0	18,0
Валова продукція	1893,0	1241,0	537,0

12

РОЗДІЛ

ТРАДИЦІЙНІ МАКРОЕКОНОМІЧНІ МОДЕЛІ

12.1. КЛАСИЧНА МОДЕЛЬ РИНКОВОЇ ЕКОНОМІКИ

Класичну модель ринкової економіки можна розглядати як систему взаємопов'язаних моделей, кожна з яких відбиває поведінку одного з трьох ринків: робочої сили, грошей, товарів.

Модель найбільше підходить для опису економіки з досконалою конкуренцією. В умовах функціонування монополій вона не працює.

12.1.1. Ринок робочої сили

Цей ринок, як і інші, описується за допомогою трьох залежностей: функції попиту, функції пропозиції та умови рівноваги. У класичній моделі функція попиту на робочу силу виводиться з таких двох гіпотез:

1) підприємства (фірми) повністю є конкурентними за наявності пропозиції товарів і найму робочої сили;

2) за решти рівних умов граничний продукт праці знижується зі зростанням обсягів робочої сили.

З цих гіпотез випливає, що в стані рівноваги граничний продукт праці у вартісному вираженні дорівнює середній ставці заробітної плати (про це йшлося у попередньому матеріалі):

$$p\frac{\partial F}{\partial L}=w, \quad (12.1)$$

де p — ціна продукту, $F = F(K, L)$ — макроекономічна виробнича функція, в якій K — фонди, L — чисельність зайнятих.

Справді, якщо б (12.1) не виконувалося, скажімо, було б $p\frac{\partial F}{\partial L}> w,$ то підприємства намагалися б збільшити найм, оскільки з кожною додатковою одиницею праці отримували б прибуток

$p\dfrac{\partial F}{\partial L} - w$, і навпаки — якщо $p\dfrac{\partial F}{\partial L} < w$, то підприємства зазнали б збитків і намагалися б скоротити найм. З (12.1), тобто з гіпотез 1 і 2, випливає, що зі зниженням ставки заробітної плати граничний продукт також зменшується, доки знову не буде досягнута рівновага.

Викладене вище ґрунтується на концептуальних міркуваннях, але це можна довести й строго математично.

Позначимо через П прибуток (у цьому випадку економіка розглядається як одна велика фірма), тоді, за припущенням, що всі решта чинників виробництва, окрім праці, є фіксованими величинами, отримаємо:

$$\Pi = pF(K, L) - wL, \tag{12.2}$$

необхідна умова максимуму прибутку:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = p\frac{\partial F}{\partial L} - w = 0,$$

але оскільки

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} = p\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \text{ бо } \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \text{ а } p > 0,$$

то, справді, друга гіпотеза — це умова максимуму прибутку (максимуму функції П, поданої рівнянням (12.2)).

Перепишемо співвідношення (12.1):

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{w}{p}$$

і продиференціюємо його за реальною заробітною платою $\dfrac{w}{p}$:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial (w/p)}\right) = 1,$$

оскільки

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}\right) < 0, \text{ то } \left(\frac{\partial L}{\partial (w/p)}\right) < 0,$$

тобто зі зростанням реальної заробітної плати *попит на робочу силу* спадає.

Пропозиція робочої сили також є функцією від реальної заробітної плати.

Припускається постулат: *чим більшою буде реальна заробітна плата, тим більшою буде й пропозиція робочої сили.*

Ця гіпотеза класичної теорії щодо ринку робочої сили подана на рис. 12.1, на якому L^D — крива попиту, а L^S — крива пропозиції.

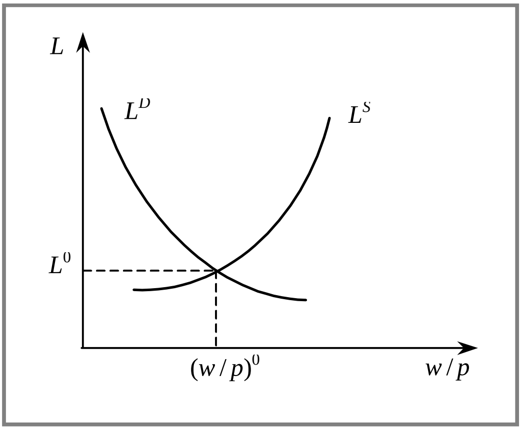


Рис. 12.1

У рівновазі реальна заробітна плата дорівнює $\left(\frac{w}{p}\right)^0$, а зайнятість — L^0.

Якщо б реальна заробітна плата перевищувала рівноважне значення, тобто $\frac{w}{p} > \left(\frac{w}{p}\right)^0$, то виникло б перевищення пропозиції над попитом на робочу силу $L^S\left(\frac{w}{p}\right) > L^D\left(\frac{w}{p}\right)$, тому надлишкова пропозиція призвела б до зниження заробітної плати w під впливом вимушеного безробіття, за цієї умови ціни знижуватимуться, але меншою мірою, отже, реальна заробітна плата зменшиться до $\left(\frac{w}{p}\right)^0$.

Якщо ж виявилося б, що $\frac{w}{p} < \left(\frac{w}{p}\right)^0$, то нестача робочої сили примусила б підприємців збільшити оплату праці, і знову була б досягнута динамічна рівновага.

12.1.2. Ринок грошей

Теорія попиту на гроші (не враховуючи інші види фінансових активів) у класичній моделі ґрунтується на гіпотезі, за якою *сукупний попит на гроші* — це функція грошового доходу (тобто $f(Y_p)$, де Y — валовий внутрішній продукт у натуральному вираженні, p — ціна), ця функція (f) — лінійна і прямо пропорційна грошовому доходу:

$$M^0 = k\,Y_p\,, \qquad (12.3)$$

де пропозиція грошей M^S розглядається як фіксована величина, екзогенно задана. На рис. 12.2 зображені лінії попиту і пропозиції грошей. Для кожного Y своя крива попиту (12.3).

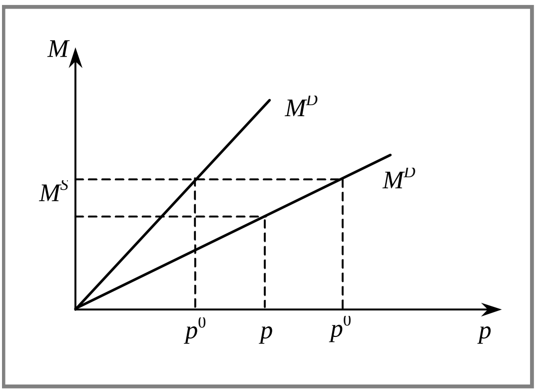


Рис. 12.2

Якщо за фіксованого Y ціна $p < p^0$, то наявна надлишкова пропозиція грошей $M^S - M^D(p) > 0$, у цьому разі припускається гіпотеза, за якою ціни зростуть до рівня p^0.

12.1.3. Ринок товарів

Попит на товари (плановані витрати) — це сума попиту на споживчі та інвестиційні товари $E = C + I$. Згідно з моделлю $C = C(r)$, $I = I(r)$ як функції норми відсотка r, знижуються зі зростанням r.

Справді, чим більше r, тим більшим буде дохід від заощадження, отже, дедалі більша частина доходів зберігатиметься, а менша (C) — витрачатиметься на споживчі товари. Щодо інвестицій (I), то чим більшим є r (тобто ставка відсотка, що використовується під час дисконтування майбутніх витрат і доходів при інвестуванні і приведенні їх до поточного часу), тим нижчою буде сьогоднішня оцінка чистої теперішньої вартості проекту.

У класичній моделі *попит на товари* є функцією рівня зайнятості, що визначається на ринку робочої сили $Y = Y(L^0)$.

Умова рівноваги полягає у тому, що пропозиція товарів $Y(L^0)$ дорівнює попиту на товари $E = C(r) + I(r)$.

12.1.4. Об’єднана (загальна) модель

Об’єднуючи рівняння та умови, що описують ринок робочої сили, грошей і товарів, отримаємо класичну модель у повному обсязі:

Ринок робочої сили:

$$L^S = L^S\left(\frac{w}{p}\right), L^D = L^D\left(\frac{w}{p}\right), \tag{12.4}$$

$$L^S\left[\left(\frac{w}{p}\right)^0\right] = L^D\left[\left(\frac{w}{p}\right)^0\right] = L^0. \tag{12.5}$$

Ринок грошей:

$$M^S = M^S,\ M^D = kpY, \tag{12.6}$$

$$M^S = M^D = kp^0Y. \tag{12.7}$$

Ринок товарів:

$$Y = Y(L^0),\ E = C(r) + I(r), \tag{12.8}$$

$$Y(L^0) = C(r^0) + I(r^0) = Y^0. \tag{12.9}$$

Кожен ринок задається кривими попиту і пропозиції та точкою рівноваги. Зазначимо, що коли один із ринків виходить зі стану рівноваги, то й решта ринків також вийдуть із цього стану, і прямуватимуть до якогось нового стану динамічної рівноваги.

12.2. МОДЕЛЬ КЕЙНСА

Класична модель давала відповідь на задачу щодо пошуку рівноваги в економіці в умовах повної зайнятості. Але як знайти рівновагу, коли економіка характеризується масовим безробіттям?

Л. Харріс[1], зокрема, зазначає: «Кейнс убачав своє завдання в тому, щоб показати, що рівновага за умови повної зайнятості не є

---

[1] *Харрис Л.* Денежная теория. — М.: Прогресс, 1990. — С. 269.

загальним випадком. Загальний випадок — це рівновага за наявності безробіття, а повна зайнятість — лише поодинокий випадок. Щоб досягти бажаного стану повної зайнятості, держава зобов'язана провадити особливу політику щодо досягнення повної зайнятості, бо автоматично діючі ринкові сили без цієї підтримки не гарантують її досягнення».

Вважається, що існує ринок грошей, відмінний від ринку облігацій. Розглядаються три види активів: гроші, облігації, фізичний капітал. Відносна ціна грошей, виражена в облігаціях, — це ставка відсотка по облігаціях. Припускається гіпотеза, що *в умовах рівноваги* норма прибутку на фізичний капітал (тобто на наявний запас інвестицій товарів) дорівнює ставці доходів за облігаціями.

Отже, друга відмінність моделі — відстежити, як грошово-кредитна політика впливає на виробництво. Наприклад, зростання грошової маси шляхом друку нових грошей змінює пропорції обміну між грошима й облігаціями. Якщо грошей стає більше, то їх зберігатимуть лише при зниженні норми відсотка на облігації (альтернативний вид активів), у цьому разі норма прибутку також повинна знизитись, оскільки облігації і фізичний капітал — близькі речі.

Розгляньмо у цьому випадку критерій максимуму прибутку щодо капіталу (фондів) за фіксованого рівня зайнятості:

$$\Pi = p(F(K, L) - rK,$$

тому матимемо такий вираз для необхідної умови екстремуму прибутку:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = p\frac{\partial F}{\partial K} - r = 0,$$

оскільки $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} < 0$, то, справді, отримаємо умову максимуму:

$$p\frac{\partial F}{\partial K} = r, \qquad (12.10)$$

тобто гранична продуктивність фондів у вартісній формі дорівнює нормі прибутку (ставці відсотка).

Отже, зниження норми прибутку згідно з (12.10) означає зниження граничного прибутку капіталу, а оскільки граничний продукт спадає зі зростанням *K*, то зниження норми прибутку з необхідністю передбачає збільшення попиту на інвестиційні товари, відтак, і на товари загалом. Звідси, відстеживши весь причинно-наслідковий ланцюжок, отримаємо, що відносно невелике збільшення грошової маси сприяє зростанню попиту на товари відповідно до зростання пропозиції товарів, тобто до зростання кінцевого продукту.

Розгляньмо більш детально ринок праці в моделі Кейнса. Нагадаємо, що в класичній моделі рівновага настала за повної зайнятості, і рівноважне значення реальної заробітної плати $\left(\frac{w}{p}\right)^0$ визначалося з умови:

$$L^D\left[\left(\frac{w}{p}\right)^0\right] = L^0,$$

при цьому рівноважний кінцевий продукт

$$Y^0 = F(K, L^0),$$

де L^0 — чисельність працівників за умови повної зайнятості.

Припустимо, що з якихось причин попит E (на продукцію) виявився меншим за пропозицію Y^0 за умови повної зайнятості.

У цьому випадку, як вважав Кейнс, фактично вироблений кінцевий продукт Y дорівнюватиме попиту $Y = E$, тобто $Y < Y^0$.

Це негайно вплине на ринок робочої сили, оскільки за решти рівних умов менший обсяг продукту можна виготовити за меншої чисельності працівників, тобто $L < L^0$.

Отже, якщо в класичній моделі реальна заробітна плата $\left(\frac{w}{p}\right)^0$ визначала чисельність зайнятих $L^0 = L\left(\frac{w}{p}\right)^0$, то в моделі Кейнса попит на товари E визначає рівень зайнятості L, при цьому $L^0 - L$ і є тим рівнем безробіття, який диктується ринком грошей і товарів.

Розгадка тут у тім, що виробники не спроможні продати стільки, скільки вони прагнуть, а виробляють і продають лише в обсязі попиту. Тому крива попиту на робочу силу, котра виводилася за гіпотези максимізації прибутку, не може бути використана. Отже, основні новації моделі Кейнса порівняно з класичною моделлю полягають у тому, що:

1) рівновага на ринку товарів досягається за рівності прогнозованого попиту і фактичної пропозиції;

2) фактичний попит на робочу силу визначається у співвідношенні з фактично запитуваним продуктом, а отже, рівновага на ринку робочої сили може досягатись тоді, коли ринок товарів перебуває у рівновазі.

Модель Кейнса записується у вигляді $L_q(r)$ — попит на облігації залежно від ставки відсотка.

Ринок робочої сили:

$$L^S = L^S\left(\frac{w}{p}\right),\ L^D = L^D(Y^0). \qquad (12.11)$$

Ринок грошей:

$$M^S = M^S;\ M^D = kpY + Lq(r),\ \frac{dLq}{dr} < 0, \qquad (12.12)$$

$$M^S = M^D. \qquad (12.13)$$

Ринок товарів:

$$Y = Y(L),\ \ E = C(Y) + I(r),\ \ \frac{dC}{dY} > 0,\ \ \frac{dI}{dr} < 0, \qquad (12.14)$$

$$Y = E. \qquad (12.15)$$

Розгляньмо *рівновагу на ринку товарів*, узявши, наприклад, гіпотезу, що залежності $C(Y)$, $I(r)$ є лінійними, тобто попит на споживчі товари зростає лінійно зі зростанням пропозиції товарів:

$$C(Y) = a + bY,\ \ a > 0,$$
$$0 < b < 1,$$

а попит на інвестиційні товари лінійно спадає зі зростанням норми відсотка:

$$I(r) = d - f(r),$$
$$D > 0,\ \ f > 0.$$

Тоді умова рівноваги (12.15) виглядатиме:

$$Y^G = a + bY^G + d - f(r),$$

звідси отримаємо:

$$Y^G = \frac{(a+d)}{1-b} - \frac{f}{(1-b)}r, \qquad (12.16)$$

тобто крива рівноваги на ринку товарів (крива *IS*) є лінійно-спадною функцією r і, отже, за фіксованого значення r має єдине рівноважне значення $Y^G(r)$.

Розгляньмо тепер *рівновагу на ринку грошей*. Припустимо, що попит на облігації $Lq(r)$ лінійно залежить від r:

$$Lq(r) = k - jr,$$

умова рівноваги (12.13) при цьому залишається у вигляді:

$$MS = MD = LpYM + h - jr,$$

або

$$Y^M = \frac{M^S - h}{kp} + \frac{jr}{kp}, \qquad (12.17)$$

тобто крива рівноваги на ринку грошей (LM) є зростаючою лінійною функцією r, отже, за фіксованого r маємо єдине рівноважне значення $Y^M(r)$.

Загальна рівновага на ринку грошей і товарів досягається за умови:

$$Y^G(r_0) = Y^M(r_0) = Y_0\,;$$

зазначимо, що точка рівноваги (Y^0, r^0) (точка перетину ліній IS і LM) — єдина. Загальна рівновага на ринках грошей і товарів однозначно визначає фактичну потребу в робочій силі: $Y_0 = F(K, L_0)$.

Загальна схема встановлення рівноваги показана на рис. 12.3.

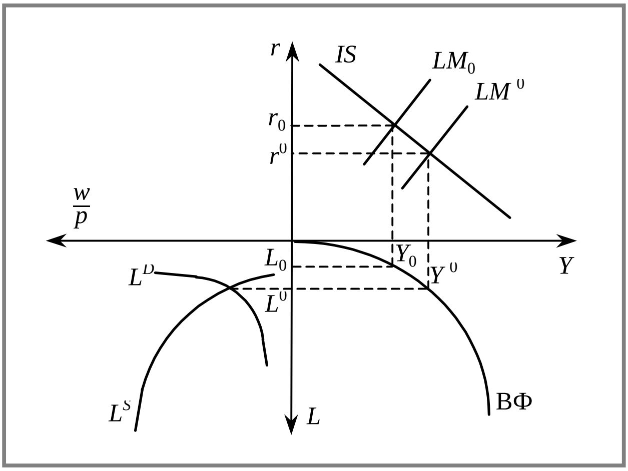


Рис. 12.3

У першому квадранті тут зображені лінії IS, LM, у четвертому квадранті — виробнича функція економіки (ВФ) як функція L, у третьому квадранті — криві попиту і пропозиції на робочу силу. Як можна побачити, причинні зв’язки спрямовані від ринків товарів і грошей до ринку робочої сили через ВФ, а отже, ринок праці не є визначальним.

Якщо класична модель передбачає (постулює) автоматичну тенденцію щодо повної зайнятості, то у моделі Кейнса такого немає. Справді, нехай рівновага на ринку праці встановилася за умови повної зайнятості на рівні L^0 ($L_0 < L_0$). Тоді для того, щоб досягти повної зайнятості L^0, треба збільшити випуск продукції до обсягів Y_0 ($Y^0 = F(K, L^0)$), що, у свою чергу, вимагає змістити лінію рівноваги грошового ринку з позиції LM_0 у позицію LM^0. Як бачимо з (12.17), таке зміщення можна забезпечити за екзогенно заданої пропозиції грошей M^{S^*} і фіксованих коефіцієнтів k, h лише через зниження цін p, проте жодного механізму зниження цін за фіксованої ставки заробітної плати w_0 у моделі Кейнса не закладено. Отже, для переходу до повної зайнятості потрібна спеціальна державна політика.

Якщо лінія *LM* нелінійна та, окрім цього, в околі точки r_0 ця лінія має горизонтальну ділянку, то виникає ліквідна пастка. За вказаної форми *LM* існує рівновага на фінансовому ринку незалежно від зниження цін, пов'язаного з надмірною пропозицією товару Y^0 і робочої сили L^0.

Можливою є й така особливість: рівень планованих витрат *E* буває настільки високим, що виробництво *Y* не може досягти його. Це відбувається тоді, коли точка перетину *IS* і *LM* має від'ємне значення норми відсотка r_0.

Модифікацією підходу Кейнса є *монетаристський аналіз* економіки (розвинутий на початку 70-х років XX століття М. Фрідменом). У чому ж полягає сутність відмінностей підходів Кейнса і Фрідмена? Кейнс уважав, що найбільш значний вплив на зміну основних макроекономічних показників справляє попит на товари, а на думку Фрідмена, головне — це контроль за пропозицією грошей. Монетаристи також переконані в тому, що спекулятивний попит на гроші не залежить від ставки відсотка, тому збільшення пропозиції грошей призводить до зростання цін, а не обсягів виробництва, як це випливало б з моделі Кейнса. За їх твердженнями, грошово-кредитна політика не може суттєво вплинути у довготерміновому плані на реальний обсяг виробництва та стан безробіття, хоча у короткотерміновому — це є можливим.

Як свідчить досвід України та інших країн, інколи справджується підхід Кейнса, а інколи — Фрідмена: невисокого рівня і контрольована державою інфляція — діє кейнсіанський підхід; гіперінфляція і слабкий контроль держави — монетаристський підхід.

12.3. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Відмінність моделі Кейнса від класичної моделі ринкової економіки.
2. Подібність і відмінність кейнсіанського і монетаристського підходів до управління економікою.
3. Довести, що функція попиту на робочу силу в конкурентній економіці є спадною функцією реальної заробітної плати.
4. Пояснити, у яких випадках інфляція позитивно впливає на економіку.

13

РОЗДІЛ

ОДНОСЕКТОРНІ НЕЛІНІЙНІ МОДЕЛІ МАКРОЕКОНОМІКИ

13.1. МОДЕЛЬ СОЛОУ

Малосекторні нелінійні моделі використовуються для вивчення довготермінових тенденцій і чинників розвитку (трансформації) економіки. Невелика кількість секторів дозволяє аналітично подати й проаналізувати на моделі розвиток економіки з адекватним урахуванням нелінійних залежностей обсягів випуску секторів від обсягів ресурсів за різних значень екзогенних параметрів і на підставі цього отримати деяку узагальнену картину економічного зростання.

Модель Солоу є односекторною моделлю економічного розвитку. У цій моделі економічна система розглядається як єдине ціле, виробляючи лише один узагальнений продукт, котрий може і споживатись, і інвестуватись. Модель досить адекватно відбиває найважливіші макроекономічні аспекти процесу відтворення. Експорт—імпорт у явному вигляді не враховуються[1].

Стан економіки в моделі Солоу задається п'ятьма ендогенними змінними: X — валовий суспільний продукт (ВСП), C — фонд невиробничого споживання, I — інвестиції, L — кількість зайнятих, K — виробничі фонди. Окрім цього, в моделі фігурують такі екзогенні (що задаються поза системою) показники: v — річний темп приросту чисельності зайнятих, μ — частка вибулих протягом року основних виробничих фондів, a — коефіцієнт прямих витрат (частка проміжного продукту у валовому внутрішньому продуктові), ρ — норма накопичення (частка валових інвестицій у ВВП). Межі екзогенних параметрів:

$$-1 < v < 1,$$

$$0 < \mu < 1,$$

$$0 < a < 1,$$

$$0 < \rho < 1.$$

---

[1] *Колемаев В. А.* Математическая экономика: Учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ, 1998.

Робиться припущення, що ендогенні змінні змінюються в часі (аргумент t випускається, але він, як правило, є присутнім за визначенням). Екзогенні змінні вважаються постійними в часі. Вважається, зокрема, що норма накопичення є керуючим параметром, тобто в деякий початковий момент часу $t_0 = 0$ вона може встановлюватись керуючим органом системи на будь-якому рівні в межах області допустимих значень. Час t вважають неперервним і таким, що вимірюється в роках. Для миттєвих показників $L = L(t)$, $K = K(t)$ це є досить природним, оскільки, в принципі, будь-якого дня можна дізнатися про чисельність зайнятих і шляхом інвентаризації встановити обсяг основних виробничих фондів. Значення показників типу потоку $X = X(t)$, $I = I(t)$, $C = C(t)$ у момент часу $t = [t] + \{t\}$ визначається у вигляді накопичених протягом року, що починається на $365\{t\}$ днів пізніше 1 січня року $[t]$.

Робиться припущення, що річний випуск у кожен момент часу визначається лінійно-однорідною неокласичною виробничою функцією від двох змінних (ресурсів) K та L.

$$X = F(K, L). \tag{13.1}$$

Розглянемо, як змінюються ресурсні показники впродовж малого проміжку часу Δt. Згідно з означенням темпу приросту чисельності зайнятих

$$\frac{\Delta L}{L} = \nu \Delta t, \qquad \text{або} \qquad \frac{dL}{dt} = \nu L,$$

отже, здійснюючи інтегрування, маємо:

$$\ln L = \nu t + \ln A, \;\; L = Ae^{\nu t} = A\exp(\nu t).$$

Використовуючи початкову умову $L(0) = L_0$, отримаємо

$$L = L_0 e^{\nu t} = L_0 \exp(\nu t).$$

Зношеність фондів та інвестиції з розрахунку на рік дорівнюють μK та I відповідно, а протягом часу Δt — відповідно $\mu K \Delta t$, $I\Delta t$, тому приріст фондів упродовж цього часу

$$\Delta K = -\mu K \Delta t + I \Delta t,$$

звідки отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + I, \;\; K(0) = K_0.$$

Оскільки проміжний продукт становить aX, то валовий внутрішній продукт дорівнює $(1 - a)X$.

Інвестиції $I = \rho(1 - a)X$, а фонд споживання $C = (1 - \rho)(1 - a)X$.

Отже, отримаємо таку формалізовану *модель Солоу* в абсолютних показниках:

$$L = L_0 e^{\nu t};\ \ \frac{dK}{dt} = -\mu K + \rho(1-a)X,\ \ K(0) = K_0;$$
$$X = F(K, L);\ \ I = \rho(1-a)X;\ \ C = (1-\rho)\,(1-a)X. \qquad (13.2)$$

На рис. 13.1 наведена схема функціонування економіки згідно з моделлю Солоу.

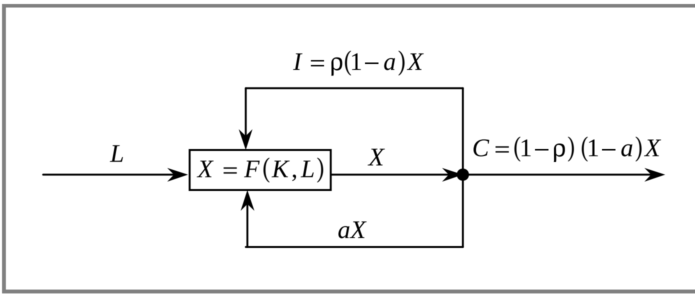


Рис. 13.1. Схема функціонування економіки за Солоу

Уведемо також такі відносні показники:

$k = \dfrac{K}{L}$ — фондоозброєність;

$x = \dfrac{X}{L}$ — народногосподарська продуктивність праці;

$i = \dfrac{I}{L}$ — питомі інвестиції (на одного зайнятого);

$c = \dfrac{C}{L}$ — середньодушове споживання (на одного зайнятого).

Оскільки

$$x = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(k);$$
$$i = \rho(1-a)x;\ \ c = (1-\rho)(1-a)x;$$
$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}(kL) = \nu Lk + L\frac{dk}{dt},$$

то модель Солоу набуває такої форми в питомих (відносних) показниках:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho(1-a) f(k), \ \lambda = \mu + \nu, \quad k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0};$$
$$x = f(k); \qquad (13.3)$$
$$i = \rho(1-a) f(k);$$
$$c = (1-\rho)(1-a) f(k).$$

Наголосимо, що кожен абсолютний чи відносний показник змінюється в часі, тобто можна вести мову про траєкторію системи в абсолютних чи відносних показниках. Траєкторію називають *стаціонарною*, якщо показники не змінюються в часі:

$$k = k^0 = \text{const}, \ x = x^0 = \text{const}, \ i = i^0 = \text{const}, \ c = c^0 = \text{const}.$$

Як неважко помітити з формул (13.3), встановлення фондоозброєності на деякому постійному рівні k^0 приводить до виходу на стаціонарну траєкторію.

На стаціонарній траєкторії $\frac{dk^0}{dt} = 0$, тому

$$-\lambda k^0 + \rho(1-a) f\left(k^0\right) = 0, \qquad (13.4)$$

або
$$\lambda k^0 = \rho(1-a) f\left(k^0\right).$$

Оскільки функція $F(K, L)$ — неокласична, то $f(0) = 0$, $f' > 0$, $f'' < 0$.

Якщо, окрім цього, задати умову $\rho(1-a) f'(0) > \lambda$, то рівняння (13.4) матиме єдиний відмінний від нульового розв'язок k^0, що можна побачити на рис. 13.2.

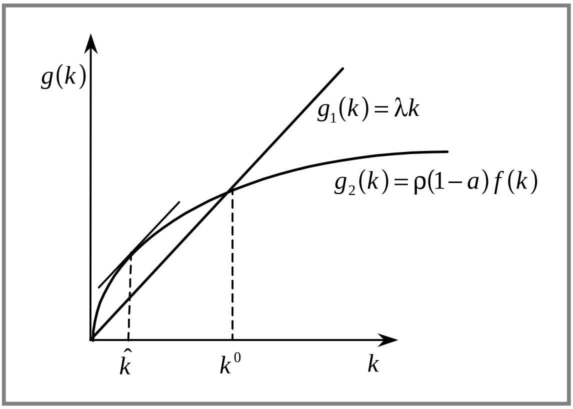


Рис. 13.2

На рис. 13.2, окрім точки k^0, що показує стаціонарний рівень фондоозброєності, через $\hat{k}$ позначено рівень фондоозброєності, за якою швидкості зростання функцій $g_1(k) = \lambda k$ та $g_2(k) = = \rho(1 - a) f(k)$ є рівними, тобто $\hat{k}$ — корінь рівняння

$$\rho(1-a) f'(\hat{k}) = \lambda. \qquad (13.5)$$

13.2. ПЕРЕХІДНИЙ РЕЖИМ У МОДЕЛІ СОЛОУ

Зазначимо: якщо $k_0 = k^0$, то економіка вже перебуває на стаціонарній траєкторії й може зійти з неї лише за зміни зовнішніх умов (встановлення іншого значення норми накопичення чи переходу до нових технологій, що супроводжується зміною функції $F(K, L)$).

Якщо $k_0 \neq k^0$, то в економіці відбуватиметься перехідний процес, котрий (гіпотетично) завершиться встановленням стаціонарного режиму. Протягом перехідного режиму фондоозброєність задовольняє рівняння

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho(1-a) f(k), \quad k(0) = k_0, \qquad (13.6)$$

окрім цього, як видно на рис. 13.2, $\frac{dk}{dt} > 0$, якщо $k < k^0$, та $\frac{dk}{dt} < 0$, якщо $k > k^0$.

Диференціюючи (13.6) за часом, знайдемо, що

$$\frac{d^2k}{dt^2} = \frac{dk}{dt}[\rho(1-a) f'(k) - \lambda], \qquad (13.7)$$

звідки видно, що коли $k < k^0$ та $k < \hat{k}$, матимемо, що $\frac{d^2k}{dt^2} > 0$, а коли $k < k^0$, $k > \hat{k}$, то навпаки, $\frac{d^2k}{dt^2} < 0$, коли ж $k > k^0$, то завжди буде $\frac{d^2k}{dt^2} > 0$, оскільки $\hat{k} < k^0$.

Дослідимо детальніше перехідний процес у випадку, коли виробнича функція є функцією Кобба—Дугласа:

$$F(K, L) = AK^{\alpha} L^{1-\alpha},$$

тоді

$$f(k)=Ak^{\alpha},\ \ \hat{k}=\left[\frac{\alpha\rho(1-a)A}{\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},\ \ k^0=\left[\frac{\rho(1-a)A}{\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

а рівняння (13.6) набере вигляду

$$\frac{dk}{dt}=-\lambda k+\rho(1-a)Ak^{\alpha},\ \ k(0)=k_0, \tag{13.8}$$

Зазначимо, що коли здійснити заміну $k=e^{-\lambda t}u,\ \ u=e^{\lambda t}k,$ то отримаємо для *u* рівняння зі змінними, що розділяються:

$$\frac{du}{u^{\alpha}}=\rho(1-a)Ae^{(1-\alpha)\lambda t}dt,\quad u(0)=k_0,$$

котре має такий розв'язок:

$$u(t)=\left[\frac{\rho(1-a)A}{\lambda}e^{(1-\alpha)\lambda t}+k_0^{1-\alpha}-\frac{\rho(1-a)A}{\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

або — з використанням значення стаціонарної фондоозброєності —

$$u(t)=\left[\left(k^0\right)^{1-\alpha}e^{(1-\alpha)\lambda t}+k_0^{1-\alpha}-\left(k^0\right)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Повертаючись до фондоозброєності, отримаємо

$$k(t)=\left[\left(k^0\right)^{1-\alpha}+e^{-(1-\alpha)\lambda t}\left(k_0^{1-\alpha}-\left(k^0\right)^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

звідки видно, що

$$\lim_{t\to\infty}k(t)=k^0.$$

Відповідно до (13.7) отримуємо три типи перехідного процесу стосовно до фондоозброєності:

1) якщо $k_0<\hat{k}$ — спочатку має місце прискорене зростання фондоозброєності, яке після досягнення значення $\hat{k}$ змінюється сповільненим зростанням;

2) якщо $\hat{k}<k_0<k^0$ — сповільнене зростання фондоозброєності;

3) якщо $k_0>k^0$ — сповільнене зниження фондоозброєності («проїдання» фондів).

На рис. 13.3 показані усі три типи переходу фондоозброєності до стаціонарного значення k^0 (криві 1—3 відповідно).

Аналогічно змінюється й решта відносних показників (*x*, *i*, *c*), оскільки вони пропорційні k^{α}.

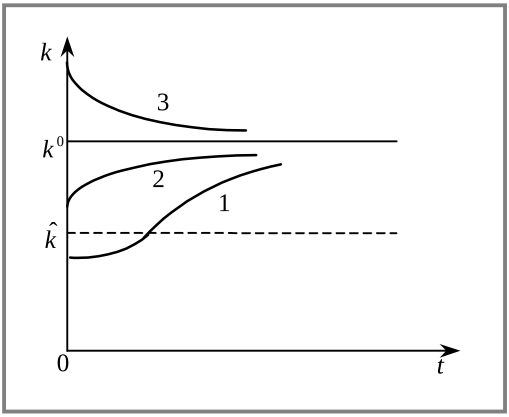


Рис. 13.3. Типи переходу до стаціонарного стану

Отже, якщо $\hat{k} < k_0 < k^0$, має місце досить короткотривалий перехідний процес. Тобто теоретично перехідний процес закінчується через нескінченно великий проміжок часу, але практично через відносно невеликий проміжок поточне і стаціонарне значення показника розрізнятимуться лише на кілька відсотків.

13.3. «ЗОЛОТЕ» ПРАВИЛО НАКОПИЧЕННЯ

Сутність «золотого» правила накопичення полягає в тому, що, обираючи належним чином норму накопичення, можна максимізувати середньодушове споживання в стаціонарному режимі, а отже, і через відносно невеликий проміжок часу після поточного перехідного процесу.

Дійсно,

$$c^0(\rho) = (1-\rho)(1-a)A\left(k^0\right)^\alpha = (1-\rho)(1-a)A\left[\frac{\rho(1-a)A}{\lambda}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \quad (13.9)$$

$$= B\,[g(\rho)]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

де

$$B = \left[\frac{(1-a)A}{\lambda^\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad g(\rho) = \rho^\alpha(1-\rho)^{1-\alpha}.$$

Неважко помітити, що середньодушове споживання цілковито визначається функцією $g(\rho)$ (оскільки B не залежить від ρ).

Маємо

$$\frac{dg}{d\rho}=\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^{\alpha}\frac{\alpha-\rho}{\rho},$$

тому

$$\frac{dc^0}{d\rho}>0, \quad \text{якщо} \quad \rho<\alpha,$$

$$\frac{dc^0}{d\rho}<0, \quad \text{якщо} \quad \rho>\alpha.$$

Отже, найбільше середньодушове споживання досягатиметься тоді, коли $\rho^* = \alpha$, тобто норма накопичення повинна бути рівною еластичності випуску за фондами. Як показують дані, на практиці норма накопичення завжди є меншою за своє оптимальне значення ($\rho < \alpha$), тобто має місце недонакопичення (рис. 13.4).

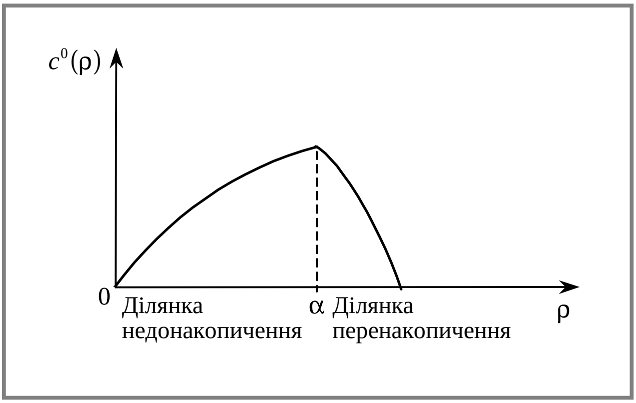


Рис. 13.4. Середньодушове споживання в стаціонарному режимі

13.4. ВИГРАШ У ПОТОЧНОМУ СПОЖИВАННІ — ПРОГРАШ У НАЙБЛИЖЧІЙ ПЕРСПЕКТИВІ

Якщо замість норми накопичення $\rho = \alpha$ встановити дещо меншу ($\rho < \alpha$) норму накопичення $\tilde{\rho} = \rho - \Delta\rho$, то на початку процесу поточне середньодушове споживання зросте з $c_0 = (1-\rho)Ak_0^{\alpha}$ до $\tilde{c}_0 = (1-\rho+\Delta\rho)Ak_0^{\alpha}$.

Але цей виграш протягом досить нетривалого інтервалу часу *t* спочатку стане малопомітним, а потім перетвориться у програш, оскільки якщо $\rho < \alpha$, то згідно з (13.9) стаціонарне споживання —

$$c^0 = c^0(\rho) > c^0(\rho - \Delta\rho) = \tilde{c}^0 .$$

Загальна порівняльна картина зміни середньодушового споживання для випадку першого $\rho = \alpha$ та другого $\rho < \alpha$ показана на рис. 13.5.

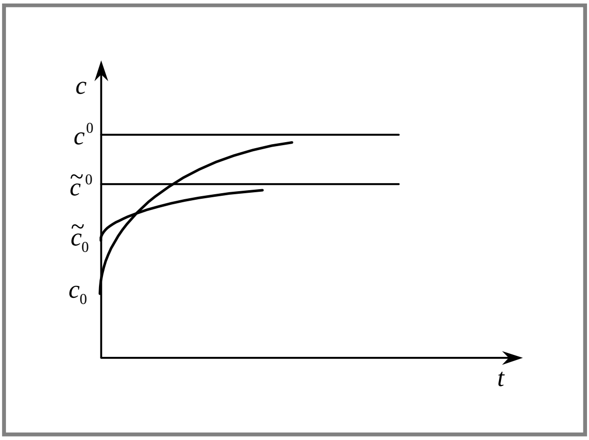


Рис 13.5. Порівняння стратегії поточних норм споживання

Таким, що більше відповідає дійсності, є врахування в моделі Солоу часового лага, тобто врахування того, що інвестиції перетворюються у фонди не миттєво.

13.5. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Сутність малосекторних нелінійних динамічних моделей та доцільність використання для аналізу економічних процесів.
2. Основні гіпотези та припущення, що використовуються у формуванні моделі Солоу.
3. Сутність стаціонарної траєкторії економічної системи.
4. Основні перехідні процеси в моделі Солоу стосовно до фондоозброєності. Їх аналіз.

5. «Золоте» правило накопичення.
6. Поясніть, як виглядатиме модель Солоу, якщо за основу взяти лінійно-однорідну виробничу функцію внутрішнього валового продукту?
7. Схарактеризуйте, як поводитиме себе модель Солоу, якщо встановити занижену норму накопичення. Зобразіть це на рисунку.

13.6. Теми рефератів

1. Односекторна модель оптимального економічного зростання.
2. Модель зміни технологічного укладу.
3. Двосекторна модель економіки.
4. Дослідження характерних властивостей виробничих функцій Солоу.
5. Багатофакторні функції Солоу.
6. Модель Солоу з лінійно-однорідною CES-функцією.

14

РОЗДІЛ

МОДЕЛІ АНАЛІЗУ МАКРОЕКОНОМІЧНОЇ ПОЛІТИКИ

14.1. АНАЛІЗ МАКРОЕКОНОМІЧНОЇ ПОЛІТИКИ

Макроекономічна політика, на основі котрої формуються загальні умови, згідно з якими діють індивідуальні виробники і споживачі, розробляється та реалізується з використанням деяких моделей (формальних чи неформальних).

На наш погляд, вивчення економічних ідей, особливо таких, що оформлені в чіткі формалізовані моделі, необхідне й корисне для виявлення закономірностей під час прийняття рішень і реалізації макроекономічної політики.

Методологія аналізу макроекономічної політики може бути систематизована як розділ макроекономічної теорії, предметом цього розділу є дослідження питань формування і застосування відповідного типу макроекономічної політики з певної множини альтернативних варіантів[1].

Ця методологія започаткована працями Я. Тінбергена і А. Філліпса. В основних своїх рисах вона залишилася незмінною, але суттєво доповнена й розвинута у кількох напрямах, передусім із застосуванням гіпотези раціональних чи адаптивних очікувань, а також аналізу середньотермінових аспектів динаміки накопичування багатства, котрі у загальному вигляді описуються на основі теорії портфельного підходу Дж. Тобіна.

Для багатьох ситуацій макроекономічний аналіз зручно проводити у термінах «цілі—засоби». Тут макроекономічна політика може розглядатись як цілеспрямована зміна стану системи, зумовлюваного змінами параметрів останньої. Параметри системи можна поділити на дві групи: структурні характеристики системи та стани зовнішнього середовища (надсистеми чи надмоделі), котрі є неконтрольованими (некерованими) впливами; контрольованими (керованими) параметрами. Зміни останніх, по суті, і є «політиками», застосування яких приводить до бажаних змін па-

[1] *Смирнов А. Д.* Лекции по макроэкономическому моделированию: Учеб. пособие для вузов. — М.: ГУ ВШЭ, 2000.

раметрів (змінних) стану. Припускається, що параметри системи є взаємно незалежними; це дозволяє обчислювати ефекти застосування конкретної політики у «чистому» вигляді за сталих значень усіх інших, окрім обраного, параметрів системи.

У загальному випадку *m*-мірний вектор *V* вважається вектором допустимих макроекономічних політик (тут може використовуватись і термін «інструментальні змінні» чи «засоби»), а *n*-мірний вектор *X* — вектор станів макроекономіки. Макроекономічна рівновага здебільшого описується векторно-матричним рівнянням:

$$X - F(X, V) = 0, \qquad (14.1)$$

де *F*(*X*, *V*) — матриця розмірності *nm*, що характеризує структуру макроекономіки та її взаємодію із зовнішнім середовищем, чи «надсистемою». Вектор рівноважного стану макроекономіки є функцією параметрів системи:

$$X^* = X^*(V), \qquad (14.2)$$

після підстановки якої в (14.1) останнє згідно з теоремою про неявну функцію задовольняється тотожно.

Для малого околу точки рівноваги зміни макроекономічної політики (вектор ∂V) і зміни стану системи (вектор ∂X^*) задовольняють рівняння:

$$\frac{\partial X^*}{\partial V} - \frac{\partial F}{\partial X}\frac{\partial X^*}{\partial V} - \frac{\partial F}{\partial V} = 0, \qquad (14.3)$$

звідси маємо, що ефекти макроекономічних політик визначаються матричним рівнянням:

$$\frac{\partial X^*}{\partial V} = \left(I - \frac{\partial F}{\partial X}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial V}, \qquad (14.4)$$

де *I* — одинична матриця, а

$$J = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n} \equiv \left(I - \frac{\partial F}{\partial X}\right)$$

є матрицею Якобі макроекономічної системи (14.3), що обчислена в точці рівноваги.

Добуток двох матриць, які записані в правій частині (14.4) (матриці на вектор), характеризує реакції макроекономіки на зміну параметрів системи, котрі інтерпретуються як реалізація (допустимої множини) макроекономічних політик.

Із (14.4) ясно, що оскільки матриця $\left(I-\frac{\partial F}{\partial X}\right)$ у загальному випадку невироджена, то обернена до неї завжди існує (окрім дуже спеціальних випадків, що не становлять економічного інтересу). Тому нетривіальний (ненульовий) розв’язок системи (14.3) має місце, коли макроекономічні політики спричиняють ефект не лише на вектор рівноважних станів, але й на структуру системи, отже, матриця $\frac{\partial F}{\partial X}$ не повинна складатись лише з нульових елементів.

Незалежні прирости (вектори ∂V і ∂X) вздовж гіперповерхні макроекономічних рівноваг завжди підпорядковуються умові:

$$dX-\frac{\partial F}{\partial X}dX-\frac{\partial F}{\partial V}dV=0, \tag{14.5}$$

котра, власне, і визначає переміщення з однієї точки рівноваги в іншу. Водночас вплив макроекономічних політик на стан системи, зокрема на її структуру, означає, що їх ефект може виявитися нейтральним, тобто «політичний імпульс» може бути повністю демпферованим (згладженим, згашеним) зміною стану системи.

Як правило, ефекти різних макроекономічних політик досліджують ізольовано, тобто всі параметри системи вважають фіксованими, окрім одного, а для кожної конкретної політики обчислюється мультиплікатор такого вигляду:

$$\frac{\partial X^*}{\partial v_i}=\left(I-\frac{\partial F}{\partial X}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial v_i}\ \ (i=1,\ ...,\ m), \tag{14.6}$$

де $\frac{\partial X^*}{\partial v_i}$; $\frac{\partial F}{\partial v_i}$ — n-мірні вектори-стовпчики ефектів i-ї макроекономічної політики.

Зазначимо, що обчислення мультиплікаторів є, по суті, дослідженням чутливості макроекономічної системи, оскільки вектори (14.6) характеризують чутливість стану точки рівноваги макроекономіки щодо змін i-го параметра системи.

14.2. СТАБІЛІЗАЦІЯ СИСТЕМИ

Поняття ефективності макроекономічної політики розуміють як спроможність монетарної чи фіскальної політики впливати на реальний ринок, виробництво та передусім зайнятість. Припускаючи, що найкращий поточний стан економіки відповідає «природному темпу зростання», а в статиці — економічному потенціалу, основне завдання макроекономічної політики (принаймні у короткостроковий період) полягає у максимальному наближенні поточного стану системи, тобто реального виробництва і зайнятості, до їхніх потенційних обсягів. Еквівалентна постановка цього завдання зводиться до мінімізації відхилення фактичного рівня виробництва, що вимірюється, наприклад, обсягом реального ВВП від потенційно можливого. Це ж завдання макроекономічної стабілізації ставиться інколи як мінімізація різниці між потенційним і фактичним рівнями виробництва, котра в сучасній інтерпретації формулюється як підтримка безробіття на невеликому (заданому) рівні, що забезпечує деякий допустимий рівень інфляції.

Макроекономічна політика є стабілізаційною, якщо її використання відновлює порушену з якихось причин рівновагу системи. Такі політики становлять найбільший інтерес, хоча ясно, що весь спектр економічних проблем до них звести не можна.

Синтез макроекономічної системи, тобто результат економічних реформ, повинен забезпечувати можливість побудови і реалізації стабілізаційної політики, що не завжди є можливим.

Одновимірним аналогом макроекономічної політики може слугувати, наприклад, модель динаміки інвестицій і капіталу, яка ґрунтується на ідеях неокласичної теорії капіталу та розвивається в працях Д. Джоргенсона.

Нехай змінною стану макроекономічної системи (її фазовою координатою) обрано обсяг реальної вартості фактичного капіталу $K = K(t)$, а головною метою макроекономічної політики є деякий бажаний обсяг капіталу K^*. Це може бути раціональний рівень капіталу K^*, що визначається з урахуванням усіх наявних ресурсів, технологією та організацією економічної системи.

У будь-якій точці часу t, тобто для заданого планового чи прогнозованого періоду, «миттєві» чисті інвестиції $I \equiv \dot{K}$ є «інструментом», який приводить до зміни стану системи. Природно припускати, що коли економіка є конкурентоспроможною та мотивації економічних агентів не викривлені, то для оптимального (раціонального) рівня (обсягу) капіталу інвестиції мають бути нульовими; додатними, коли фактичний капітал менший за бажаний обсяг, і від'ємними у протилежному випадку. Фазова діаграма такої системи може бути подана графіком лінійного рівняння (рис. 14.1):

$$\dot{K} - \lambda(\dot{K} - K) = 0; \ 0 < \lambda < 1, \quad (14.7)$$

де параметр λ визначається мотивацією економічних агентів.

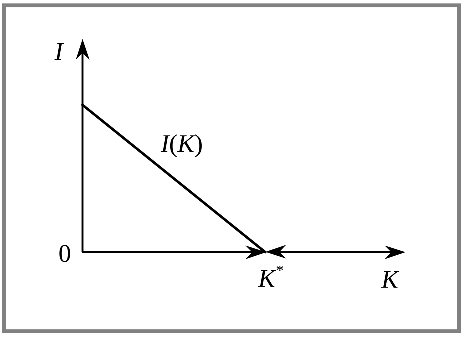


Рис. 14.1. Стабілізаційна політика

Відповідно до (14.7) та за умови $\dot{K} = I$ випливає, що незалежні прирости інвестицій і капіталу в малому околі точки рівноваги $I^* = I^*(K)$ повинні задовольняти рівняння

$$dI + \lambda\, dK = 0, \qquad (14.8)$$

звідси маємо

$$\frac{dI^*}{dK} = -\lambda < 0.$$

Отже, ця система синтезована так, що інвестиції скорочуються із наближенням до бажаного обсягу капіталу (цілі) ліворуч від точки рівноваги і збільшуються, коли система віддаляється від цього обсягу капіталу.

Звичайно, наведена модель є лише ілюстративною, бо інвестиції у ринковій економіці не є безпосередніми інструментальними змінними, а є об'єктом регулювання через використання різних методів фіскальної та монетарної політики.

14.3. УЗГОДЖЕНІСТЬ ЦІЛЕЙ І ЗАСОБІВ

Макроекономічні моделі допомагають побачити відносну суперечливість різних цілей політики макроекономічної стабілізації, забезпечити узгодженість (когерентність) цілей стабілізаційної політики і засобів (інструментів) щодо їх досягнення. Розгляньмо простий приклад.

Нехай відкрита макроекономіка представлена двома координатами: станом платіжного балансу y_1 (що вимірюється в іноземній валюті) та рівнем зайнятості y_2. Рівноважні значення цих показників подамо як функції стану агрегованого попиту x_1 і обмінного курсу (іноземна валюта — база) x_2, тобто векторно-матричне рівняння рівноваги має вигляд:

$$Y = F(X).$$

Цілями короткотермінового розвитку оберемо поліпшення платіжного балансу і підвищення зайнятості:

$$dy=(dy_1, dy_2).$$

Як відомо, стандартними інструментами макроекономічної стабілізації можуть слугувати (у межах кейнсіанської моделі) зростання агрегованого попиту разом з політикою знецінення (зниження обмінного курсу) національної валюти, тобто вектор інструментів має вигляд:

$$dx=(dx_1, dx_2).$$

У цілому політика макроекономічної стабілізації заміщується системою:

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}. \qquad (14.9)$$

Якісний аналіз системи (14.9) допомагає зрозуміти, зокрема, чому поставлені цілі є відносно суперечливими. Матриця коефіцієнтів чутливості цілей щодо зміни засобів $\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = f_{ij}$, $(i,\ j=1,\ 2)$ має, виходячи з економічних міркувань, такі знаки:

$$\begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}.$$

Це означає, що підвищення агрегованого попиту (dx_1), наприклад розширенням пропозиції грошей, сприяє скороченню безробіття ($f_{21} > 0$). Одночасно зростання грошової маси погіршує стан платіжного балансу ($f_{11} < 0$), оскільки збільшує попит на іноземну валюту.

У свою чергу знецінення національної валюти, збільшуючи попит на іноземну валюту, погіршує платіжний баланс ($f_{12} < 0$), але, одночасно здорожуючи імпорт, сприяє розширенню власного виробництва, що знижує рівень безробіття ($f_{22} > 0$).

Матриця системи (14.9) містить корисну інформацію щодо реалізованості (досягнення) висунутих цілей, особливо у тих випадках, коли цілі та інструменти макроекономічної політики є суперечливими (конфліктують). Із викладеного ясно, що поставлені цілі не можуть бути досягнуті, якщо інструментом макроекономічної політики є лише управління Нацбанком грошовою масою. Зростання пропозиції національної валюти повинно супроводжуватись її знеціненням, яке досягається політикою плаваючого курсу, тимчасом як валютний коридор, наприклад, є явно неприйнятним. Формально ясно, що немає можливості за допомогою одного інструмента реалізувати дві конфліктуючі цілі, а це означає, що коефіцієнти першого стовпчика матриці (14.9) мають різні знаки. Зауважимо, що оскільки зростання пропозиції грошей викликає небезпеку прискорення інфляції, а отже, і потенційне погіршання платіжного балансу (іноземна валюта стає більш привабливою, якщо знецінюється повільніше, ніж національна), то модель явно вимагає свого розширення, принаймні до трьох змінних. Невипадково трьома основними цілями макроекономічної політики вважають економічне зростання, а також мінімальні рівні інфляції та безробіття.

14.4. МАКРОЕКОНОМІЧНА ПОЛІТИКА І «КРИТИКА ЛУКАСА»

Як було показано у попередньому матеріалі, макроекономічна система реагує на зміну зовнішніх (екзогенних) щодо моделі змінних, тобто на прийняту макроекономічну політику. Допускалося, що основні структурні параметри макроекономічної моделі (системи) залишаються інваріантними щодо різних типів політичних впливів. Якщо макроекономічна політика формує не лише певний курс, а й режим розвитку економіки у коротко- чи довгостроковому періодах, то параметри системи (14.1) можуть не бути інваріантними щодо змін економіко-політичного режиму.

Макроекономічна політика вважається пасивною (нейтральною), якщо вона не впливає на макроекономічну ситуацію, зокрема, не наближає виробництво до його потенційного рівня через зміни значень бюджетного дефіциту, безробіття, норми відсотка, обмінного курсу чи інфляції.

Інтерес до проблеми «нейтральності» макроекономічної політики, виявлений ще у працях класиків, отримав потужний імпульс після публікації Р. Лукасом результатів його дослідження можливостей проведення тієї чи іншої макроекономічної політики. Його підхід ґрунтується на використанні спеціальної функції агрегованої пропозиції, котра (в логарифмах) записується так:

$$y_t = \bar{y} + \alpha(p_t - p^e_{t,t-1}) + \xi_t\,, \qquad (14.10)$$

де y_t — рівень поточного виробництва у момент часу t; $\bar{y}$ — рівень потенційно-можливого виробництва; p_t — поточні ціни в момент часу t; $p^e_{t,t-1}$ — очікування щодо рівня цін на момент часу t, отримані на підставі інформації, доступної на момент $(t-1)$; ξ_t — випадкові збурення щодо агрегованої пропозиції, котрі вважаються незалежними у часі, нормально розподіленими з нульовим середнім і скінченною дисперсією.

У моделі Лукаса реальний ринок вважається *ефективним* у тому розумінні, що його учасники миттєво використовують усю інформацію, на яку реагують ціни. Очікування (сподівання) економічних агентів на ефективному ринку

$$p^e_{t,t-1} \equiv E\left(p_t \,\middle|\, \Omega_{t-1}\right) \qquad (14.11)$$

є раціональними, тобто, в принципі, формуються так само, як відбувається усереднення у випадковому процесі:

$$p_t = E\left(p_t \,\middle|\, \Omega_{t-1}\right) + e_t\,, \qquad (14.12)$$

де E — оператор раціональних сподівань (очікувань); Ω_{t-1} — інформаційна множина, що доступна виробникам на момент часу $(t-1)$, коли вони формують свої очікування; e_t — випадкова некорельована похибка передбачення, що має нульове середнє і скінченну дисперсію.

Дане рівняння стверджує, що фактичні ціни коливаються навколо свого раціонального передбачення із суто випадковою похибкою, що має нульове середнє і скінченну дисперсію. Така залежність між передбаченим і фактичним рівнем цін існує, за визначенням, на ефективному ринку, де ціни абсолютно рухомі, постійно врівноважують попит і пропозицію. Це є можливим, коли ціни повністю реагують на нову інформацію, котра практично миттєво стає доступною всім учасникам ринку. Ці учасники, таким чином, позбавлені можливості використовувати свої тимчасові інформаційні переваги з метою отримання арбітражного прибутку. Зазначимо, що гіпотеза симетричної інформації насправді є надто жорсткою і на практиці, як правило, не справджується. Дослідження ринків з асиметричною інформацією є надзвичайно актуальним. Троє американських учених за такі дослідження отримали Нобелівську премію за 2001 рік у галузі економіки. Моделювання асиметричних ринків залишається актуальним і надалі.

Для раціональних очікувань, оскільки нове значення цін абсолютно точно передбачити в принципі неможливо, на що вказує і (14.12), раціональним передбаченням цін (чи інфляції) на момент t може бути, зокрема, їхнє значення на момент $(t - 1)$:

$$E_{t-1}(p_t) = E\left(p_t \middle| \Omega_{t-1}\right) = p_{t-1}, \tag{14.13}$$

яке можна отримати, припускаючи відповідні гіпотези, обчислюючи сподівання в обох частинах рівняння (14.12), оскільки $E[\varepsilon_t] = 0$.

Для гіпотези раціональних очікувань значення цін у різні моменти часу поєднані рівнянням випадкового блукання:

$$p_t = p_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{14.14}$$

котре у даному разі формально є моделлю динаміки цін для дискретних випадкових процесів.

Гіпотеза раціональних очікувань, що ґрунтується на понятті ефективного ринку, бере за основу очікування низки (багатьох) відносно добре поінформованих агентів, а оператор раціональних очікувань є не що інше, як математичне сподівання. На нашу думку, як більш адекватну в ситуаціях з асиметричним розподілом значень випадкової величини, яку очікують поінформовані агенти ринку, можна обирати моду чи медіану. У відповідних випадках ці величини можуть бути скориговані на міру ризику тощо.

Стосовно до ринку з асиметрично розподіленою інформацією, значними (суттєвими) лагами й обмеженнями товарного ринку, особливо ринку праці, — впевненість щодо адекватності раціональних очікувань не така вже й велика і відбиває сумніви багатьох економістів. Тут є великий простір для подальших наукових досліджень як на концептуальному, так і на модельному (інструментальному) рівнях.

Умова (14.6) робить надмірними, а загалом і непотрібними всі авторегресійні схеми формування очікувань, зокрема інфляційних. Однак для економіки перехідного періоду, трансформаційної економіки, коли зсуви є суттєвими, коли вагомість попередньої історії різко знижується, особливо у короткостроковому періоді внаслідок суттєвих (чи фундаментальних) змін соціально-політичного характеру, методологія раціональних очікувань з урахуванням ризику є особливо актуальною, а для науковців —

привабливою. Т. Сарджент пише, наприклад, про обмежено раціональні очікування, властиві для трансформаційної економіки.

Сутність твердження щодо «нейтральності» макроекономічної політики з урахуванням раціональних очікувань можна продемонструвати таким чином. Обчислюючи (традиційно) раціональні очікування для агрегованої пропозиції в (14.10), ми отримуємо, що з урахуванням (14.13) найкращим передбаченням для випадкової величини y_t будуть значення потенційного виробництва, тобто має місце:

$$E\left(y_i \middle| \Omega_{t-1}\right) = \bar{y}. \tag{14.15}$$

З (14.15) випливає, що обсяги реального виробництва обтяжені впливом лише зовнішніх, суто випадкових, а тому і слабопрогнозованих впливів.

Отже, макроекономічна політика є «нейтральною» в обумовленому розумінні, тобто не може зменшити розходження між фактичним і потенційним рівнями виробництва, тимчасом як останній у ринковій економіці визначається чинниками пропозиції. Більше того, оскільки похибки передбачення (прогнозу) є випадковими й незалежними, то втручання держави радше посилить величину розходження фактичного і потенційного виробництва.

Таким чином, фіскальна і монетарна політики стають не стабілізуючим, а дестабілізуючим чинником, і державне втручання в економіку слід не розширювати, а зменшувати. Звичайно, аргументація Р. Лукаса є значно витонченішою і складнішою, але її сутність передана досить точно.

Зазначимо, що висновок про нейтральність макроекономічної політики є справедливим лише за досить жорстких гіпотез щодо прогнозованої пропозиції і політичного курсу уряду. Вони виконуються, наприклад, коли функція (14.10) не залежить від норми відсотка, а монетарна (чи фіскальна) політика будується лише на підставі інформації щодо попередніх рішень. Якщо змінити хоча б одну з даних умов, то макроекономічна політика, принаймні в короткотерміновому періоді, справляє вплив на реальний рівень виробництва.

14.5. ПОДАТКИ, БЮДЖЕТНИЙ ДЕФІЦИТ І ВИРОБНИЦТВО

Розгляньмо вплив на виробників і споживачів конкретної макроекономічної політики, наприклад податкової політики держави. Відомо, що збільшення податків на виробника підвищує витрати, отже, підвищуються ціни, що зміщує криву агрегованої пропозиції, породжуючи, таким чином, скорочення обсягів виробництва. Отже, податки відіграють роль дестимулятора виробництва — від збільшення податків програють і споживачі, котрі змушені платити більш високу ціну за менший обсяг продукту, і виробник, дохід якого скорочується. Дестимулююча функція податків повинна бути добре усвідомленою, а звільнення від податків може використовуватись як засіб стимулювання виробників. Це є особливо суттєвим у використанні механізму пільгового оподаткування підприємств (фірм), що є актуальним і вигідним для країни, коли необхідно підтримати у певному секторі економіки високу інвестиційну активність.

З погляду макрорегулювання важливо відшукати раціональний компроміс між прагненням будь-якої держави поповнити вічну нестачу в скарбниці і негативним ефектом збільшення податків на виробництво, та й загалом на економічну активність. Загальним принципом політики оподаткування є її узгодження не лише з поточними фіскальними цілями, а й з перспективами розвитку макроекономіки. Якщо економіка перебуває на піднесенні, ділова активність є високою, ставки відсотка у реальному вираженні є невеликими, то податки можуть підвищуватись. У фазі піднесення обсяги оподаткування бажано підвищувати для «охолодження» перегрітої економіки. Навпаки, якщо економіка — на спаді, то високі податки лише підсилюють негативні тенденції і поглиблюють рецесію.

Взаємозв’язки між ставкою оподаткування і надходженнями до бюджету є очевидними. Не менш очевидним є їхній нелінійний зв’язок. Залежність загального обсягу податкових надходжень від ставки оподаткування формалізується як крива Лаффера, сутність якої проста. Податкові надходження, виражені, наприклад, у частках від ВВП, подають як нелінійну, неперервну, диференційовану криву $L(t)$, задану на відрізку [0, 1], на якому відкладаються ставки оподаткування. Для $t = 0$ значення $L(t)$ дорівнює нулю, що означає відсутність податкових надходжень, якщо ставка оподаткування є нульовою (чи коли виробництво відсутнє). Якщо ставка $t = 1$, то податків також немає, — давно помічено, що раціональні податки можна збирати як завгодно довго, а конфіскувати можна лише один раз. Відомо (теорема Ролля), що неперервна гладка функція $L(t)$, яка набуває рівних значень на кінцях фіксованого інтервалу, досягає свого максимуму в деякій точці, котра лежить у середині цього інтервалу:

$$L = L(t^*) = \max_t ; \; 0 < t < 1,$$

де $L(t)$ — функція Лаффера (обсяг податкових надходжень у частках від ВВП); t — ставка оподаткування.

Теоретично дослідження кривої Лаффера на максимум дозволяє обчислити оптимальне значення ставки оподаткування, котре гарантує максимальні надходження грошових коштів до бюджету. Звичайно, побудова й аналіз функції Лаффера вимагає ретельного збору даних, ідентифікації цієї кривої для кожної конкретної економіки.

З більш загального погляду оподаткування є частиною проблеми фінансування бюджетного дефіциту. Відомо, що зростання державних витрат стимулює зростання виробництва. Іншими словами, за певних умов конкурентної економіки і режиму низької інфляції дефіцит бюджету має стимулююче значення. Бюджет може мати позитивне сальдо, профіцит чи буде бездефіцитним у фазі піднесення економічного циклу, і навпаки — мати дефіцит у його нижній фазі.

Регулювання бюджетного дефіциту залежить від його природи і способу фінансування. Стандартний аналіз причин дефіциту здійснюється шляхом побудови «бюджету цілковитої зайнятості», котрий відповідає на запитання про те, чи є дефіцит наслідком недостатнього оподаткування (за фіксованих державних витрат), а чи спаду економічної активності. Припустимо, що крива Лаффера показує, що ставка оподаткування знаходиться недалеко від її оптимального значення, а за заміни фактичного випуску на потенційний дефіцит відповідно замінюється профіцитом. У такій ситуації природно припустити, що причиною дефіциту є недостатній обсяг виробництва. Отже, якщо в цьому випадку збільшувати ставку оподаткування в умовах спаду виробництва, то результатом буде, найімовірніше, поглиблення рецесії.

Треба зазначити, що популярне прагнення збалансування бюджету, взагалі кажучи, не є виправданим. Бюджет, у якому доходи дорівнюють витратам, не є нейтральним, а стимулює зростання виробництва. Однак зростання виробництва, коли уряд забезпечує збалансований бюджет, є мінімальним. Неефективність такого бюджету можна пояснити нерівністю мультиплікаторів його доходу і витрат, що можна проілюструвати на простій моделі рівноваги для ринку товарів і послуг.

Нехай реальний ринок, чи ринок товарів і послуг, перебуває у рівновазі в розумінні того, що агрегований дохід Y дорівнює обсягам агрегованих витрат E. У лінійній моделі реального ринку Кейнса ціни не впливають на поведінку системи, а сукупне споживання вважається функцією доходу $Y^D = (Y - T)$, де податки стягуються фіксованими:

$$C = C_0 + c(Y - T).$$

У точці рівноваги реального ринку для податків, що не залежать від рівня доходу, має місце рівність (проста скалярна форма рівняння (14.1)):

$$(1-c)\,Y = C_0 - cT + I + G,$$

і за заданих екзогенно, тобто поза моделлю, значень інвестицій і державних витрат *I*, *G* > 0 рівноважне значення реального доходу дорівнює:

$$Y^* = s^{-1}(C_0 - cT + I + G), \quad s = (1-c). \qquad (14.16)$$

У досить малому околі точки рівноваги для ринку товарів і послуг, згідно з теоремою про наявну функцію, умови котрої, як правило, вважаються такими, що виконуються, існує функція:

$$Y^* = Y^*(G, T),$$

тобто рівноважний дохід параметрично залежить від державних витрат і податків (*G* і *T* відповідно) Для даної моделі реакція рівноважного доходу на зміну бюджетних витрат дорівнює

$$\frac{\partial Y^*}{\partial G} = \frac{1}{s} > 0,$$

а реакція рівноважного доходу на зміну податків (за фіксованих обсягів витрат) —

$$\frac{\partial Y^*}{\partial T} = -\frac{c}{s} < 0.$$

Ці реакції обчислюються диференціюванням рівняння (14.16) за відповідними аргументами.

Фіскальна політика, яка полягає у зміні обсягів державних (урядових) витрат і обсягів податків, викликає зміни рівноважного доходу на величину

$$dY^* = \frac{\partial Y^*}{\partial G}dG + \frac{\partial Y^*}{\partial T}dT,$$

котра для даної моделі записується так:

$$dY^* = s^{-1}dG - s^{-1}cdT = s^{-1}(dG - cdT).$$

Рівноважний дохід залишиться незмінним ($dY^* = 0$), якщо обсяги податків (прирости) збільшаться більше ніж обсяги (прирости) державних витрат, тобто:

$$dG = cdT\ .$$

Отже, нейтральним щодо рівноважного доходу є бюджет з позитивним сальдо (профіцитом). Навпаки, в умовах рівності приростів обсягів податків і урядових витрат, тобто збалансованого бюджету

$$dG = dT = d\hat{G},$$

рівноважний дохід зростатиме, але в мінімально допустимих обсягах, що показує рівність:

$$dY^* = \frac{\partial Y^*}{\partial G} dG + \frac{\partial Y^*}{\partial T} dT = s^{-1} d\hat{G} - s^{-1} c d\hat{G} = d\hat{G}.$$

У цьому випадку мультиплікатор збалансованого бюджету дорівнює одиниці $\left(\frac{dY^*}{d\hat{G}} = 1\right)$, а це означає, що збалансоване зростання доходів і витрат сприяє зростанню реального доходу, але у пропорції лише 1:1.

Отже, збалансований бюджет насправді не є нейтральним (нейтральною політикою) щодо доходу, а є стимулом, хоча і мінімальним, до виробництва. Тому збалансований бюджет виявляється хоча й найменш ефективним, але засобом щодо стимулювання виробництва, а не інструментом скорочення виробництва.

14.6. ФІСКАЛЬНИЙ АСПЕКТ ДИНАМІКИ БОРГУ

Розгляньмо фіскальний аспект для детермінованого процесу дефіциту бюджету. Припустимо, що фінансування бюджетного дефіциту здійснюється лише за рахунок податків і нових боргів. Це означає, що бюджетний дефіцит і державний борг не викликають збільшення грошової маси, отже, не мають довготермінових інфляційних наслідків.

Якщо чинники монетарної природи, зокрема сеньйораж[1], відсутні, то накопичений упродовж певного періоду дефіцит бюджету являє собою обсяг державного боргу.

Для обсягів державного боргу в реальних (поточних) цінах $b = b(t)$ і неперервно нараховуваної додатної ставки дохідності за державними облігаціями $r > 0$ та гіпотези тривалих термінів на-

[1] Сеньйораж — прибуток, одержаний державною скарбницею або центральним банком від випуску грошей. Дорівнює різниці між номінальною вартістю грошей та витратами на їхню емісію.

копичення дефіциту (практично нульового початкового боргу $b(0) = 0$) має місце співвідношення:

$$b(t)=\int_{-\infty}^{t} D(\tau)\exp[r(t-\tau)]\,d\tau=\int_{-\infty}^{t}[G(\tau)-T(\tau)]\exp[r(t-\tau)]\,d\tau. \quad (14.17)$$

Відповідно до (14.17) бюджет, котрий невизначено довго зводиться з дефіцитом $D(t)$, характеризується наявністю у кожен момент часу t державного боргу обсягом $b(t)$.

Виникає слушне запитання: наскільки великими можуть бути обсяги боргів, щоб у держави не виникало проблем щодо їх погашення? Відповідь на нього емпірично дається таким чином: оцінюються верхні межі для питомого боргу, який розуміють як відношення боргу (номінального) до ВВП (номінального). Вважається, що коли питомий борг не перевищує 50—70 %, то з його виплатами практично не буває проблем для зростаючої економіки. Теоретичне обґрунтування відповіді є дещо складнішим.

Позначимо питомий борг через $z(t)$:

$$z(t)=\frac{b(t)}{Y(t)},$$

де $Y(t)$ — обсяг реального ВВП у t-му році.

Зміна питомого боргу за нескінченно малий період часу $\dot{z}(t)$ дорівнюватиме:

$$\dot{z}(t)=\frac{\dot{b}(t)}{Y(t)}-\frac{b(t)}{Y^2(t)}\dot{Y}(t)=\frac{\dot{b}}{Y}-az(t), \quad (14.18)$$

де $\dot{b}$ — зміна реальних обсягів державного боргу за нескінченно малий період часу; $\dot{Y}$ — зміна реального ВВП за нескінченно малий період часу; $a=\frac{\dot{Y}}{Y}$ — темпи приросту реального доходу (ВВП).

Приріст (нескінченно мале) реального боргу на момент часу t становить за визначенням величину бюджетного дефіциту:

$$\dot{b}=(G-T)+rb. \quad (14.19)$$

Ця формула є просто іншим виразом рівняння державного боргу (14.17), якщо його продиференціювати за часом t (і навпаки).

Права частина рівняння (14.19) — це бюджетний дефіцит, котрий складається з первинного чи безвідсоткового дефіциту $(G - T)$ і сплат по накопиченому боргу, що здійснюються за номінальною ставкою дохідності r державних облігацій. Підставляючи (14.19) у (14.18), отримаємо диференціальне рівняння стосовно до питомого боргу:

$$\dot{z} = \frac{(G-T)+rb}{Y} - az = \frac{G-T}{Y} + (r-a)z,$$

або

$$\dot{z} = (r-a)z + \tilde{d}, \qquad (14.20)$$

де $\tilde{d} = \dfrac{G-T}{Y}$ — величина (обсяг) питомого первинного дефіциту (дефіциту без урахування нарощених відсотків).

У рівнянні (14.20) структурний коефіцієнт $(r-a) = q$ і питомий первинний дефіцит $\tilde{d} = \dfrac{G-T}{Y}$ можуть бути деякими функціями часу, що, взагалі кажучи, відповідає реальності, оскільки ставки відсотка, темпи зростання і частки дефіциту змінюються у часі. Однак для спрощення аналізу вважатимемо їх постійними величинами, значення котрих відомі:

$$\tilde{d} > 0; \quad q > 0.$$

Припустимо, що відоме і значення питомого боргу для деякого моменту часу, що береться за початковий, тобто $z(0) = z_0$.

У даній моделі (за відсутності монетарних чинників) бюджетний дефіцит може фінансуватися в міру перевищення обсягів податків над поточними урядовими витратами, тобто за умови

$$(G-T) < 0,$$

а також за рахунок нових позик.

Отже, помноживши обидві частини (14.20) на мінус одиницю і позначивши через $\tilde{h} = -\tilde{d}$ величину бюджетного профіциту, одержимо *рівняння фінансування бюджетного дефіциту* (за відсутності сеньйоражу):

$$\tilde{h} + \dot{z} = qz, \qquad (14.21)$$

у котрому дефіцит зводиться лише до сплат накопиченого боргу за ставкою дохідності $r > 0$, скоригованою на величину a — темп приросту реального ВВП.

Для зростаючої економіки параметр a — додатне число, для економіки в стагнації — нуль, а для депресивної — від'ємне число.

Рівняння (14.21) показує, що бюджетний дефіцит (на одиницю продукту) qz забезпечений у кожний момент часу чистими доходами держави і новими питомими боргами $\dot{z}$.

Заощадження витрат на обслуговування боргу за рахунок нових боргів є досить цікавим і породжує низку проблем.

Розгляньмо спочатку проблему фінансування бюджетного дефіциту без залучення нових позик, тобто за умови $\dot{z}=0$. Стан сталого (в часі) питомого боргу ($\dot{z}=0$) є для системи (14.21) стаціонарним станом[1].

Для нього диференціальне рівняння (14.21) редукується до алгебраїчного рівняння, розв'язком котрого є функція:

$$z^* = \frac{1}{q}\tilde{h}. \tag{14.22}$$

Отже, якщо чисті доходи держави впродовж нескінченного періоду часу становлять величину $\tilde{h}=T-G$, то ринкова вартість потоку цих доходів, приведена до теперішнього моменту часу, дорівнюватиме z^*. Коефіцієнт капіталізації майбутніх потоків доходів — це величина $\frac{1}{q}$, що має розмірність часу для $q = (r - a) > 0$.

Рівняння (14.21) є звичайним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку, котре можна переписати у стандартному вигляді:

$$\dot{z}=qz-\tilde{h}. \tag{14.23}$$

Розв'язком (14.23) є функція питомого боргу, що відповідає обсягам його погашення:

$$z(t) = \left[z_0 - \frac{\tilde{h}}{q}\right]\exp(qt) + \frac{\tilde{h}}{q}. \tag{14.24}$$

Після знаходження розв'язку чи траєкторії (14.24) проблема обслуговування боргу, тобто здійснення регулярних сплат для його погашення, зводиться до дослідження поведінки траєкторії питомого боргу: якщо остання прямує до деякої постійної величини (стаціонарної точки чи стаціонарного стану), що не перевищує верхньої межі допустимого боргу, то борги можуть бути сплачені. У протилежному разі сплати асимптотично не є можливими, а банкрутство стає неминучим.

---

[1] У деяких економічних працях пишуть про «стійкий стан», але це не точно, бо стаціонарний стан сам по собі може бути як стійким, так і нестійким, пов'язаним із ризиком.

Нехай у деякий початковий момент часу $t = 0$ питомий борг, наприклад, перевищує цю початкову величину, тобто $\left[z_0 - \frac{\tilde{h}}{q}\right] > 0$, тоді проблема сплати боргів зводиться до того, щоб з'ясувати, зростає чи зменшується ця різниця у часі. Припустимо, що в період часу $(0, t_1)$ сплати по боргу не здійснюються, а починаються з моменту t_1, коли вони стрибкоподібно дорівнюють $\frac{1}{q}\tilde{h}$. Як випливає з розв'язку (14.24), питомий борг спочатку зростає експоненційно, а в момент t_1 стрибкоподібно скорочується, оскільки починаються його сплати. Однак постійні сплати не впливають на динаміку питомого боргу, зростання якого триває, як це показано на рис. 14.2, лише за зміни початкових умов цього процесу. З аналізу розв'язку ясно, що такого характеру траєкторії боргу надає коефіцієнт $q = (r - a) > 0$, що являє собою різницю між ставкою реальної дохідності по державних облігаціях r і темпом приросту реального доходу a. Отже, якщо ставка дохідності державних облігацій r перевищує зростання доходу (ВВП чи національного доходу), то питомий борг зростає до нескінченності, оскільки економічних джерел покриття боргів не існує.

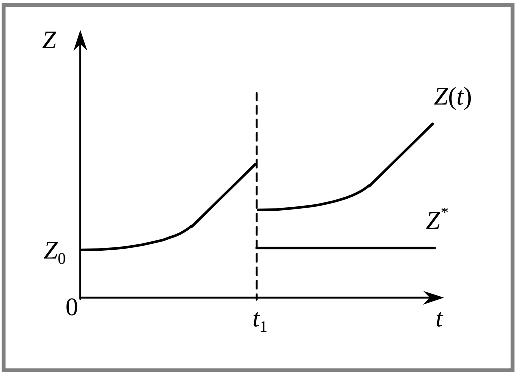


Рис. 14.2. Динаміка державного боргу

Нагадаймо, що сеньйораж у даній моделі відсутній, а економіка замкнута. Зрештою, замкнутість економіки тут не відіграє ніякої ролі, апелювання до зовнішніх джерел фінансування державного боргу для даної моделі не є суттєвим.

Формально траєкторія (14.24) вказує на те, що система сплати державного боргу є нестійкою. Навпаки, динаміка боргу стійка, тобто борги можуть бути сплачені лише тоді, коли реальний дохід зростає швидше, ніж величина ставки дохідності державних цінних паперів, тобто коли $q < 0$.

Економічний зміст даного висновку, на наш погляд, є надзвичайно важливим: за депресивної економіки борги не можуть бути сплачені, оскільки за $a \le 0$ система завжди є нестійкою.

Цікавим є й питання трансформаційних процесів у економіці, коли $a = a(t)$ залежить від часу і є спадною функцією:

або $a(t) = a_0 + a_1 t, \quad a_1 < 0,$ або $a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad a_2 < 0$ тощо.

14.7. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Назвіть основні чинники, що впливають на розвиток сучасної економічної теорії.
2. Поясніть сенс основного рівняння макроекономічної рівноваги.
3. Проаналізуйте позитивні й негативні сторони подання макроекономічної політики у термінах «цілі—засоби».
4. Поясніть сутність «критики Лукаса».
5. Поясніть фіскальні аспекти впливу дефіциту державного бюджету на економіку.
6. Покажіть принципову можливість урядового дефолту по боргах для депресивної економіки. Чому є суттєвою відсутність емісії грошей?

14.8. Теми рефератів

1. Раціональні очікування в умовах невизначеності та відсутності арбітражу.
2. Особливості кількісного аналізу перехідної економіки.
3. Модель малої відкритої перехідної економіки.
4. Модель політики Національного банку малої перехідної економіки.
5. Модель обмінного курсу для перехідної економіки.
6. Модель пропозиції та виробництва.
7. Модель оптимального вибору між інфляцією та безробіттям.
8. Взаємодія конкуренції та інфляції
9. Лінійні моделі інфляції.
10. Модель інфляції в перехідній економіці.

14.9. Завдання для самостійної роботи

1. У рівнянні (14.7) параметр λ, $0 < \lambda < 1$ для перехідної функції $f(K) = \lambda(K^* - K)$ має сенс економічної мотивації раціональних інвесторів. Як цей параметр має визначатись (який знак він повинен мати?) для опису раціональної поведінки інвесторів у системі з перехідною функцією $f(K) = \lambda(K^* - K)$?

2. У (14.3) іноземна валюта береться за базову, тому підвищення обмінного курсу $dx_2 > 0$ відповідає знеціненню національної валюти. Якщо ж узяти за базову власну валюту, то $dx_2 > 0$ означатиме її подорожчання.

А. Покажіть, що у цьому випадку матриця Якобі системи матиме такі знаки: $\begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix}$.

Б. Сформулюйте економічні умови, за яких можна провадити політику збільшення пропозиції грошей $dx_1 > 0$ і подорожчання власної валюти $dx_2 > 0$.

3. Нехай майбутній стан макроекономіки є бімодальним. В одному із станів інфляція становить 20 %, а в другому — 10 % протягом року. Якою буде величина сподіваної інфляції?

4. Нехай логарифм цін p є дискретним процесом випадкового блукання, тобто відповідає рівнянню: $p_t = p_{t-1} + \varepsilon_t$, де ε_t — випадковий процес із $E[\varepsilon_t] = E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] = 0$ і $E\left[\varepsilon_t^2\right] = 1$.

Покажіть, що раціональні очікування такого процесу для моменту t є просто фактичними значеннями цін у момент $(t - 1)$, тобто $E[p_t] = p_{t-1}$.

5. Нехай рівняння рівноваги для реального ринку є лінійним:

$$Y = c(Y - T) + I(r) + G,$$

де дохід дорівнює витратам на споживання і державним витратам.

А. Потрібно обчислити величину ефектів фіскальної політики (зростання бюджетних надходжень $\frac{\partial Y^*}{\partial T}$ і урядових витрат $\frac{\partial Y^*}{\partial G}$) на рівноважний дохід $Y^* = Y^*(c, G, T)$ у припущенні того, що ринкова ставка відсотка (r) є незмінною. Поясніть, котрий із цих ефектів переважає та чому?

Б. *Мультиплікатор Хаавельмо***.** Припустімо, що бюджетна політика є нейтральною, тобто такою, що не змінює обсягу рівноважного доходу. Як у цьому разі взаємодіють зміни доходів і витрат бюджету?

6. Потрібно здійснити аналіз рівняння динаміки боргу $\dot{z} = (r - a)z + \tilde{d}$ для різних економічних ситуацій.

А. Нехай економіка перебуває у стані стагнації, тобто темпи приросту реального доходу (ВВП) дорівнюють нулю ($a = 0$), але уряд продовжує позичати на вільному ринку. Водночас урядові вдалося повністю збалансувати свої поточні витрати і податкові надходження, тому первісний (безвідсотковий) дефіцит бюджету дорівнює нулю. Емісія грошей не передбачається.

Треба відшукати траєкторію динаміки державного боргу для цих умов. Динаміка боргу буде стійкою чи нестійкою? Чи здатен уряд розрахуватися з боргами?

Якщо первісна величина питомого боргу дорівнює 50 % ($Z_0 = 0{,}5$), а ставка ринкового відсотка $r = 0{,}1$, то яких обсягів досягне питомий борг через 10 років? Чи зможе уряд погасити початково накопичений борг?

Б. Економіка розвивається, але темп приросту національного доходу (чи ВВП) дорівнює ринковій ставці відсотка, за якою уряд обслуговує свої борги, тобто $r = a$. Якщо початковий борг дорівнює $Z_0 = 0{,}5$, а питомий профіцит бюджету $\tilde{h} = 0{,}05$ (5 %) щороку, то якої величини досягне обсяг питомого боргу через 5 і 10 років? Чи в змозі уряд погасити початковий борг і через який термін?

В. Уряд вирішив не брати позик на вільному ринку $(\dot{z} = 0)$, а величина питомого профіциту становить 5 % $\left(\tilde{h} = 0{,}05\right)$. Якої величини z^* (рівноважний) питомий державний борг може бути сплачений, якщо різниця між ринковою ставкою відсотка і темпом приросту доходу — 5 % річних ($r - a = 0{,}05$)? Протягом якого періоду може бути сплачений рівноважний борг? Чи залежить термін сплати рівноважного боргу від його обсягів? Від питомого профіциту? Від різниці між ринковою ставкою відсотка і темпом приросту доходу?

7. Нехай рівняння макроекономічної рівноваги має такий вигляд:

$$x = F(x, \nu),$$

де x — обсяг сукупного доходу, ν — рівень бюджетного дефіциту.

Якщо виконуються нерівності $0 < F_x < 1$ та $F_\nu < 0$, то як бюджетний дефіцит впливає на рівноважний обсяг доходу? Якій економічній ситуації це може відповідати?

15

РОЗДІЛ

ЗАГАЛЬНА МОДЕЛЬ МАКРОЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Макроекономічна динаміка — це складний процес поведінки економіки загалом, що розглядається як цілісна система. Цю систему можна розглядати як взаємодію виробників і споживачів, кредиторів і боржників, включаючи державу, на основних ринках: продукції, грошей і ресурсів. Ринок валюти є суттєвим доповненням даної моделі. Послідовний аналіз основних ринків, як і спільний аналіз їх, є предметом даного розділу. Управління (чи політика) у контексті досліджуваної моделі — це конкретизація рівняння (14.1), що розглядалося у матеріалах попереднього розділу, тобто аналіз квазістаціонарної поведінки макроекономічної системи. Управління агрегованим попитом відбувається у ринковій конкурентній економіці шляхом формування або державного бюджету (фіскальна політика), або грошової маси (монетарна політика).

Макроекономічна система складається з двох блоків: статичного, що формує параметри системи, і динамічного, що визначає траєкторії її розвитку. Динаміка описується кількома рівняннями і змінними, на значення яких впливають управління і задана структура системи. Траєкторії розвитку формуються під впливом параметрів, що задаються статичним блоком моделі. З формального погляду, дослідження даної моделі ґрунтується на методах аналізу нелінійних динамічних систем, які залежать від параметрів. Припускається, що всі змінні системи є неперервними і необхідну кількість разів диференційованими функціями відповідних змінних, а також часу. Статичний блок, що формує параметри системи, складається з рівнянь, що описують стани рівноваги на основних макроекономічних ринках. Вважається також, що динаміка є результатом дії як нелінійностей (синергетичний ефект), так і накопичення приватного багатства (державного боргу), що супроводжується формуванням очікувань учасників процесу.

Розгляньмо модель детермінованого процесу макроекономічної динаміки, котру називають моделлю Сарджента—Тарновського[1]. Даний матеріал відповідає матеріалу монографії С. Тарновського, його викладено також в інших посібниках[2].

15.1. АНАЛІЗ РИНКУ ТОВАРІВ І ПОСЛУГ

Ринок товарів і послуг у моделі зазвичай задається рівнянням збалансованого доходу (продукту) Y і агрегованих витрат, приватних і державних. Розглядатимемо короткотерміновий період, а тому вплив інвестицій на основний капітал не беремо до уваги. Агрегований попит на товари і послуги невиробничого споживання та інвестиційного характеру з боку приватного сектору $D(\cdot)$ аналізуватимемо агреговано, без виявлення відмінностей між ними.

Сукупний попит складається з приватних $D(\cdot)$ і державних G очікуваних витрат[3], які в точці рівноваги дорівнюють виробленому продукту:

$$Y = D\left(Y^D, r-\pi, A\right)+G, \quad 0<D_1<1; \quad D_2<0; \quad D_3>0. \qquad (15.1)$$

У рівнянні рівноваги ринку товарів і послуг (15.1) розташування аргументів під знаком функції агрегованого попиту буде у подальшому зафіксоване, що дозволить у майбутньому уникнути нагромадження, дозволяючи відповідні частинні похідні позначати підпорядкованим індексом, тобто

$$0<D_1\equiv\frac{\partial D}{\partial Y^D}<1; \quad D_2\equiv\frac{\partial D}{\partial(r-\pi)}<0; \quad D_3\equiv\frac{\partial D}{\partial A}>0.$$

Функція сукупного приватного попиту $D(\cdot)$ залежить від: доходу до розпорядження Y^D, реальної ставки відсотка $(r-\pi)$, де r — номінальна ставка відсотка, π — темпи інфляції, A — приватне багатство.

Характер основних реакцій економіки (приватного попиту) на зміни доходу до розпорядження, реального відсотка і приватного багатства задається знаками похідних виробничої функції приват-

---

[1] *Sargant T.* Macroeconomic Theory. — N.Y.: Academic Press, 1987; *Turnowsky S.* Methods of Macroeconomic Dynamics // The MIT Press, 1995.

[2] *Смирнов А. Д.* Лекции по макроэкономическому моделированию: Учеб. пособие для вузов. — М.: ГУ ВШЭ, 2000.

[3] Строго кажучи, відмінність фактичних витрат від очікуваних (бажаних чи запланованих) уже ставить перед необхідністю розглядати динамічний аспект поведінки макроекономіки, хоча й у неявному вигляді.

ного попиту по відповідних аргументах D_i, $i = 1, 2, 3$. Зокрема, збільшення доходу до розпорядження на одиницю зумовлює зростання агрегованого приватного попиту, дещо меншого за одиницю, що передбачає в загальному випадку збереження частки виробленого доходу. Підвищення реального відсотка робить дорожчими споживчий та інвестиційний кредити, скорочує приватний попит, звідси — від'ємне значення похідної D_2. Знак похідної D_3 — додатний, оскільки накопичення приватного багатства збільшує агрегований приватний попит.

Дохід до розпорядження Y^D у загальному випадку являє собою алгебраїчну суму виробничого доходу Y, податків T, доходів, отриманих від особистого багатства rb та інфляційного податку на багатство πA:

$$Y^D = Y - T + rb - \pi A. \qquad (15.2)$$

У моделі припускається, що приватний сектор в оцінюванні величини свого доходу до розпорядження реагує на очікувану величину інфляції π, а не на фактичну інфляцію. Приватне багатство у реальному вираженні A подається портфелем, що складається з двох активів: вартості грошей $m = \frac{M}{P}$ і державних облігацій $b = \frac{B}{P}$, які дефлятовані за індексом цін P. Рівняння портфеля будується для реальних активів з коефіцієнтами, що дорівнюють одиницям, тож приватне багатство визначається лише відношенням реальної вартості активів:

$$A = m + b. \qquad (15.3)$$

Зазначимо, що в реальному випадку вплив портфеля активів на приватний попит залежить від форми накопичення багатства, бо приватний попит залежить як від багатства, так і від доходу до розпорядження. Якщо, приміром, накопичення приватного багатства відбувається у формі грошей, то, оскільки у цьому випадку $b(t) = \bar{b} = \text{const}$, реакція приватного попиту на багатство визначається як похідна складної функції:

$$D_A^m = -D_1\pi + D_3,$$

тому що

$$\frac{\partial A}{\partial m} = 1, \quad a \ \frac{\partial A}{\partial b} = 0, \quad \text{бо} \quad b(t) = \text{const}.$$

Наприклад, нерівність $D_A^m > 0$ має місце за виконання додаткової умови, а саме — гіпотези щодо більш сильного прямого впливу грошей на приватний попит порівняно з їхнім впливом на дохід до розпорядження. У загальному випадку реакція приватного попиту на зростання реальних грошових балансів не визначена.

З іншого боку, якщо приватне багатство накопичується у формі облігацій і $m(t)=\overline{m}=\text{const}$, то реакція приватного попиту задається похідною:

$$D_A^b = D_1(r-\pi)+D_3 .$$

Оскільки базові реакції приватного попиту задані умовами рівноваги ринку товарів і послуг, то в загальному випадку знак реакції D_A^b природно обрати додатним (якщо очікувана інфляція не перевищує ставки номінального відсотка). Це (додатне значення реакції) є суттєвим для стійкості системи макроекономічної динаміки.

Аналогічна невизначеність існує щодо реакції приватного попиту на зміну ставки відсотка

$$D_r = D_1 b + D_2 .$$

Приватний попит, зокрема, зростатиме ($D_r > 0$) за збільшення ставки відсотка лише тоді, коли ефект доходу перевищуватиме ефект заміщення.

У загальному випадку природно вважати, що зростання ставки відсотка призводить до подорожчання кредиту, що викликає скорочення приватного попиту як на споживчому ринку, так і на ринку інвестицій. Тому має місце нерівність ($D_r < 0$), котру (від'ємний знак) вважатимемо основною.

Наявність виокремлених невизначеностей надзвичайно важлива, особливо щодо стійкості системи і властивостей стаціонарного стану системи.

Вважаючи постійними всі параметри і змінні у рівнянні $X - F(x,v) = 0,$ окрім доходу і відсотка, в малому околі точки рівноваги реального ринку (Y^*, r^*) можна обчислити співвідношення для змін цих змінних:

$$dY = D_1 dY + D_r dr.$$

Прийняті раніше умови, зокрема те, що ($D_r < 0$), зумовили вздовж кривої рівноваг ринку товарів і послуг нерівність, яка визначає вигляд *IS*-кривої у координатах «дохід—відсоток», котре має від'ємний кут нахилу:

$$\left.\frac{dr}{dY}\right|_{IS} = \frac{1-D_1}{D_r} < 0,$$

оскільки $0 < D_1 < 1, \quad D_r < 0.$

Згідно з теоремою про неявну функцію, умови якої вважаються виконаними, у досить малому околі точки рівноваги реального ринку існує функція:

$$Y^* = Y^*(G, T, A, P, \pi, \bar{r}) \qquad (15.4)$$

за заданого значення ставки відсотка і функція:

$$r^* = r^*(G, T, P, A, \pi, \bar{Y}) \qquad (15.5)$$

за заданого значення сукупного доходу, що показано в їх записі.

Ці (неявні) функції дозволяють обчислити реакції точки рівноваги ринку товарів і послуг на зміну параметрів системи. У попередній темі ці реакції (мультиплікатори) системи мали інтерпретацію короткотермінової економічної політики, котра у даному випадку є фіскальною, чи бюджетно-податковою політикою. Наприклад, якщо уряд збільшує бюджетні витрати, тобто проводить стимулюючу фіскальну політику, то, припускаючи гіпотезу щодо незмінності рівноважної ставки відсотка, вироблений продукт (його рівноважне значення) зростає:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial G} = (1 - D_1)^{-1} > 1,$$

бо з (15.1) та з (15. 2) маємо:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial G} = \frac{\partial D}{\partial Y^D} \frac{\partial Y^*}{\partial G} + \frac{\partial G}{\partial G},$$

тобто:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial G}(1 - D_1) = 1,$$

а звідси:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial G} = (1 - D_1)^{-1} > 1.$$

Відповідно, якщо урядові витрати впливають лише на ставку відсотка (не розрізнятимемо номінальну і реальну ставки відсотка, якщо очікувана інфляція постійна), коли уряд бере позики на вільному ринку (емісія державних цінних паперів), то матимемо:

$$\frac{\partial r^*}{\partial G} = -D_r^{-1} > 0.$$

Тобто зростання бюджетних витрат, що фінансуються за рахунок державних боргів, зумовлює підвищення ставки відсотка, що дає змогу урядові продовжувати брати позики на вільному ринку.

Можливість обчислення відповідних мультиплікаторів, тобто оцінки короткотермінових ефектів реалізації макроекономічної політики, є цінним інструментом теоретичного аналізу та розроблення практичних рекомендацій.

Але загалом дослідження окремо взятого ринку товарів і послуг, хоча й найважливішого, пов'язане з численними гіпотезами.

Це можна побачити з характеру функцій (15.4) і (15.5), котрі залежать від шести параметрів, стосовно до яких можна робити досить загальні припущення і висновки. Наприклад, оскільки приватне багатство — параметр системи, то збільшення державних витрат у короткотерміновому періоді не сприяє зростанню активів, що означає фінансування бюджетного дефіциту лише за рахунок податків. Звичайно, це — одна з гіпотез, викликана тим, що модель надмірно спрощена. Однак головне полягає у тому, що реальний дохід і ставка відсотка змінюються в ринковій економіці одночасно завдяки взаємодії реального ринку і ринку грошей. Для цього треба дослідити другий макроекономічний ринок — ринок фінансів, який редукується до ринку грошей.

15.2. АНАЛІЗ РИНКУ ГРОШЕЙ

Ринок грошей — це ринок національної валюти, тобто ринок лише доларів чи лише гривень. З іншого боку, існування фінансового ринку, на котрому перебуває в обігу (як товар) низка різних інструментів — гроші, різноманітні цінні папери та їхні похідні (наприклад опціони, ф'ючерси, свопи), певні товари (наприклад золото, платина), сумнівів щодо визначення базового ринку не повинно викликати.

Тому важливо зрозуміти, що макроекономічний ринок грошей — це редукція (спрощення) фінансового (багатокомпонентного) ринку до двокомпонентного, на якому перебувають в обігу (як товар) гроші та деякий типовий представник цінних паперів (як правило, це державна облігація — коротко- чи довготермінова).

Ця модель характеризує основні макроекономічні ефекти фінансового ринку й дістала назву ринку грошей.

Найпослідовніше така редукція реалізована у концепції портфельного підходу Дж. Тобіна, котрий проілюструємо як редукцію трикомпонентного фінансового ринку до двокомпонентного. Цей підхід ґрунтується на побудові рівнянь, що описують поведінку агрегованих кредиторів і позичальників на фінансовому ринку, які формують портфель активів відповідно до своїх пріоритетів.

Логіка міркування базується на тому, що *n*-компонентний фінансовий ринок певним чином може бути приведено (редуковано) до трикомпонентного. Далі відбувається його редукція до двокомпонентного ринку, що складається з грошей та облігацій.

Припустимо, що на макрорівні портфель агрегованого інвестора складається з трьох активів (компонент) у номінальному вираженні: грошей M, облігацій B і вартості фізичного капіталу $P_K K$. Два останніх, не грошових, активи є або типовими представниками підмножини відносно однорідних активів, тобто активів із постійними характеристиками (дохідністю, періодом обігу, ціною тощо), або певним чином побудованих агрегатів реальних (фізичних) активів. Кожному з активів (компонент портфеля) відповідає своя норма дохідності: $-\pi$, $r-\pi$, r_k, власне дефляція, реальна ставка відсотка та ефективність капіталу. Гроші розглядатимемо як актив, який приносить нульовий дохід, якщо відсутня інфляція, і від'ємний дохід у період інфляції. Щоб зберегти сенс дохідності як додатної величини, дохідність грошей вимірюється їх подорожчанням, що спостерігається у періоди дефляції.

Ставка ефективності капіталу — це вартість граничного продукту капіталу, зіставлена з одиницею вартості фізичного капіталу, тобто

$$r_k = \frac{P}{P_k}\frac{\partial Y}{\partial K} \equiv \frac{PR}{P_k}.$$

Інтегрований попит по кожному з активів подається відповідно такими функціями: $L(\cdot)$, $J(\cdot)$, $N(\cdot)$, які є неперервними і диференційованими за кожним аргументом функціями реального доходу Y, дохідності кожного активу і сукупного багатства A.

Отже, *попит* на активи у реальних цінах визначається таким чином:

$$P^{-1}M^d = L(Y, -\pi, r-\pi, r_k, A);$$

$$L_1 > 0,\ L_2 > 0,\ L_3 < 0,\ L_4 < 0,\ 0 < L_5 < 1;$$

$$P^{-1}B^d = J(Y, -\pi, r-\pi, r_k, A);$$

$$J_1 \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 0,\ J_2 < 0,\ J_3 > 0,\ J_4 < 0,\ 0 < J_5 < 1;$$

$$P^{-1}K^d = N(Y, -\pi, r-\pi, r_k, A);$$

$$N_1 \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 0,\ N_2 < 1,\ N_3 < 0,\ N_4 > 0,\ 0 < N_5 < 1,$$

де L_i, J_i, N_i, $i = 1, \ldots, 5$ є відповідними частковими похідними по першому і т. д., п’ятому аргументах.

Уведені вище функції структурують попит на активи, що входять до трикомпонентного портфеля агрегованого інвестора, через знаки реакції попиту на зміну кожного з активів залежно від змін аргументів функцій попиту. Зокрема, зростання доходу збільшує попит на гроші (трансакційний попит), але не тягне за собою конкретних змін щодо попиту на капітал чи облігації. Отже, $L_1 > 0$, а знаки похідних J_1, N_1 не визначені, якщо не накладати додаткових умов на відповідні функції попиту. Припускаються гіпотези, що збільшення дохідності кожного активу веде до зростання попиту на даний актив, а отже, і до скорочення попиту на альтернативні активи. Додаткова одиниця багатства розподіляється повністю на всі активи портфеля.

Попит на активи «всюди щільний», тобто мають місце рівності:

$$L_i + J_i + N_i = 0; \quad i = 1, \ldots, 4.$$
$$L_5 + J_5 + N_5 = 1.$$

Припустимо, що облігації та фізичний капітал повністю взаємозамінні, а їхні норми дохідності рівні між собою ($r - \pi = r_k$). За таких умов важко розрізнити попит окремо на кожен з них. Припустимо також, що існує однорідний попит на цінні папери $[J(\cdot) + N(\cdot)]$. Нехай державні облігації будуть репрезентативним представником такого спільного попиту на всі цінні папери. Тоді, оскільки приватне багатство визначається з умови рівноваги фінансового ринку:

$$P^{-1}(M^d + B^d + P_k K^d) = P^{-1}(M + B + P_k K) = A,$$

то згідно із *законом Вальраса* трикомпонентний фінансовий ринок можна виразити через співвідношення *попиту і пропозиції грошей*. Формально, звичайно, гроші та облігації є рівноправними, але, як правило, досліджується ринок грошей, оскільки пропозиція грошей — контрольована змінна, коливання якої моделює монетарну політику центрального банку.

Згідно з додатковими гіпотезами попит на гроші залежить від так званого *спреду*, різниці між дохідністю грошей і облігацій, тобто:

$$(r - \pi) - (-\pi) = r,$$

отже, попит на гроші залежить від ставки номінального відсотка r.

Таким чином, рівновагу на ринку фінансів можна подати через співвідношення між попитом на гроші в реальному вираженні:

$$L(Y, r, A)$$

та їх пропозицією —

$$m \equiv \frac{M}{P},$$

тобто *рівнянням рівноваги ринку грошей*:

$$m = L(Y,\ r,\ A);\ \ L_1\ >\ 0,\ L_2\ <\ 0,\ L_3\ >\ 0, \qquad (15.6)$$

котре можна подати графічно (рис. 15.1).

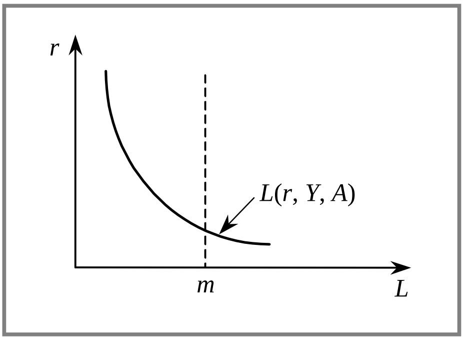


Рис. 15.1. Рівновага на ринку грошей

У певному розумінні рівняння (15.6) дає інформацію про стан фінансового ринку, зведеного лише до співвідношення попиту і пропозиції грошей. Тут «ціна грошей» розуміється у кейнсіанському трактуванні, тобто як альтернативні витрати від володіння багатством у грошовій формі, чи як ставка номінального відсотка *r*. Пропозиція грошей в (15.6) — це зміна управління, хоча може бути й деякою функцією, залежною від ставки відсотка.

У проведенні монетарної політики центральний банк використовує різні інструменти регулювання облікової ставки, норми резервування, операції на вільному ринку з державними боргами тощо. Всі ці інструменти грошової політики дозволяють центральному банку управляти пропозицією грошей, хоча під його безпосереднім контролем перебуває лише так звана грошова база.

У ринковій економіці держава (центральний банк) може впливати на попит грошей лише опосередковано. Центральний банк регулює ставку відсотка, а через неї — рівень сукупного доходу, котрий є чутливим щодо ціни кредиту. Наприклад, ставка між-банківських кредитів дуже чутлива до зміни облікової ставки чи ставки рефінансування (вартості кредитів центрального банку). На рівень сукупного доходу впливає грошова маса, котра формує обсяг позичкових засобів.

Вплив монетарної політики на економіку визначається залежно від деяких апріорі заданих орієнтирів, так званих *номінальних якорів*, які розглянемо далі.

Зазначимо, що грошовий попит $L(Y, r, A)$ як функція ставки відсотка (за заданих доходів і багатства) має суттєво нелінійний характер. За високих значень ставки відсотка гроші й облігації практично не є взаємозамінними. Тому грошовий попит відносно невеликий, а реакція грошового попиту на зміну ставки відсотка наближається до нуля ($L_2 \approx 0$).

Можна твердити, що попит на гроші існує, практично, як трансакційний попит, що залежить лише від обсягу угод.

У цьому разі рівнянням кількості грошей буде:

$$M\nu = PY,$$

де M — величина грошового попиту; ν — швидкість обігу грошей; P — дефлятор ВВП; Y — ВВП у реальному вираженні.

За малих значень ставки відсотка, навпаки, облігації і гроші (готівка) стають досить близькими субститутами, отже, попит на гроші стає досить чутливим до зміни ставки відсотка ($L_2 \to \infty$).

Цей випадок відомий у літературі як «грошова пастка» Кейнса, хоча на практиці не спостерігався.

Загалом система рівнянь (15.1) та (15.6) може бути визначеною, зокрема, для фіксованого рівня реальної пропозиції грошей $m = \overline{m}$, тобто йдеться про накопичення приватного багатства у формі державних облігацій. Це дає можливість обчислити координати рівноваги реального і грошового ринків разом у результаті розв'язку системи рівнянь:

$$\begin{gathered} Y = D(Y^D, r - \pi, A - \overline{m}) + G, \\ Y^D = Y - T + rb - \pi(A - \overline{m}), \\ m = L(Y, r, A), \\ A = \overline{m} + b. \end{gathered} \qquad (15.7)$$

Розв'язок системи у координатах «дохід—відсоток» існує і є єдиним:

$$\begin{gathered} Y^* = Y^*(G, T, P, \overline{m}, \pi), \\ r^* = r^*(G, T, P, \overline{m}, \pi). \end{gathered} \qquad (15.8)$$

Реакції макроекономіки на зміну параметрів системи, наприклад, ефекти стимулюючої бюджетно-податкової політики $\partial G > 0$, можна обчислити з розв'язку такої системи:

$$\begin{bmatrix} 1-D_1 & -D_r \\ -L_1 & -L_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Y^*}{\partial G} \\ \dfrac{\partial r^*}{\partial G} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (15.9)$$

котра отримана диференціюванням рівнянь (15.7). Згідно з умовами, сформульованими для рівнянь рівноваги реального і грошового ринків, визначник системи (15.9) завжди є додатним, отже, система має єдиний нетривіальний розв'язок. Ненульовий вектор мультиплікаторів урядових витрат визначає наслідки застосування певної фіскальної політики.

Аналогічно обчислюються реакції макроекономіки на монетарну політику ∂m, а також на зміну інших параметрів системи.

15.3. ФУНКЦІЯ АГРЕГОВАНОГО ПОПИТУ

Розгляньмо один із варіантів розширення моделі, котрий дозволяє обчислити функцію агрегованого попиту. Припустимо, що дохід до розпорядження не залежить від багатства, тобто є різницею між виробленим доходом і податками

$$(Y^D = Y - T).$$

Приватне багатство подамо у вигляді:

$$A = \frac{M + B}{P}.$$

Отримаємо систему:

$$\begin{aligned} &Y = D\left(Y - T,\ r - \pi,\ \frac{1}{p}(M + B)\right) + G; \\ &\frac{M}{p} = L\left(Y,\ r,\ \frac{1}{p}(M + B)\right). \end{aligned} \qquad (15.10)$$

У досить малому околі точки спільної рівноваги реального і грошового ринків рівноважні значення продукту і відсотка існують як наявно задані функції параметрів системи, тобто цін, інфляційних сподівань, бюджетних витрат, податків та активів.

15.4. АГРЕГОВАНА ПРОПОЗИЦІЯ

Для знаходження точки макроекономічної рівноваги треба мати не лише функцію агрегованого попиту, а й функцію агрегованої пропозиції $Y^S = Y^S(P, \ldots)$. Для її побудови звернімося до ринку ресурсів. Використання ресурсів у короткотерміновому періоді редукуємо до використання праці, котра є найрухомішим чинником створення доходу. Для конкретної економіки залежність випуску Y від ресурсів (праці чи зайнятості N) виражається виробничою функцією $Y = f(N)$, для якої припускають виконання звичайної умови увігнутості (насичення):

$$f'(N) > 0; \quad f''(N) < 0.$$

У простому випадку переваги типового домашнього господарства дають можливість визначити функцію корисності $U(\cdot)$, що залежить від двох благ — доходу і вільного часу — та максимізується на множині допустимих благ:

$$\max U(Y, L).$$

Дохід домашні господарства заробляють продажем своєї праці N^S, за одиницю котрої вони отримують ринкову ставку номінальної зарплати w. Оскільки домашні господарства діють відносно раціонально, то вони керуються у виконанні рішень ставкою реальної зарплати. Вільний час визначимо як різницю загального фонду часу й відпрацьованого часу (наприклад у людино-днях): $L = T - N^S$.

Пропозиція праці обчислюється з необхідних умов оптимальності:

$$\frac{\partial}{\partial N} U\left(\frac{w}{P} N^S,\ T - N^S\right) = u_1 \frac{w}{P} - u_2 = 0.$$

Для малого околу точки оптимуму знаходимо пропозицію праці як (неявну) функцію реальної зарплати:

$$N^S = N^S\left(\frac{w}{P}\right).$$

Ясно, що домашні господарства позитивно реагують на підвищення реальної зарплати, збільшуючи пропозицію праці й, відповідно, враховуючи ринок праці — в протилежному випадку.

З іншого боку, попит на трудові ресурси здійснюється раціонально господарюючими фірмами. Фірми максимізують різницю між своїм доходом і витратами, котрі для короткотермінового періоду подані сплатами зарплати (номінальної) згідно з ринковими ставками, тобто:

$$\max \Pi(N,P,w) = Pf(N) - wN.$$

З необхідних умов оптимальності для задачі максималізації прибутку

$$Pf'(N) - w = 0$$

знаходимо попит на трудові ресурси як функцію реальної зарплати:

$$N^d = N^d\left(\frac{w}{P}\right).$$

Раціонально функціонуючі фірми скорочують попит на працю, якщо ставка реальної зарплати зростає, та збільшують у протилежному випадку. Отже, на конкурентному ринку праці існує рівновага між пропозицією праці й попитом на неї, котра встановлюється за певних значень ціни праці (номінальної зарплати), рівня цін і зайнятості. Ця точка рівноваги єдина в заданих припущеннях і відповідає значенню виробничої функції $Y^* = f(N^*)$, тобто рівню агрегованого попиту.

Характер агрегованої пропозиції залежить від гіпотез, котрі можуть бути висунуті стосовно до поведінки номінальної зарплати. Якщо ринок праці достатньо конкурентний, то номінальна зарплата постійно врівноважує попит і пропозицію праці. Отже, зміні ціни продукту повинна відповідати зміна номінальної оплати праці. Це означає, що для «гнучких» ставок номінальної зарплати ціни не змінюють рівня зайнятості, а отже, і агрегованої пропозиції. Така ситуація може спостерігатись і в умовах збігу очікувань, на підставі яких фірми і домашні господарства встановлюють трудові контракти. З іншого боку, якщо номінальна зарплата фіксована чи змінюється суттєво повільніше, ніж ціни, то зміна останніх зумовлює зміну попиту на працю, зайнятість та агреговану пропозицію. Це може мати місце на нерівноважному ринку праці через викривлення, неповноту чи неточність інформації.

В умовах інфляційних процесів, що діють практично всюди в сучасній ринковій економіці, зручно використовувати не рівень цін, а зміни їх, тобто інфляцію, і відповідно пов’язувати їх (ціни) зі змінами рівня виробництва (агрегована пропозиція). Тому в сучасній теорії крива агрегованої пропозиції замінюється на криву Філіпса, доповнену очікуваннями, котру можна подати у вигляді:

$$p = \pi + \alpha(Y - \overline{Y}); \quad \alpha > 0, \qquad (15.11)$$

де p — фактична інфляція; π — інфляційні сподівання; $\bar{Y}$ — рівень потенційного виробництва; Y — фактичний рівень виробництва; α — чутливість інфляції до змін у виробництві.

Згідно з (15.11) у короткотерміновому періоді збільшення (зростання) фактичної інфляції сприяє зростанню виробництва, бо:

$$\frac{\partial Y}{\partial p} = \frac{1}{\alpha} > 0.$$

Ця обставина є надзвичайно важливою, бо короткотривалий інфляційний імпульс, наприклад, у результаті підвищення пропорцій грошей, може слугувати поштовхом до розширення виробництва в депресивній економіці.

Крива Філіпса, визначаючи поведінку агрегованої пропозиції, відіграє важливу роль у дослідженні стійкості макроекономічної динаміки.

Доводиться, що для рівноважних значень випуску та інфляції, відповідно

$$p^* = p^*(\bar{Y}, \pi, \alpha) \quad \text{та} \quad Y^* = Y^*(\bar{Y}, \pi, \alpha),$$

реакція фактичної інфляції та випуску на зміну очікувань для функції Філіпса доповнюють одне одного до одиниці:

$$\frac{\partial p^*}{\partial \pi} - 1 = \alpha \frac{\partial Y^*}{\partial \pi}.$$

15.5. ДИНАМІКА ОЧІКУВАНЬ

У дійсності очікування неперервно змінюються, впливаючи на поведінку економічних агентів і тим самим — на траєкторію розвитку. Проблема очікувань в економічній теорії є однією з фундаментальних. У широкому розумінні економічна поведінка не є незалежною від майбутнього: в поточний період економічні агенти реагують на очікувані події, котрі ще не відбулись, але можуть відбутися з деякою ненульовою ймовірністю. Проте вичерпної інформації щодо майбутнього немає через те, що в майбутньому ніхто з нас не був, а деякий сурогат такої інформації, складений на підставі наявних даних про минуле й сьогодення, а також на основі експертних оцінок, і є очікуваннями. Зміни очікувань, котрі відбуваються в міру накопичення нової інформації, змін преференцій та уявлень, формують потенційне джерело макроекономічної динаміки.

У даній детермінованій моделі припускатимемо, що очікування формуються стосовно до фактичної інфляції, тобто є інфляційними очікуваннями:

$$\pi(t) \equiv p^{e}_{t,t+\tau} = E_t[p(t+\tau)],\ \tau > 0. \qquad (15.12)$$

Інфляційні очікування змінюються *адаптивно*, неперервно реагуючи на зміну фактичного рівня інфляції. Просте правило адаптації очікувань виражається векторним полем, тобто співвідношеннями між фактичними значеннями деякої змінної, очікуваннями та напрямком (вектором) їх змін:

$$\dot{\pi} = a(p - \pi); \quad a > 0. \qquad (15.13)$$

Рівняння (15.13) означає, що в кожній точці на осі часу очікування змінюються пропорційно до помилки спостереження $(p - \pi)$: вони зростають, якщо фактична інфляція виявилася вищою, ніж існуючі очікування, або зменшуються — в протилежному випадку. Додатний параметр $a > 0$ враховує важливість (чи вагу) помилки спостереження, а отже, характеризує інерційність системи: чим більше $a > 0$, тим менший інерційний процес адаптації.

Для відомих очікувань у певний початковий момент часу $\pi(0) = \pi_0$ і, наприклад, постійної фактичної інфляції $p = \overline{p}$ розв'язок даного рівняння легко знаходиться як функція:

$$\pi(t) = [\pi_0 - \overline{p}]\exp(-at) + \overline{p}. \qquad (15.14)$$

Ця траєкторія очікувань є стійкою, тобто з плином часу очікування як завгодно близько наближаються до значень фактичної інфляції (ефект насичення). Ясно, що заміна інфляції з постійної на змінну в часі, наприклад, за деяким законом $p = p(t)$, не впливає на стійкість системи, що моделюється рівнянням (15.14). Однак процес адаптації очікувань щодо фактичної інфляції є інерційним у тому розумінні, що наявність перехідного процесу в системі свідчить про накопичення помилок спостережень: встановивши, приміром, що фактична інфляція вища за очікувану, її неправильна оцінка виправляється не відразу, а поступово. Інерційність процесу адаптивних очікувань викликала серйозну критику цієї гіпотези на тій підставі, що раціонально діючий економічний агент (виробник чи споживач, кредитор чи інвестор), якщо й робить помилки, то зрештою «не стає на граблі двічі».

Формально інерційність системи адаптивних очікувань може бути усунена на основі граничного переходу, що припускає нескінченно швидку реакцію агента на зміну фактичної інфляції. У цьому випадку:

$$\lim_{a \to \infty} \frac{1}{a} |\dot{\pi}| = 0 \quad \text{і} \quad \pi = p,$$

тобто раціонально діючий економічний агент здійснює безпомилкові передбачення. Ясно, що така логіка є надто прямолінійною.

З одного боку, систематичні помилки можна пояснити викривленням і неповнотою наявної інформації, затримкою в її отриманні, що спричиняється до відповідного ризику. Будь-яка дискримінація в цій справі, особливо помітна на недосконалих ринках, зокрема, в перехідних економіках, на нашу думку, слугує аргументом на підтримку інерційності процесу адаптивних очікувань. З іншого боку, серйозно обґрунтувати безпомилковість передбачень — справа безнадійна. Деякі інші підходи ґрунтуються на комбінації раціональних та адаптивних очікувань.

15.6. НАКОПИЧЕННЯ ПРИВАТНОГО БАГАТСТВА

Макроекономічна динаміка в моделі Сарджента—Тарновського ідентифікується зі змінами очікувань бізнесу й населення та накопиченням ними приватного багатства. У свою чергу, накопичення приватного багатства пов’язується з формуванням державного боргу: це немовби різні сторони одного й того самого процесу. Основна ідея даної моделі досить проста: держава, діючи відповідально, завжди зобов’язана повністю фінансувати бюджетний дефіцит, використовуючи, зокрема, податки, борги, гроші. Ці інструменти використовують бізнес і населення (податки, звичайно, з від’ємним знаком), що й формує процес накопичення приватного багатства.

Як завжди, модель дуже спрощує реальність, що, однак, можна виправдати низкою економічних міркувань. По-перше, модель відтворює короткотермінові ефекти, а в короткотерміновому періоді накопичення фізичного багатства (капіталу, знань, землі) відбувається значно повільніше порівняно зі зміною обсягів грошових активів чи цінних паперів. Аналогічно, ми не розглядали реалізацію капітальних вкладень, а ринок ресурсів був зведеним лише до ринку праці. По-друге, борги імітуються в дійсності як державою, так і приватними особами й бізнесом, але для економіки типу української, де ринок приватних боргів відносно малий, гіпотези моделі є цілком допустимими.

Отже, реальну вартість активів уважатимемо неперервною і диференційованою функцією часу, а зміни багатства (нескінченно малі) з урахуванням (15.3) являють собою приріст реальної вартості грошей і державних облігацій:

$$\dot{A} = \dot{m} + \dot{b}. \tag{15.15}$$

Обчислимо миттєві прирости реальної вартості грошей і облігацій:

$$\dot{m} = \frac{\dot{M}}{P} - pm; \quad \dot{b} = \frac{\dot{B}}{P} - pb, \tag{15.16}$$

де $P = \frac{\dot{P}}{P}$ — фактична інфляція.

Функції $\frac{\dot{M}}{P}$ та $\frac{\dot{B}}{P}$ мають назву відповідно сеньйоражу та реальної вартості (нових) боргових зобов'язань держави на вільному ринку.

У попередньому матеріалі наголошувалося, що в кожен момент часу держава фінансує свої реальні фактичні витрати G за рахунок податків T і обслуговує борги, накопичені до даного (поточного) моменту часу. Вона, отже, зобов'язана профінансувати первісний, чи безвідсотковий, номінальний дефіцит $P(G - T)$, а також обслуговувати за ринковою (номінальною безризиковою) ставкою відсотка r державний борг, накопичений до даного моменту rB.

Ці завдання можуть бути вирішені шляхом використання тієї чи іншої комбінації з грошової емісії $\dot{M}$ та нових боргів на вільному ринку $\dot{B}$. Таким чином, для кожного моменту є справедливим рівняння фінансування бюджетного дефіциту в номінальному вираженні:

$$P(G-T) + rB = \dot{M} + \dot{B}. \tag{15.17}$$

Аналогічне рівняння фінансування бюджетного дефіциту в реальному вираженні отримаємо, підставивши (15.16) в (15.17):

$$\dot{m} + \dot{b} = (G-T) + rb - pA. \tag{15.18}$$

Рівняння (15.18) вказує, що крім боргових позичок та емісії грошей держава отримує ще одне надзвичайно важливе джерело фінансування бюджетного дефіциту, власне, *інфляційний податок*, який сплачується населенням і бізнесом з усіх форм приватного багатства:

$$-pA = -p(m+b).$$

У макроекономічній теорії звичайно увага акцентується на інфляційному податкові, котрий сплачується лише з активів, що існують у формі грошей. Зрозуміло, що змістовно інфляційний податок *pm* характеризує міру знецінення грошей (інфляцію). Податок з облігацій сплачується як різниця між номінальним і реальним відсотком по державному боргу, котра також вимірює знецінення номінальної вартості державного (внутрішнього) боргу.

Якщо держава не вдається до сеньйоражу, то ринкова вартість державного боргу постає як капіталізована за ставкою реального відсотка $\hat{r}$ різниця між потоками майбутніх доходів і витрат.

Як випливає з рівняння

$$b(t)+\int_t^{\infty} G(\tau)\exp[-\hat{r}(\tau-t)]d\tau=\int_t^{\infty} T(\tau)\exp[-\hat{r}(\tau-t)]\,d\tau, \qquad (15.19)$$

єдиним джерелом фінансування накопиченого боргу й поточних витрат є майбутні доходи держави, тобто майбутні податки, вартість яких зведена (дисконтована) до поточного моменту.

15.7. МАКРОЕКОНОМІЧНА МОДЕЛЬ У ЦІЛОМУ

Отже, в цілому модель макроекономічної динаміки являє собою систему із семи рівнянь із сімома невідомими і має вигляд:

$$\begin{aligned}
&Y=D\left(Y^D, r-\pi, A\right)+G;\ \ 0<D_1<1;\ \ D_2<0;\ \ D_3>0;\\
&Y^D=Y-T+rb-\pi A;\\
&A=m+b;\\
&m=L(Y, r, A);\ \ L_1>0;\ \ L_2<0;\ \ L_3>0;\\
&p=\pi+\alpha(Y-\overline{Y});\ \ \alpha>0;\\
&\dot{\pi}=a(p-\pi);\ \ a>0;\\
&\dot{A}=(G-T)+rb-pA.
\end{aligned} \qquad (15.20)$$

Розгляньмо на вербальному (інтуїтивному) рівні структуру даної моделі, котра синтезована в працях Т. Сарджента[1] і С. Тарновського[2].

Система (15.20) складається зі статичного блоку, котрий за умови сумісності дозволяє обчислити значення в точці рівноваги п’ятьох функцій: Y, Y^D, r, p, а також m чи b (відповідно до обраної

---

[1] *Sargent T*. Macroeconomic Theory. — N.Y. Academic Press, 1987.
[2] *Tarnovsky S*. Methods of Macroeconomic Dynamics // The MIT Press, 1995.

політики фінансування державного бюджету), котрі залежать від параметрів системи. Реакції макроекономіки на зміни параметрів системи наведені в таблиці 15.1, де символ «?» означає невизначеність знака відповідної похідної.

Таблиця 15.1

КОРОТКОТЕРМІНОВІ МАКРОЕКОНОМІЧНІ ЕФЕКТИ

Показник	∂Y	∂r	∂p
∂G	> 0	> 0	> 0
$\partial \overline{m}$	?	< 0	?
$\partial \pi$	> 0	> 0	≥ 1
∂A	?	> 0	?

Таблиця 15.1 дає цікаву інформацію щодо реакції макроекономіки на зміну урядових витрат, багатства, очікувань і грошової маси, аналіз котрих розширює наші уявлення про можливу поведінку макроекономіки в короткотерміновому періоді. Цей аналіз може бути використаний для генерування політики й обрання однієї з них на підставі використання концепції теорії гри з урахуванням ризику тощо.

Динаміка макроекономіки подана в (15.20) двома останніми рівняннями для інфляційних очікувань і накопичення приватного багатства, котрі є, власне, звичайними диференціальними неоднномірними рівняннями. Ці рівняння, однак, суттєво нелінійні, оскільки їхня структура задана функціями, що залежать від фазових координат системи $r(\pi, A)$ і $p(\pi, A)$, а також від інших параметрів. Зовнішній вплив чи управління визначаються обранням політики щодо фінансування державного бюджету. Для приватного багатства, що подається в (15.3), такими політиками може слугувати фінансування бюджетного дефіциту або за рахунок боргових зобов'язань, або за рахунок грошової емісії. Формально перша політика подана через апріорну фіксацію («номінальний якір») грошової маси в реальному вираженні $m = \overline{m} = \text{const}$, тимчасом як друга — реальної вартості державного боргу $b = \overline{b} = \text{const}$.

Можуть задаватися й інші формально рівноправні номінальні якорі, котрі визначають різні макроекономічні політики.

Структура динамічної моделі дає змогу досліджувати її як систему диференціальних рівнянь, залежних від параметрів.

У зв'язку з нелінійністю системи (15.20) досліджувати її поведінку зручно, попередньо здійснивши лінеаризацію в точці $(\overline{\pi},\ \overline{A})$, тобто редукувавши до лінійної системи, що має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \dot{\pi} \\ \dot{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{\pi}}{\partial \pi} & \dfrac{\partial \dot{\pi}}{\partial A} \\ \dfrac{\partial \dot{A}}{\partial \pi} & \dfrac{\partial \dot{A}}{\partial A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi - \dot{\pi} \\ A - \overline{A} \end{pmatrix}. \qquad (15.21)$$

Для обчислення коефіцієнтів матриці лінеаризованої системи використовують значення реакцій макроекономіки, наведені в таблиці 2.1. Аналіз структури матриці переходу системи (15.21) дозволяє зробити висновок щодо нестійкості макроекономічної динаміки в загальному випадку. Обчислення коефіцієнтів матриці переходу в точці рівноваги показує невід'ємність її сліду через додатність першого коефіцієнта, що знаходиться на головній діагоналі. Умова $\left(\dfrac{dp}{d\pi} - 1\right) \geq 0$ була встановлена в аналізі кривої Філіпса. Для перехідної економіки, зокрема, можна очікувати виникнення власних значень матриці з уявними частинами (через допустимість того, що $D_2 = 0$). З економічного погляду це означає, що в загальному випадку фінансування бюджетного дефіциту тягне за собою зростання державного боргу, котрий неможливо редукувати до стаціонарного стану.

Прямий аналіз коренів характеристичного рівня, що відповідає даній системі, дуже складний, оскільки аналітичний вигляд коренів громіздкий.

Скористаймось економічними міркуваннями. Нехай система (15.20) перебуває в стаціонарному стані: $\dot{\pi} = \dot{A} = 0$. Якщо державний бюджет зводиться з дефіцитом, то система виводиться зі стаціонарного стану. Бюджетний дефіцит стимулює виробництво, котре зростає разом із відсотком і фактичною інфляцією. Підвищення рівня фактичної інфляції сприяє зростанню інфляційних очікувань, що ще більшою мірою прискорює інфляційний процес. Розміщення урядом нових боргів на відкритому ринку сприяє накопиченню приватного багатства. Усі ці процеси мають яскраво виражений нестійкий характер. Водночас зростання фактичної інфляції підвищує інфляційний податок і ставку номінального відсотка, і якщо ефекти досить великі, то в принципі можна вести мову про стійкість макроекономічної динаміки. Це можна проілюструвати на матриці лінеаризованої системи.

15.8. АНАЛІЗ КОРОТКОТЕРМІНОВИХ ЕКОНОМІЧНИХ ЕФЕКТІВ

Аналіз статичної підсистеми системи (15.20) дозволяє використовувати способи, що описані у попередньому матеріалі, обчислити реакції макроекономіки на зміни параметрів та в обранні політики. Принципова методологія аналізу статистичної підмоделі не змінюється, як і в попередньому, обчислюються різні мультиплікатори системи. Однак для економічного аналізу можна отримати низку нових результатів, які дозволяють з більш широких позицій розглянути якісний зміст економічних процесів. Після відповідних підстановок статичний блок моделі можна описати такими рівняннями:

$$\begin{aligned} &Y = D(Y - T + r(A - \overline{m}) - \pi A, r - \pi, A) + G; \\ &\overline{m} = L(Y, r, A); \\ &p = \pi + \alpha(Y - \overline{Y}). \end{aligned} \tag{15.22}$$

«Номінальний якір» задається через боргове фінансування бюджетного дефіциту, а тому нейтральна монетарна політика, що зберігає незмінною вартість реальних грошей $m = \overline{m}$, стає одним із параметрів моделі. Зазначимо, що фактична політика може й не бути нейтральною, а бути або стимулюючою, або обмежуючою. У малому околі точки рівноваги цієї системи існують три функції, що залежать від параметрів:

$$\begin{aligned} &Y^* = Y^*(\overline{m}, \overline{Y}, G, T, A, \pi, \alpha), \\ &r^* = r^*(\overline{m}, \overline{Y}, G, T, A, \pi, \alpha), \\ &p^* = p^*(\overline{m}, \overline{Y}, G, T, A, \pi, \alpha), \end{aligned} \tag{15.23}$$

котрі характеризують значення фактичного доходу, ставки відсотка та інфляції залежно від монетарної політики, чинників пропозиції, бюджету, багатства, очікувань і структури системи. Обчислимо, наприклад, макроекономічні наслідки заохочуючої монетарної політики, тобто транспонований вектор мультиплікаторів $\left(Y^*_{\overline{m}}, r^*_{\overline{m}}, p^*_{\overline{m}}\right)'$, значення котрого можна відшукати з розв'язку системи рівнянь:

$$\begin{bmatrix} 1 - D_1 & -D_r & 0 \\ -L_1 & -L_2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y^*_{\overline{m}} \\ r^*_{\overline{m}} \\ p^*_{\overline{m}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1 r \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{15.24}$$

Оскільки визначник цієї системи завжди додатний (легко в цьому пересвідчитися), то знак першого мультиплікатора в загальному випадку не визначений:

$$Y^*_{\overline{m}} \equiv \frac{\partial Y^*}{\partial \overline{m}} = [L_2 D_1 r - D_r] \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0 .$$

Розміщення пропозиції не завжди реалізує стимулюючий ефект на виробництво. Монетарна політика приводить до розширення виробництва лише тоді, коли збільшення грошової маси викличе інфляційні наслідки, що визначається за допомогою функції Філіпса, розглянутої дещо раніше. З іншого боку, коли виробництво абсолютно не еластичне щодо цін, то політика «легких грошей» нерезультативна. Якщо ж, як це спостерігається в перехідній економіці, виробництво не еластичне, то така політика призводить до скорочення виробництва. Цей висновок може послуговувати, зокрема, теоретичним обґрунтуванням феномену одночасного спаду виробництва та посиленої емісії грошей, що було в економіці України протягом перших років незалежності.

Вплив зростання грошової маси на рівноважну ставку відсотка має цілком канонічний характер — вона знижується у міру зростання пропозиції грошей. Це видно зі знака відповідного мультиплікатора:

$$r^*_{\overline{m}} = \frac{\partial r^*}{\partial \overline{m}} = [-(1 - D_1) - L_1 D_1 r] < 0.$$

Цікавим є й результат щодо впливу грошової маси на інфляцію. Знак мультиплікатора

$$p^*_{\overline{m}} = \frac{\partial p^*}{\partial \overline{m}} = \alpha [L_2 D_1 r - D_r] \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0$$

не визначений у загальному випадку. Попри побутові та стандартні уявлення збільшення грошової маси в короткотерміновому періоді не обов’язково тягне за собою інфляційні наслідки. Інфляція посилюватиметься залежно від обсягів зростання грошової маси, якщо знак монетарної політики буде невід’ємним. Власне, цей випадок детально описаний у підручниках з макроекономіки. У двох інших випадках, однак, додаткова емісія грошей може не мати інфляційних наслідків.

Наприклад, $p_{\overline{m}}^{*} < 0$, якщо зростання пропозиції грошей відбувається за абсолютної еластичності кривої агрегованої пропозиції або за зростаючого оптимізму бізнесових кіл і населення, що зміщує криву агрегованої пропозиції праворуч і зменшує інфляцію.

Для економіки перехідного періоду велике значення має те, що ринок грошей у ній постійно не збалансований, свідченням чого є прояв хронічних неплатежів і бартеру. Зрозуміло, що залежно від ступеня розбалансованості попиту й пропозиції грошей збільшення пропозиції грошей може як мати, так і не мати інфляційних наслідків. Практичне значення даного висновку, на наш погляд, важко переоцінити. Важливо лише, щоб уряд співпрацював із грамотними спеціалістами-аналітиками, щоб здійснювався моніторинг макроекономічних показників, а на підставі цього — раціональна, гнучка макроекономічна політика. Це забезпечить розвиток економіки, не вдаючись до великих зовнішніх запозичень та інших «плачів Ярославни».

Зазначимо також, що інфляційні очікування мають надзвичайно сильний вплив на поведінку системи. Тому співпраця уряду, парламенту та Президента на благо українського суспільства може дати величезний імпульс для економічного зростання.

У розглядуваній моделі макроекономіка реагує на зміну очікувань дуже сильно: похідна $\frac{\partial p}{\partial \pi} \geq 1$. Такий результат легко отримати з розв'язку системи рівнянь:

$$\begin{bmatrix} (1-D_1) & -D_r & 0 \\ -L_1 & -L_2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y_\pi^* \\ r_\pi^* \\ p_\pi^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_\pi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (15.25)$$

Для цієї системи вплив інфляційних очікувань на фактичну інфляцію визначається як

$$\frac{\partial p^*}{\partial \pi} = 1 - \frac{\alpha L_2 D_\pi}{\det J} \geq 1,$$

оскільки $L_2 < 0$, а $\alpha > 0$, $\det J > 0$, окрім цього, оскільки, особливо для перехідної економіки, є допустимим, щоб $D_2 = 0$, то $D\pi =$ $= -[D_1 A + D_2] > 0$.

Отже, якщо інфляційні очікування зростають, то інфляція нарощується лавиноподібно, підтверджуючи їхню властивість збуватися.

15.9. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Модель детермінованої динаміки Сарджента—Тарновського.
2. Основні блоки моделі аналізу нелінійних динамічних систем.
3. Рівняння рівноваги ринку грошей.
4. Сутність поняття «номінальний якір».
5. Умова незалежності фіскальної та монетарної політик, її сутність.
6. Пояснити економічні гіпотези, на котрих ґрунтується дослідження реального ринку.
7. Сутність функції агрегованого попиту.
8. Сутність підходу до аналізу моделі агрегованої пропозиції.
9. Динаміка очікувань, основні гіпотези.
10. Основні характеристики якісного аналізу короткотермінових макроекономічних ефектів.
11. Основні мультиплікатори, що їх використовують в аналізі короткотермінових макроекономічних ефектів. Вплив інфляційних очікувань на фактичну інфляцію.
12. Дати економічний аналіз співвідношень класичної та кейнсіанської гіпотез щодо агрегованої пропозиції.
13. Провести економічний аналіз основних чинників, що впливають на процес економічної динаміки.
14. Пояснити економічний зміст аналізу стаціонарних станів макроекономічної системи.

15.10. Теми рефератів

1. Сутність та гіпотези редукції фінансового ринку до ринку грошей за Дж. Тобіном.
2. Стаціонарний стан макроекономіки за моделлю Сарджента—Тарновського.
3. Номінальні та реальні обмінні курси.
4. Модель обмінного курсу для перехідної економіки.
5. Адекватні стаціонарні та нестаціонарні очікування.
6. Зміни раціональних очікувань у перехідній економіці.
7. Інформаційний зміст цін та конкуренція.
8. Інфляційний податок і дефіцит.
9. Інфляційний податок у перехідній економіці.
10. Біфуркація діаграми інфляційних ситуацій.

11. Класифікація інфляційних режимів у перехідній економіці.
12. Монетарна політика та стабілізація.
13. Біфуркація монетарної системи в разі високої інфляції.
14. Взаємодія конкуренції та інфляції.

15.11. Завдання для самостійної роботи

1. *Гіпотеза «перманентного доходу» М. Фрідмена*. Нехай динаміка агрегованого споживання задана дискретним детермінованим процесом (c_t, t = 1, 2, …, T) і сукупний споживач, діючи раціонально, максимізує корисність у кожен момент часу t: $\max U(c_t)$ за умови:

$$\sum_{t=1}^{T} c_t \le \sum_{t=1}^{T} Y_t,$$

де Y_t — вироблений дохід. За гіпотез ненасичення (споживач прагне отримати більший обсяг споживання), точного передбачення та відсутності дисконтування показати, що:

а) оптимальні значення обсягів споживання у різні моменти дорівнюють:

$$c_1^* = c_2^* = ... = c_T^* = c^*;$$

б) оптимальний обсяг споживання дорівнює:

$$c^* = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t;$$

в) реакція раціонального споживача у кожен момент (наприклад, зберігати $S_t = Y - c^*$) залежить від потоку доходу в майбутньому.

(Вказівка: скласти функцію Лагранжа й продиференціювати її по кожному значенню c_t.)

2. Для рівняння рівноваги на реальному ринку

$$Y = D(Y^D,\ r - \pi,\ A) + G,\ \ 0 < D_1 < 1;\ \ \ D_2 < 0;\ \ \ D_3 > 0$$

і доходу до розпорядження $Y^D = Y - T + rb - \pi A$ обчислити такі значення:

а) чутливість приватного попиту до зміни ставки відсотка D_r. Показати, що її знак залежить від співвідношення «ефекту доходу» та «ефекту заміщення»;

б) чутливість приватного попиту до зміни активів D_A^b і D_A^m. Показати, що їх вигляд залежить від «номінального якоря», тобто умови або $m = \overline{m} = \text{const}$, або $b = \overline{b} = \text{const}$, а знак — від співвідношення «ефекту доходу» й «ефекту заміщення».

3. Нехай портфель активів заданий виразом:

$$A = \frac{1}{p}\left(M + p_b\, B + p_k\, K\right),$$

де p_k — ціна одиниці фізичного капіталу; p_b — ціна одиниці фінансового активу, а B, K — обсяги відповідно фінансових і фізичних активів.

Ставка дохідності фізичного капіталу подається рівнянням:

$$r_k = \frac{p}{p_k}\frac{\partial Y}{\partial K} \equiv \frac{pR}{p_k},$$

де $R \equiv MCR \equiv \frac{\partial Y}{\partial K}$ — граничний продукт капіталу.

Потрібно показати, що вартість компоненти портфеля, що складається з фізичного капіталу (компонента), не залежить від ціни одиниці фізичного капіталу.

4. Показати, що залежність номінальної пропозиції грошей від ставки відсотка $M(r)$ не змінює якісної картини рівноваги грошового ринку, чи, іншими словами, кут нахилу кривої LM зменшується порівняно зі стандартним випадком незалежності номінальної пропозиції грошей від ставки відсотка. Побудувати графіки цих кривих.

(Вказівка: необхідно скористатися рівнянням рівноваги грошового ринку.)

5. Обчислити чутливість агрегованого попиту до зміни цін для гіпотези доходу до розпорядження:

$$Y^D = Y - T + r\frac{(M+\overline{B})}{p} - \pi\frac{(M+\overline{B})}{p}$$

і «номінального якоря»: $B = \overline{B} = \mathrm{const}$.

Показати, що $\frac{\partial Y^*}{\partial p} < 0$, тобто крива агрегованого попиту має стандартний вигляд за умов:

$$D^1 < 0;$$
$$D^1 = \left[D_A^m \frac{M+\overline{B}}{p^2} - D_1 r \frac{\overline{B}}{p^2} \right] \text{ і}$$
$$D_A^m > 0, \text{ а також } M^1 > 0;$$
$$M^1 = [M - L_3(M+\overline{B})].$$

(Вказівка: необхідно скористатися рівнянням рівноваги реального ринку.)

6. Для статичного блоку макроекономічної моделі Сарджента—Тарновського обчислити чутливість точки рівноваги до зміни інфляційних очікувань Y_π^*, r_π^*, p_π^* і пояснити їхній економічний зміст.

(Вказівка: для рівноважних значень функції доходу, відсотка та інфляції треба продиференціювати за відповідним параметром рівняння (15.22).)

16 РОЗДІЛ

ДИНАМІКА ДЕРЖАВНОГО БОРГУ ТА СЕНЬЙОРАЖУ

16.1. РИНКОВА СТАВКА ВІДСОТКА

Один із найважливіших інструментів макроекономічного аналізу, що широко використовується на сучасних ринках як товарів, так і грошей, — це ставка відсотка. Ставка відсотка, чи дохідність цінного папера, визначається ринком, де діють приватні інвестори та кредитори. Реальна ефективність інвестицій (внутрішня норма віддачі капіталовкладень) лежить в основі поняття ринкової ставки відсотка, але не тотожна їй.

Коли інвестор вирішує придбати якийсь актив, тобто благо, що приноситиме потік доходів у майбутньому, то його інвестиції тотожні скороченню поточного споживання. Інвестор відкладає певну суму грошей від поточного споживання заради отримання деякого доходу в майбутньому, обсяг котрого, взагалі кажучи, точно невідомий у момент прийняття рішення.

Раціонально діючий інвестор завжди вимагає компенсації витрат, які він об'єктивно несе у термін, протягом якого його кошти задіяні в інвестиціях. Це компенсація можливих витрат доходу через інфляцію, зв'язування засобів у даному виді інвестицій, а також наявність ризиків, викликаних невизначеністю майбутнього, котрі впливають як на обсяги, так і на терміни очікуваного доходу. Власник активу (емітент цінного папера) повинен бути готовим компенсувати інвесторові його час і ризик, бо в протилежному разі ніхто не купуватиме даний актив.

Компенсація інвесторові відбувається як у формі доходу від інвестицій (відсоток з депозиту, купонний дохід з облігацій, дивіденди з акцій, рентний дохід з нерухомості тощо), так і через зміну вартості придбаного активу.

Вважатимемо, що r — це ставка безризикової дохідності по депозиту в надійному комерційному банку. Альтернативним представником такої самої безризикової короткотермінової дохідності послуговує дохідність (дисконтна) державних тримісячних векселів. Досить поширеним «представником» ринкової ставки відсотка є величина дохідності тримісячних облігацій (T-bills) скарбниці США, які вважаються високоліквідним і практично безризиковим фінансовим інструментом. Отже, економічний сенс ставки відсотка полягає в тому, що вона є ціною часу й ризику.

Ставка відсотка відбиває вимоги інвестора щодо дохідності альтернативних вкладень, не обов'язково щодо ефективності проектів у реальному секторі економіки, а будь-якого придбання на фінансовому ринку активів, що приносять дохід. Тобто ринок, у принципі, гарантує будь-якому інвесторові отримання (без ризику) доходу за ставкою надійного комерційного банку. Отримання вищого доходу, взагалі кажучи, також є можливим, але це пов'язане з невизначеністю та ризиком. Останній може компенсуватися за рахунок більш високої дохідності обтяжених ризиком інвестицій порівняно з безризиковою ставкою відсотка. Тому номінальна ставка відсотка (чи дохідність) r складається з низки компонент, які відображають реальну ефективність вкладень $\widehat{r}$, вплив очікуваної інфляції π, вплив ризику σ і терміну зв'язування інвестицій l:

$$r = \widehat{r} + \pi + \sigma + l.$$

Зрозуміло, що інвестиції можуть вкладатися на різний термін, приносити дохід не лише в кінці періоду інвестування, а й протягом цього періоду чи неперервно. Якщо дохід за облігаціями нараховується лише в кінці періоду, то такі облігації мають нульовий купон і продаються з дисконтом. Це означає, що власник активу заробляє на різниці між номіналом і ціною надбання (дисконтною) активу. З іншого боку, купонний дохід сплачується періодично, як правило, двічі на рік, а теоретично може перераховуватися неперервно.

Цінні папери (фінансові інструменти) з періодом обігу до року відповідають інструментам грошового ринку. Коли термін дії фінансових інструментів більший за один рік, то вони (облігації, акції) вважаються інструментами ринку капіталів. Облігації звичайно мають фіксовані терміни погашення, але існують і безстрокові облігації — консолі. Акції теоретично мають нескінченний термін дії.

Сучасні фінансові ринки пропонують величезне різноманіття як основних (акції, облігації), так і похідних (фінансові деривативи) фінансових інструментів. Ринок деривативів (опціонів, свопів тощо) бурхливо розвивається. Компактний розгляд механізмів функціонування сучасних фінансових ринків подано у низці праць[1], присвячених цій проблематиці.

---

[1] *Blake D.* Financial Market Analysis // McGirow Hill Book Company, 1990.

16.2. СТАВКА ВІДСОТКА ТА ДИСКОНТУВАННЯ

Ринкова ставка відсотка, регулюючи вартість кредиту, визначає й ринкові вимоги щодо величини дохідності капіталовкладень і попиту на них

$$I = I(r).$$

Наведемо приклад. Припустимо, що деяка компанія вирішує придбати 4 одиниці нового устаткування для його використання. Для цього вона бере позичку в 50 тис. грн для придбання кожної одиниці обладнання за ринковою ставкою 5 % щомісяця. Перша одиниця обладнання дає ефект 10 % (5 тис. грн), друга — 8, третя — 5, а четверта — 3 %, тобто 1,5 тис. грн протягом місяця. Припускаємо для спрощення, що для кредиту інтервал часу обмежено одним місяцем, його обсяг не впливає на ставку й усі витрати компанії покриваються за рахунок позички.

За умов цього прикладу для фірми є доцільним придбати лише перші три одиниці обладнання, котрі дають можливість перекрити кредит, що його взято за ринковою ставкою відсотка. Отже, ринковий відсоток — це критерій ефективності щодо здійснення інвестицій, що ілюструє рис. 16.1.

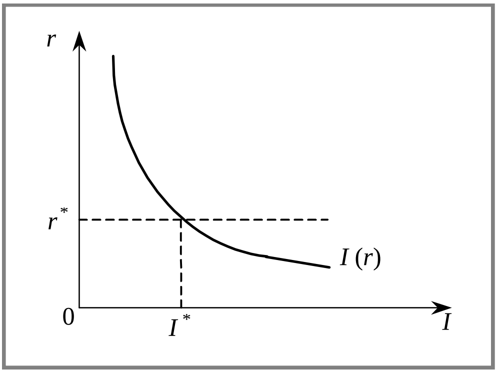


Рис. 16.1. Інвестиції та норми відсотка

Підвищення ринкової норми відсотка (ставка банківського кредиту) підвищує вимоги до інвестиційних проектів, скорочує обсяги капіталовкладень, і навпаки.

Можна стверджувати, що ринкова норма (ставка) відсотка r — це величина, яка визначає залежність поточної ціни V_t фінансового чи реального активу й дохідність його V_{t+1}.

Для дискретного детермінованого процесу зміни в часі вартості активу існує проста залежність між поточною вартістю активу $V = V_t$, отримуваним доходом V_{t+1} і (постійною) ринковою чи ефективною ставкою відсотка r:

$$(1+r)V_t = V_{t+1}. \tag{16.1}$$

Сутність цієї формули досить проста: якщо певна сума коштів (грошей) V_t віддається в борг (інвестується в момент часу t), наприклад, на рік під r відсотків, що нараховуються одноразово, скажімо, під кінець року, то в момент $(t + 1)$ ця сума дорівнюватиме V_{t+1} гривень. Така операція інвестування має й інший еквівалентний сенс. Можна вести мову про те, що в поточний момент часу t інвестор «купує» майбутній дохід V_{t+1}, якщо він є відомим (його обсяг), за поточною ціною V_t гривень за умови, що альтернативні вкладення, наприклад купівля T-bills чи придбання грошового депозиту в найближчому банку, принесе йому такий самий дохід за ринковою (ефективною) ставкою відсотка r. Зазначене вище дає можливість переписати (16.1) у вигляді формули:

$$V_t = \frac{1}{(1+r)} V_{t+1},$$

яка має сенс для відомої (очікуваної) величини майбутнього доходу. Вона встановлює зв'язок між відомим і фіксованим майбутнім доходом V_{t+1}, ринковою ставкою відсотка r і поточною ціною активу V_t. Згідно з цією формулою майбутній дохід дисконтується чи приводиться за допомогою ринкової ставки відсотка до величини поточної вартості активу.

16.3. УМОВА АРБІТРАЖУ ТА ЕФЕКТИВНИЙ РИНОК

У теоретичних дослідженнях буває зручнішим користуватися не дискретними, а неперервними моделями, котрі, як правило, є менш громіздкими. Для неперервного детермінованого процесу зміни вартості активу $V(t)$ часовий інтервал береться дуже коротким (нескінченно малим) dt, протягом якого інвестор може здійснювати вибір між вкладеннями в даний актив і доходом по депозиту. Нехай придбання даного активу (рішення приймається в момент (точці) часу t) дає інвесторові право на періодично отримуваний (купонний) дохід $C(t)$, а також на отримання доходу від приросту нескінченно малої капітальної вартості активу в кінці розглядуваного періоду (dV). Інвестор здійснить вкладення коштів у придбання активу, якщо сумарна дохідність від інвестицій, тобто купонний дохід і приріст вартості активу, буде бодай не меншою, ніж дохід, гарантований даним станом ринку, наприклад від грошового депозиту того самого обсягу в надійному комерційному банку $rV(t)dt$. Оскільки майже завжди можна припускати виконання умови ненасичення, тобто раціональний інвестор завжди воліє мати якомога більший дохід (за допустимого ступеня ризику), то нерівність можна замінити на рівняння:

$$rV(t)dt = C(t)dt + dV \tag{16.2}$$

за відомої величини купонного доходу $C(t)$ та ринкової ставки відсотка r. Рівняння (16.2), як заведено говорити, відображає умову відсутності арбітражного прибутку (no-arbitrage conditions), відіграє важливу роль у сучасній економічній і фінансовій теорії й уважається виконуваним на ефективних ринках.

У рівнянні (16.2) ліворуч стоїть величина, котра визначає вимоги інвестора щодо дохідності даного активу відповідно до ринкової ставки відсотка, праворуч — сума поточного доходу для облігації (чи дивіденду для акції) і приросту капітальної вартості активу за нескінченно малий період часу dt. Таким чином, інвестор обере даний актив (інвестує в нього) в тому разі, якщо його дохід буде не вищим і не нижчим за дохідність будь-якого іншого активу за ставкою ринкового відсотка $r > 0$. У протилежному випадку можливим є арбітраж, тобто отримання додаткового доходу за рахунок простого перерозподілу коштів, ресурсів. У випадку економічної рівноваги такі можливості відсутні, оскільки вибір є оптимальним, а тому сенс рівняння (16.2) полягає в описі умов економічної рівноваги, чи no-arbitrage conditions.

Відсутність умов арбітражу на ефективному ринку (16.2) можна проілюструвати з огляду на такі міркування. Припустимо протилежне: наприклад, дохід від даних вкладень (придбання даного активу) дещо вищий від ринкового, тобто має місце нерівність:

$$rV(t)dt < [C(t)dt + dV].$$

У цьому випадку раціонально діючий інвестор братиме позичку в банку за ринковою ставкою, якщо припустити існування такої можливості, та вкладатиме їх у даний актив, отже, зароблятиме на експлуатації ринкової недосконалості.

Однак, навіть якщо така можливість існує, то навряд чи вона існує досить тривалий час, оскільки в умовах вільної конкуренції збільшення заявок на позички примусить банки підвищити відсоток, а збільшення попиту на певний актив спричиниться до підвищення його ціни, знизивши тим самим його дохідність. Можна припустити, що ці процеси відбуватимуться доти, доки не встановиться рівняння (16.2). Навпаки, за нерівності

$$rV(t)dt > [C(t)dt + dV]$$

відсутність попиту на певний вид інвестицій приведе до зниження їхньої ціни, отже, і привабливості для інвесторів, тимчасом як численні депозити потягнуть за собою зниження банківського відсотка. Отже, розглянуті ситуації матимуть місце до встановлення тенденції ринкової рівноваги.

Таким чином, на ефективному ринку досконала конкуренція веде до вирівнювання «стандартної дохідності» й до ринкового відсотка. Відсутність умов арбітражу вважається надзвичайно важливою характеристикою ефективного ринку, котра означає, що безкоштовно ринок нічого не дає, а будь-яка можливість, що її надає ринок, обов'язково має свою ціну, котру треба сплачувати. Гіпотеза щодо ефективного ринку має важливе значення для сучасної теорії фінансів, а її адаптація для макроекономічних процесів значною мірою сприяє формуванню гіпотези раціональних очікувань і побудові моделі неокласичної рівноваги.

16.4. РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ АРБІТРАЖУ

Розгляньмо умову відсутності арбітражу (16.2) з формального погляду, тобто як рівняння, розв'язки котрого потрібно відшукати. Нехай ставка дохідності й купонний дохід є відомими функціями від часу, і рівняння (16.2) записане у вигляді:

$$\frac{dV}{dt} = r(t)V(t) - C(t). \qquad (16.3)$$

Загальний розв'язок звичайного неоднорідного диференційного рівняння першого порядку (16.3) можна відшукати, зокрема, методом варіації довільної константи у вигляді

$$V(t) = A(t)\exp\{R(t)\}, \qquad (16.4)$$

де $A(t)$ — невідома постійна, що є функцією часу, а $R(t) = \int_0^t r(\tau)d\tau$.

Диференціюючи (16.4) та підставляючи результати у (16.3), знайдемо за заданих поточних умов $V(0) = V_0$ загальний розв'язок рівняння арбітражу у вигляді:

$$V(t)=\exp\{R(t)\}\left[V_0-\int_0^t C(\tau)\exp\{-R(\tau-t)\}\,dt\right]. \qquad (16.5)$$

Відшуканий розв’язок є ніби «поглядом у майбутнє»: вартість активу в будь-який момент майбутнього визначається як зміна початкових умов (початкової вартості активу) під впливом ставки відсотка й купонних сплат. Економічний сенс розв’язку є досить прозорим: у майбутньому вартість активу зростає відповідно до ставки відсотка, а обсяги купонних сплат майбутню вартість активу зменшують.

Зазначимо, що для багатьох економічних процесів зручніше припустити відомими значення процесу не в початковий момент часу, а в кінцевий $t = T$.

Вартість активу може бути заданою умовами контракту на деякий кінцевий момент часу в майбутньому, наприклад, як вартість боргу (сума, що взята в борг разом з відсотками) $V(T) = V_T$. У цьому випадку розв’язок (16.3) відшукують немовби з кінця, як «погляд у минуле», за відомого кінцевого значення процесу. Підстановкою $t' = T - t$ рівняння арбітражу зводиться до вигляду:

$$\frac{dV}{dt'}=-r(t')V(t')+C(t') \qquad (16.6)$$

і означає, що протягом нескінченно малого періоду часу dt вартість боргу, котра в кінці нього дорівнює величині V_t, зменшується на величину $r(t')V(t')\,dt'$ за відсутності арбітражного прибутку. Розв’язок (16.6) відшукується аналогічним способом варіації довільної змінної, який приводить до знаходження функції

$$V(t')=\exp\{-R(t')\}\left[V_T+\int_0^{t'} C(\tau)\exp\{R(\tau-t')\}d\tau\right]. \qquad (16.7)$$

Зокрема, за постійних значень купонного доходу $C(t') = C$ і ставки відсотка $r(t') = r$ отримаємо

$$V(t')=\left[V_T-\frac{1}{r}C\right]\exp\{-rt'\}+\frac{1}{r}C.$$

Розв’язок (16.7) показує, що поточна ринкова вартість боргу являє собою дисконтовану за ставкою відсотка величину вартості боргу, скориговану на величину дисконтованої вартості купонних сплат.

16.5. РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ СУСПІЛЬНОГО БОРГУ

Ринок державних цінних паперів в умовах перехідної економіки суттєво відрізняється від відповідного сегмента фінансового ринку в країнах вільної конкуренції.

Зазначимо, що в загальному випадку спроможність держави щодо реалізації свого права монополіста в умовах розвинутого фінансового ринку суттєво обмежена кількома чинниками.

По-перше, частка державного сегмента ринку боргів хоч і суттєва, але порівнянна з часткою приватних боргів.

По-друге, місткість ринку акцій приблизно дорівнює місткості ринку сукупних боргів, і ясно, що держава не може безпосередньо впливати на формування дохідності акцій.

По-третє, практично неможливо ізолювати зовнішню компоненту боргів, оскільки на сучасному дерегульованому фінансовому ринку резиденти й нерезиденти діють практично в рівних умовах. Отже, чинники дохідності формуються й визначаються ринком спільно, а відмінності в доходах залежать лише від відмінності між конкретними інструментами, особливостей оподаткування й ринкової вартості ризику.

Зазначимо, що різка асиметрія фінансового ринку в перехідний період полягає у практично повній відсутності ринку приватних боргів і закладених, а також слаборозвинутих ринках кредитів і акцій та у суттєвих обмеженнях на діяльність нерезидентів. Домінування сегмента державних цінних паперів має своїм наслідком яскраво виражений ринок продавця, в ролі котрого уряд диктує ціну чи дохідність облігацій, визначаючи не лише пропозицію, а й впливаючи на формування попиту на борги.

Зазначені особливості фінансового ринку в перехідний період покладені в підґрунтя моделі поведінки уряду й приватних інвесторів на ринку державних боргів.

Розгляньмо спрощену детерміновану ситуацію фінансування державного боргу та бюджетного дефіциту. Не розрізнятимемо також внутрішні та зовнішні борги, не розглядатимемо й існування приватного боргу. Обсяг державного боргу розглядатимемо як облігації, що гарантують отримання (наближено) майже безризикового доходу протягом теоретично нескінченного періоду часу. Попит на борги визначається (наближено) лише залежно від їхньої дохідності, ігнорується можливість використання короткотермінових боргів як субститутів грошей.

Розглянуте в попередніх розділах рівняння зростання суспільного боргу чи приватного багатства має в номінальних термінах вигляд:

$$\dot{M} + \dot{B} = P(G - T) + RB, \tag{16.8}$$

де $\dot{M} \equiv \frac{d}{dt} M(t)$ — обсяг сеньйоражу чи емісії грошей у номінальному вираженні; $\dot{B} \equiv \frac{d}{dt} B(t)$ — обсяг додаткового розміщення на вільному ринку державних боргових зобов'язань; $P(G - T)$ — дефіцит державного бюджету в номінальному вираженні; G — бюджетні витрати в реальному вираженні; T — реальні податки, що не змінюють обсягів випуску; RB — обсяг обслуговування державного боргу за ставкою номінального відсотка $R > 0$.

Якщо ввести змінні щодо реальних значень грошових балансів $m = \frac{M}{P}$ і реальної вартості боргу $b = \frac{B}{P}$, вважаючи їх диференційованими функціями часу, то рівняння (16.8) перепишеться як

$$\dot{b} = rb - S + (G - T), \tag{16.9}$$

де $S = \frac{\dot{M}}{P}$ — обсяг реального сеньйоражу; $r = R - \pi$ — реальна безризикова ставка відсотка за державними борговими зобов'язаннями; $\pi \equiv \frac{\dot{P}}{P}$ — темпи фактичної інфляції чи інфляційних очікувань.

З одного боку, держава постає як монопольний емітент боргових зобов'язань — грошей (боргів з від'ємною нормою реальної дохідності, що дорівнює темпу інфляції) й облігацій (боргів у власному значенні, з додатною нормою реальної дохідності (хоча в окремі періоди реальна дохідність може набувати від'ємних значень). Ці останні ситуації тут не розглядаються. З іншого боку, сукупність великої кількості приватних інвесторів конкурує на фінансовому ринку, формуючи попит на державний борг.

Приватні інвестори формують свої портфелі з реальних грошових балансів і негрошових активів, у даному випадку державних облігацій. Однак простий портфельний підхід непридатний до даної ситуації, оскільки абсолютно нераціонально набувати активи з від'ємною дохідністю. Отже, необхідно пояснити проблему «ліквідності», наприклад, через включення змінної грошей у функцію корисності типового інвестора.

16.6. ЗАГАЛЬНІ УМОВИ СТАБІЛІЗАЦІЇ ДЕРЖАВНОГО БОРГУ

Аналіз рівняння (16.9) показує, зокрема, що коли монетарні інструменти не використовуються ($S = 0$), то стабілізація державного боргу може забезпечуватися лише проведенням послідовної чи збалансованої бюджетної політики, яку можна подати такою умовою:

$$b(t) + \int_t^{\infty} G(\tau)\exp[-r(\tau - t)]d\tau = \int_t^{\infty} T(\tau)\exp[-r(\tau - t)]\,d\tau. \quad (16.10)$$

Тут ідеться про те, що сплата боргів і фінансування поточних урядових витрат можливі лише тоді, коли потік приведеної вартості майбутніх податків не менший від потоку витрат. Теоретичні аспекти цієї проблеми ретельно досліджені С. Тарновським[1].

Зазначимо, що припущення щодо можливості нульового сеньйоражу вимагає фінансування операційного дефіциту, тобто суми поточного дефіциту й обслуговування боргу цілком за рахунок розміщення нових боргів на вільному ринку.

Така ситуація може бути правдоподібною лише за умови високої кредитоспроможності уряду, відносно невеликих обсягів його боргів і частки дефіциту у ВВП країни. У більш загальних ситуаціях держава, очевидно, не може нехтувати монетарними інструментами для фінансування своїх витрат, зокрема, для обслуговування накопиченого боргу. У перехідний період держава, власне, і не здатна на таке внаслідок як значних масштабів фінансування дефіциту, так і нерозвинутості фінансового ринку та обмеженої довіри до її політики.

Спільне використання емісії грошей і боргів як джерела фінансування дефіциту приводить до двох важливих наслідків: сеньйораж стає, по-перше, основним джерелом формування купонних виплат приватним інвестором і, по-друге — засобом регулювання обсягів боргових зобов’язань. Остання функція сеньйоражу випливає з того, що за фінансової ставки загальної дохідності облігацій більша купонна дохідність означає меншу величину зростання капітальної вартості активів, і навпаки.

Нехай величина (обсяг) поточного бюджетного дефіциту в реальному вираженні є додатною функцією часу. Якщо сеньйораж не перевищує обсяги поточного бюджету, тобто має місце нерівність

$$S_N \equiv S - (G - T) \leq 0,$$

[1] *Turnovsky S.* Methods of Macroeconomic Dynamics // The MIT Press, 1995.

то, як показує розв’язок рівняння (16.9), державний борг зростає необмежено. Така ситуація пояснюється тим, що держава розміщує на вільному ринку додаткові борги в облігаціях, що більші чи дорівнюють обсягам, необхідним для сплачення боргів у даний момент часу, тобто існуючі борги мовби «забезпечуються» майбутніми боргами. В цьому випадку держава проводить так звану гру Понці (фінансова піраміда), ірраціональність якої для $b(0) = b_0$, r > 0, $S_n < 0$ відображається в нестійкості розв’язку рівняння

$$\dot{b} = rb + S_n.$$

Розглядаючи це рівняння з позиції приватного інвестора, можна дійти висновку, що ігри Понці є можливими, якщо інвестор згоден купувати активи (борги уряду) чи очікуючи лише зростання їхньої капітальної вартості, чи згоджуючись мати поточні збитки (від’ємний купонний дохід). Ясно, що попереднє твердження погано узгоджується з дійсністю, а тому ситуації, що породжують ігри Понці, необхідно виключати. Отже, інтерес з погляду раціональної макроекономічної політики становлять лише стійкі розв’язки рівняння (16.9).

16.7. СТІЙКИЙ РОЗВ’ЯЗОК РІВНЯННЯ БОРГУ

Коли сеньйораж є більшим за реальний поточний дефіцит:

$$S_n \equiv S - (G - T) > 0,$$

то обсяг розміщення боргових зобов’язань буде меншим за величину обслуговування поточного боргу. Тому отримати стійкий розв’язок рівняння (16.9) за позитивного значення норми реальної дохідності облігацій $r > 0$ можливо лише за умови, що обсяги сеньйоражу перевищуватимуть реальний дефіцит бюджету. В цьому випадку загальні обсяги боргових зобов’язань можуть регулюватися, зокрема, через проведення певної монетарної політики. Наприклад, обсяги сеньйоражу можуть бути встановлені на такому рівні, щоб покривати бюджетний дефіцит і нові запозичення. За відомого потоку майбутнього «чистого» сеньйоражу $S_N = S_N(t)$ та виконання умови збіжності звичайне диференціальне рівняння

$$\dot{b} = rb - S_N, \qquad (16.11)$$

яке можна записати в еквівалентній інтегральній формі

$$b(t, S) = \int_t^{\infty} S_N(\tau) \exp[-r(\tau - t)]\, d\tau, \qquad (16.12)$$

що легко перевірити диференціюванням, тут розв'язок (16.12) параметрично залежить від функції $S_N(t)$. Розв'язок (16.12) має глибокий економічний зміст. Якщо невласний інтеграл у його правій частині сходиться, то у цьому випадку він являє собою дисконтовану за дохідністю $r > 0$ до поточного моменту t поточну вартість майбутнього потоку сеньйоражу. Тобто $b(t, S)$ — це ринкова вартість державного боргу, яка є скінченною величиною, незважаючи на невід'ємність параметра дохідності ($r > 0$). Отже, використання в економічних обчисленнях і в прийнятті економічно обґрунтованих рішень на перспективу ринкової вартості боргу є цілком виправданим і обґрунтованим, оскільки відображає в кожен момент часу можливість еволюції, наприклад перепродажу, боргу в майбутньому. Це робить вираз (16.12) надзвичайно зручним в економічних розрахунках і моделюванні.

Для відомої (фіксованої) функції сеньйоражу маємо $b(t, S) = b(t)$, а стійкий розв'язок (16.11) можна отримати, зокрема, методом Сарджента—Уоллеса. Знаходження розв'язку складається з двох етапів. Спочатку методом варіації довільної константи, що згадувалась у підрозд. 16.4, знаходимо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (16.11):

$$b(t) = \left[A - \int_0^t S_N(\tau) \exp(-r\tau) d\tau \right] \exp(rt),$$

де A — довільна константа інтегрування, яка добирається так, щоб виконувалася умова

$$A = \lim_{t\to\infty} \int_0^t S_N(\tau) \exp(-r\tau) d\tau = \int_0^\infty S_N(\tau) \exp(-r\tau) d\tau.$$

Виконання цієї умови забезпечує збіжність невласного інтеграла $\int_t^\infty S_N(\tau) \exp[-r(\tau - t)] d\tau$, який є стійким розв'язком для рівняння (16.11).

Треба наголосити, що рівняння (16.11) є, власне, умовою арбітражу, що розглядалось у підрозд. 16.3. З погляду приватного інвестора це рівняння формує ринкові вимоги щодо дохідності державного боргу. З погляду уряду умова

$$rb = \dot{b} + S_N$$

стверджує, що потреба в обслуговуванні поточного боргу (rb) визначає обсяги як сеньйоражу S_N, так і додаткового розміщення боргів (b) на вільному ринку. Закріплення норм дохідності або ринком, або політикою обмежує привабливість нових облігацій, а отже, можливості держави щодо розміщення додаткових боргів. У цьому випадку природно вважати, що уряд може брати в борг лише за умови $0 < \alpha < r$, тобто купонна дохідність є додатною:

$$\delta = r - \alpha > 0.$$

Випадок нульової купонної дохідності потрібно вилучити з міркувань недопустимості ігор Понці (фінансових пірамід), тимчасом як випадок $r = \delta$ відповідає стаціонарній точці для (16.11).

Зрозуміло, що уряд як монопольний емітент боргових зобов’язань свою коротку позицію на ринку облігацій може забезпечити, лише переконавши приватних інвесторів зайняти довгу позицію. З погляду приватних інвесторів — власників реальних грошових балансів і реальних боргів держави — безризикова норма відсотка диктує загальні вимоги інвесторів до дохідності державних облігацій, тоді як сеньйораж забезпечує їхні поточні доходи чи купонні виплати. За заданих значень r і δ загальна фінансова збалансованість визначатиметься обсягом нових позик чи зміною капітальної вартості активів α, де $r = \delta + \alpha$.

Викладене вище означає, зокрема, що майбутній потік зростаючого з постійним темпом сеньйоражу фактично дисконтується за ставкою купонних виплат. Нехай у розв’язку (16.12) купонні виплати зростають з постійним темпом

$$S(\tau - t) = S(t)\exp[\alpha(\tau - t)],$$

тоді для $\tau \geq t$ та кожного t маємо

$$b(t) = \int_t^\infty S_N(\tau)\, \exp[-r(\tau - t)]d\tau = S(t)\int_t^\infty \exp[-(r-\alpha)(\tau - t)]d\tau = \frac{S(t)}{\delta},$$

звідки й отримуємо справедливість співвідношення $r = \delta + \alpha$, зокрема, можливість подання боргу як величини, пропорційної сеньйоражу.

Розгляньмо ще одну умову, котра дозволяє дещо спростити модель, не порушуючи її економічної загальності. З наведених вище міркувань випливає, що реалізація послідовної бюджетної політики вимагає рівності між приведеною поточною вартістю сеньйоражу й податків, з одного боку, і ринковою вартістю боргу та приведеною поточною вартістю державних витрат — з другого, тобто рівності

$$\int_t^\infty [S(\tau) + T(\tau)]\exp[-r(\tau - t)]d\tau = b(t) + \int_t^\infty G(\tau)\, \exp[-r(\tau - t)]d\tau.$$

Уважаючи, що дисконтовані вартості потоків майбутніх податків і бюджетних витрат дорівнюють одне одному, отримаємо, що ринкова вартість боргу — це приведена поточна вартість потоку майбутнього сеньйоражу:

$$b(t)=\int_t^{\infty} S(\tau)\exp[-r(\tau-t)]d\tau. \qquad (16.13)$$

Умова (16.13), яка дозволяє розглянути залежність між сеньйоражем і боргом, широко використовується в наукових дослідженнях для більш адекватного, в стохастичній постановці, формулювання проблеми.

Зрозуміло, що величина (16.13) параметрично залежить від потоку сеньйоражу, тож у загальному випадку має місце

$$b(t,S)=\int_t^{\infty} S(\tau)\exp[-r(\tau-t)]d\tau. \qquad (16.14)$$

Для (16.14) стаціонарний стан визначається як $b(t, S) = b(S)$ і дорівнює

$$b(S)=\int_0^{\infty} S(\tau)\exp[-r\tau]\,d\tau.$$

За умови, що сеньйораж зростає з постійним темпом $\alpha > 0$, який пов'язаний з купонним доходом $\delta > 0$ і безризиковою ставкою дохідності облігацій $r > 0$ співвідношенням

$$r=\alpha+\delta,$$

ринкова вартість державного боргу в стаціонарному стані являє собою величину

$$b(S)=\frac{1}{r-\alpha}S \quad \text{або} \quad b(S)=\frac{1}{\delta}S,$$

яка відіграє важливу роль у стохастичних моделях динаміки сеньйоражу.

16.8. ПОЗИКИ ДЕРЖАВИ Й НАКОПИЧЕНИЙ БОРГ

У 14 та 15 розділах було визначено, що в економіці перехідного періоду на фінансовому ринку домінує сегмент державних боргів, а державний борг фінансується, окрім податків, як емісією сеньйоражу, так і новими позиками держави на вільному ринку[1]. Якщо по грошах відсоток не сплачується, то позики на вільному ринку вимагають сплат відсотків і повернення номіналу, тобто призводять до зростання обсягів боргу. З одного боку, нові позики збільшують борг та його обслуговування, а окрім того, в довгостроковому плані мають інфляційні наслідки, якщо сеньйораж — одне з джерел фінансування боргу. З другого боку, боргові позики полегшують вартість обслуговування боргу, отже, брати в борг вигідно за умови, звичайно, що сплати гарантуються та існує можливість брати в борг. Спинімося на даному питанні, оскільки це часто випадає з поля зору досліджень.

Історично склалися різні точки зору на проблему державного боргу, які суттєво еволюціонують. Тезу щодо вигідності боргових позик можна аргументувати за допомогою простої детермінованої моделі, котру можна узагальнити на підставі стохастичних процесів щодо формування й сплати боргу. Нехай обсяг номіналу державного боргу становить F, а ринкова безризикова ставка відсотка r є постійною величиною, додатною і незалежною від обсягів боргів. Припустимо, що раціонально діючий емітент, як і власник боргів, зацікавлений у зростанні ринкової вартості боргу, що полегшує йому обслуговування боргу й дещо послаблює обмеження стосовно до обсягів нових позик. Емітент сплачує повну вартість номіналу (обсяг позики плюс відсотки), борги не списуються, й уряд не займається скуповуванням чи продажем своїх боргів.

Борг, що буде сплачений упродовж періоду часу dt, зміниться на величину

$$dB = -rB\,dt,$$

отже, має ринкову вартість, тобто вартість, приведену до поточного моменту, що дорівнює $B(t) = F \exp[-rt]$, де $B(T) = F$. Це буде справедливим, якщо держава протягом періоду dt не робить нових боргів, а відсотки не нарощуються. В цьому разі держава як законослухняний боржник, маючи можливість відкласти на dt повернення номіналу, насправді втрачає лише ринкову вартість боргу. Для цього, звичайно, повинна існувати можливість сплати боргу в момент часу $t + dt$, наприклад, дострокового викуплення облігацій. Якщо, окрім цього, норма дисконту настільки велика, що уряд може запозичити на вільному ринку з темпом $\alpha > 0$, тобто

[1] *Смирнов А. Д.* Лекции по макроэкономическому моделированию: Учеб. пособие для вузов. — М.: ГУ ВШЭ, 2000.

$$dV = \alpha V dt,$$

то в результаті початковий обсяг боргу зростатиме й складатиме на момент t обсяг $\hat{V}(t) = F\exp(\alpha t)$. Ця величина дисконтується за тією самою ставкою r, а тому дорівнюватиме

$$V(t) = [F\exp(\alpha t)]\exp[-rt] = F\exp[-(r-\alpha)\,t\,].$$

Отже, для будь-якого моменту t у майбутньому номінальна вартість боргу, що повертається, становить величину F, тимчасом як його ринкова вартість становить величину $B(t)$, якщо уряд не бере більше в борг, чи $V(t)$, якщо він бере нові запозичення на вільному ринку. Але нові позики можуть повертатися дещо пізніше, отже, в момент t емітент боргів отримує певний виграш, що виникає завдяки можливості відкласти повернення боргу, який становить

$$f(t) = [V(t) - B(t)].$$

З огляду на викладене вважатимемо, що емітент зацікавлений у максимізації цього виграшу, що еквівалентно максимізації вартості можливості відкласти повернення боргу до моменту t^*:

$$\max\left\{V\left(t^*\right) - B\left(t^*\right)\right\} = \max\left\{F\left[\exp\left(\alpha t^*\right) - 1\right]\exp\left(-rt^*\right)\right\}. \quad (16.15)$$

Дана ситуація має економічний сенс для $0 < \alpha < r$, тобто коли темп нових запозичень не перевищує величини ринкової ставки відсотка. Диференціюючи за часом рівність (16.15), з необхідної умови оптимальності можна відшукати момент часу t^*, для якого різниця в ринковій вартості боргу, що повертається, буде максимальною (рис. 16.2):

$$t^* = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{r}{r-\alpha}. \quad (16.16)$$

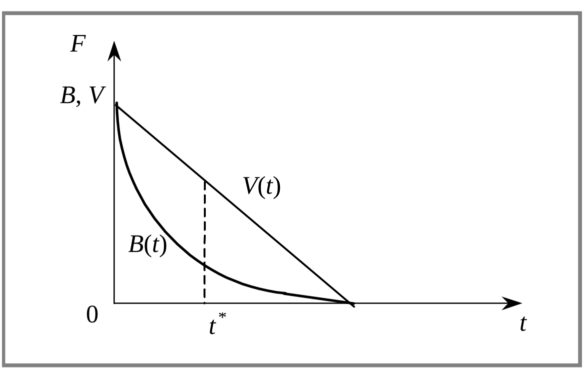


Рис. 16.2. Оптимізація виплати боргів

З (16.16) випливає, що коли $r > \delta = r - \alpha$, то звернення до нових позик є вигідним і повертати борг треба не в поточний момент, а в момент часу $t^* > 0$. Якщо ж $r = \delta$, тобто $\alpha = 0$, то, оскільки виграшу за рахунок підвищення ринкової вартості боргу держава не отримує, повертати борги слід негайно.

Аналіз показує, що можливість брати позики має вартість $f(t)$, яка залежить від динаміки боргу. У загальному випадку існування можливості брати в борг визначається довірою інвесторів до держави, що у свою чергу залежить від здатності держави повертати борги, від репутації держави як платника боргів.

Водночас держава щодо нових боргів має свободу вибору: вона може як брати, так і не брати борги залежно від конкретних обставин. Борги на вільному ринку — це *асиметричний контракт між державою та інвестором (кредитором)*, вартість якого може бути виражена рівнянням

$$f(V) = \max\{V - B,\ 0\}. \qquad (16.17)$$

Рівняння (16.17) відбиває обмежену відповідальність держави як позичальника: вона може як брати в борг, так і не брати, обираючи цим максимальну величину між $[V - B]$ і нулем. Асиметрія контракту для даної постановки задачі полягає в тому, що інвестори лише купують борги, якщо держава користується довірою. Раціональний інвестор не відмовиться від можливості заробити безризиковий дохід, позичаючи свої гроші уряду.

16.9. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Поясніть економічний зміст ставки ринкового відсотка та її зв’язок зі ставками дохідності активів, а також з процедурою дисконтування.
2. Розкрийте економічний зміст принципу арбітражу та його використання для формування раціональної політики на ринку боргів.
3. Поясніть механізм динаміки боргу та економічну роль існування стійкої траєкторії боргу.
4. Сформулюйте стратегію стабілізації процесу боргових позик для перехідної економіки.
5. Поясніть, у чому полягає сутність раціональної комбінації можливих політик держави щодо накопиченого боргу та нових позик.

6. Поясніть сутність умови щодо стабілізації державного боргу.

16.10. Теми рефератів

1. Сутність та використання концепції раціональних очікувань у моделюванні ринкової рівноваги.
2. Гіпотеза ефективного ринку та динаміка державного боргу.
3. Ринок державних цінних паперів та асиметрія інформації.
4. Стабілізація обсягів державного боргу та її вплив на інфляцію.
5. Використання теорії арбітражу щодо формування раціональної політики на ринку боргів.
6. Вибір стратегії стабілізації процесу боргових позичок для перехідної економіки.
7. Аналіз можливих політик держави щодо накопиченого боргу.
8. Економічне моделювання раціональних очікувань.
9. Формулювання та моделювання очікувань у випадку обмеженої раціональності.
10. Використання фільтра Калмана в актуалізації раціональних очікувань.

15.16. Завдання для самостійної роботи

1. Поясніть економічний зміст ставки ринкового відсотка та її зв'язок зі ставкою дохідності активів та з процедурою дисконтування.

2. Розкрийте механізм динаміки державного боргу та економічне значення існування стійких траєкторій боргу.

3. Охарактеризуйте сутність стратегії стабілізації процесу боргових державних позик та її використання в перехідній економіці.

4. Нехай $B(r_t, t)$ — ринкова ціна безкупонної облігації з номіналом $B(r_T, t) = F$, котрий погашається в момент $t = T$ і має постійну, що безперервно нараховується, дохідність $r_t = r > 0$, тобто $B(r_t, t) = Fe^{-r(T-t)}$.

Необхідно:

а) обчислити величини перших похідних ціни боргу за ставкою відсотка та за часом;

б) пояснити, чому похідна B_r $\left(\left|\frac{dB}{Bdr}\right|\right.$ — так звана дюрація облігації $\left.B(r_t, t)\right)$ має розмірність часу;

в) показати, що для безкупонної облігації дюрація збігається з періодом її погашення $\tau = T - t$;

г) пояснити економічний зміст повного диференціалу вартості безкупонної облігації.

5. Рівняння динаміки боргу: $\dot{b} = rb - S$, де S — функція купонних виплат, $r > 0$ — постійна дохідність, що безперервно нараховується, b — ринкова вартість боргу. Розгляньте це рівняння в координатах «купон—борг», уважаючи ринкову вартість боргу функцією купонних виплат, а приріст вартості боргу — постійною величиною. Отримане лінійне алгебраїчне рівняння — стандартне в теорії боргу. Побудуйте графіки цього рівняння:

а) для постійних ненульових приростів вартості боргу;

б) для нульових приростів вартості боргу.

6. Вартість облігації з номіналом F, купоном S і періодом обігу в t років подається формулою:

$$B(t,S) = \int_0^t S(\tau)e^{-r\tau}d\tau + Fe^{-rt},$$

де $r > 0$ — постійна дохідність облігації, що нараховується безперервно.

Обчислити:

а) вартість облігації з нескінченним періодом обігу;

б) вартість облігації з нульовим купоном.

7. Нехай державний борг досягає стаціонарного значення $\dot{b} = 0$ і номінальна вартість накопиченого боргу дорівнює F, тобто рівняння боргу набере вигляду:

$$b = \frac{1}{r}S - F.$$

Пояснити, який економічний зміст має точка, де виконується рівняння $S = rF$.

8. Нехай рівняння динаміки державного боргу має стандартний вигляд:

$$\dot{b} = rb - S,$$

де S — відома функція сеньйоражу. Відповісти на такі запитання:

а) чи приводить до відсутності інфляції стабілізація обсягу державного боргу?

б) за яких умов зростання грошової маси може мати неінфляційний характер? Поясніть економічну можливість таких ситуацій;

в) як обслуговується борг, якщо зростання грошової маси не супроводжується інфляцією?

17

РОЗДІЛ

АСПЕКТИ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ ТЕОРІЇ ЕКОНОМІЧНИХ ЗМІН ТА ЕВОЛЮЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

17.1. СТРУКТУРА ЕВОЛЮЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

Застосовувані фірмами (підприємствами) правила прийняття рішень утворюють базисну робочу концепцію еволюційної теорії[1]. Якщо в ортодоксальній теорії наявні та допустимі альтернативні технології є заданими, а правила прийняття рішень є наслідком максимізації, то в еволюційній теорії те і друге трактується як відображення «рутин», які історично склалися на даний момент часу та якими керуються фірми. Розрізняють три класи «рутин».

Перший пов’язаний з тим, що робить фірма в кожний момент часу за заданого парку обладнання та інших чинників виробництва, обсяг котрих неможливо легко збільшити протягом короткого терміну. Ці «рутини», що управляють короткотерміновою поведінкою, називають «функціональними характеристиками».

Другий — множина «рутин» — визначає стратегію та необхідність збільшення чи зменшення основного капіталу фірми від одного періоду до другого. Вважається, що фактична інвестиційна поведінка здійснюється згідно з деяким прогнозованим зразком, що суттєво відрізняється від періоду до періоду. У деяких випадках прийняття рішення про те, чи побудувати новий завод, чи ні, може, по суті, не дуже відрізнятися від того, чи продовжувати експлуатацію одного верстата, котрий почав працювати зі збоями, чи зупинити його й викликати бригаду ремонтників, чи придбати новий верстат. А в інших випадках рішення нового заводу може бути більш подібним до рішення стосовно до реалізації великої програми науково-дослідних і дослідно-конструкторських робіт (НДДКР) із застосуванням нещодавно зробленого науково-технічного відкриття (проблеми, що не мала реальних прецедентів у минулому, розгляд якої вимагає деяких імпровізованих процедур). Який із цих двох стереотипів буде використано, ймовірно, суттєво залежить від співвідношення між обсягами інвестиційного проекту й результатами поточної господарської діяльності фі-

---

[1] *Нельсон Р., Уинтер С.* Эволюционная теория экономических изменений. — М.: ЗАО «Финстатструктура», 2000.

рми. В еволюційній теорії цей спектр реалістичних можливостей відповідає діапазону, в котрому варіюється роль елементів випадковості у формалізації процесу прийняття інвестиційних рішень. Правило інвестування налаштоване на рентабельність фірми з урахуванням допустимого ступеня ризику тощо. Тобто рентабельні фірми, очевидно, зростатимуть, а нерентабельні — скорочуватимуться, і тим самим функціональні характеристики рентабельних фірм відіграватимуть дедалі більшу роль у господарській діяльності певної галузі.

Третій — це «рутини», дія котрих з плином часу модифікує різні аспекти функціональних характеристик фірм. Мається на увазі перегляд того, чим займається фірма, і навіть радикальна зміна діяльності фірми, її призначення.

Ці, керовані «рутинами», процеси зміни «рутин» моделюються як «пошук». Задається формалізований опис характеристик популяції модифікацій «рутин», які може виявити пошук. Тактика пошуку характеризується заданням розподілу ймовірностей того, що буде знайдено в результаті пошуку як функція від низки змінних, від витрат фірми на НДДКР, які, у свою чергу, можуть бути функціями від розмірів фірми.

Головні інтереси еволюційної теорії пов’язані з динамічним процесом, за допомогою якого спільно визначаються в часі зразки поведінки фірм і наслідки такої поведінки для певного ринку.

Пошук і відбір є двома одночасно наявними і взаємодіючими компонентами еволюційного процесу. Під спільним впливом пошуку й відбору фірми розвиваються в часі, одночасно ситуація в галузі в кожний період має в собі зародки ситуації, що реалізується в ній у наступному періоді.

17.2. ЧАСТКОВА МОДЕЛЬ ЕКОНОМІЧНОГО ВІДБОРУ

Розгляньмо відбір з двох різних видів «рутин». Одна з них — «технологія», котру застосовує фірма. Друга — «правило прийняття рішень», яке визначає коефіцієнт використання виробничих потужностей (рівень випуску).

Маємо деяку (гіпотетичну) галузь, яка випускає один однорідний продукт. У всіх фірмах галузі наявна одна й та сама множина технологічних альтернатив (перша «рутина») виробництва їхнього продукту. Усі можливі технології характеризуються постійними коефіцієнтами витрат і постійним ефектом масштабу. В усіх технологіях однаковим є співвідношення випуску продукції і використовуваних виробничих потужностей (основного капіталу). Нехай для спрощення це відношення дорівнюватиме одиниці. Але технології різняться між собою змінними витратами. Припустимо, що у кожний момент часу фірма застосовує лише одну технологію.

Друга «рутина», що її використовує фірма, — правило використання виробничих потужностей. Таке правило поєднує ступінь використання виробничих потужностей з відношенням ціни продукту до змінних питомих витрат виробництва. Отже,

$$q = \alpha\left(\frac{P}{c}\right)k,$$

де P і c — відповідно ціна продукту й змінні питомі витрати виробництва, q, k — відповідно випуск і капітал (виробничі потужності).

Припустімо, що функція $\alpha(\cdot)$ — неперервна, монотонно не спадна, додатна за достатньо великих значень аргументу та задовольняє нерівність $0 \le \alpha(\cdot) \le 1$.

Правило використання потужностей можна інтерпретувати як таке, що характеризує показник прибутку у відсотках до змінних витрат, який є необхідним для того, щоб стимулювати фірму відповідним чином діяти за різних рівнів використання виробничих потужностей.

Припускається гіпотеза, що чинники виробництва, котрі постачаються в галузь, є абсолютно еластичними, ціни всіх чинників додатні й постійні на всьому проміжку часу здійснення аналізу. Отже, всі технології можна охарактеризувати і впорядкувати згідно зі змінними питомими витратами виробництва.

Звичайно, що за будь-якої технології загальні питомі витрати виробництва перебувають у обернено-пропорційній залежності від рівня використання виробничих потужностей. Для зручності опису припустимо, що існує в певному розумінні єдина найкраща технологія зі змінними питомими витратами виробництва c. Справедливою є гіпотеза, що жодне інше правило не може переважити правило, виокремлене ортодоксальною технологією:

$$\left.\begin{matrix} q = 0 \\ 0 \le q \le k \\ q = k \end{matrix}\right\} \text{ за } \begin{cases} \dfrac{P}{c} < 1; \\ \dfrac{P}{c} = 1; \\ \dfrac{P}{c} > 1. \end{cases}$$

Галузі відповідає строго спадна неперервна функція попиту, котра виражає залежність ціни виробленого продукту від загального обсягу випуску. Ця функція є визначеною для всіх невід'ємних обсягів випуску. Припускається, що коли загальний обсяг випуску галузі досить малий, то деяка технологія й деяке правило використання виробничих потужностей принесуть додатний прибуток. Якщо ж випуск галузі є досить великим, то жодна суперпозиція технологій і правил використання потужностей не буде прибутковою.

Формально систему можна охарактеризувати так. Нехай усі виробничі потужності використовують на фірмах однакову технологію і функціонують згідно з однаковими правилами щодо використання потужностей. Тоді стан деякої фірми i, $i = 1, \ldots, M$ можна охарактеризувати змінними: c_{it}, α_{it}, k_{it}, де c_{it} — змінні питомі витрати i-ї фірми в період t; α_{it} — функція, що характеризує вплив відношення ціни продукту до питомих витрат виробництва i-ї фірми в період t; k_{it} — виробничі потужності i-ї фірми в період t. Стан усіх M фірм у періоді t (загалом) визначає короткотермінову функцію пропозиції для цього періоду (t):

$$q_t = \sum_{i=1}^{M} q_{it} = \sum_{i=1}^{M} \alpha_{it}\left(\frac{P_t}{c_{it}}\right) k_{it}.$$

Разом із функцією попиту

$$P_t = h(q_t)$$

вона визначає P_t і q_t для короткотермінового періоду. Наведені вище припущення стосовно $h(\cdot)$ та $\alpha_{it}(\cdot)$ гарантують, що така короткотермінова рівновага завжди існує. Прибуток фірми i за період часу t дорівнює:

$$\pi_{it} = \left[(P_t - c_{it})\,\alpha_{it}\left(\frac{P_t}{c_{it}}\right) - r\right] k_{it}\,,$$

де r — капітальні послуги.

Ясно, що коли існує рівновага, то за такої рівноваги максимізація прибутку вимагає, щоб усі функціонуючі фірми застосовували технологію з найнижчими питомими витратами. Отже, для всіх фірм, у яких $q_i > 0$, $c_i = \hat{c}$, щоб прибуток був невід'ємним, рівноважна ціна P^* має бути більшою, ніж деяке задане $\hat{c}$. У цьому випадку прибуток буде максимізуватися згідно з таким правилом щодо визначення обсягу випуску, котре потребує повного використання виробничих потужностей за умови, що $P = P^*$. Рівноважна ціна P^* має дорівнювати $P^* = \hat{c} + r,$ у протилежному випадку у фірми з'явиться стимул змінити ступінь використання потужностей.

Припущення щодо функції попиту гарантує існування такого q^*, що $h(q^*) = \hat{c} + r.$ Це — рівноважні випуск і ціни відповідно.

Робиться також таке припущення щодо інвестицій. Якщо у фірм з додатним основним капіталом прибуток — нульовий, то й інвестиції є нульовими. Розширення фірм, що вилучають додатний прибуток, має ймовірнісний характер. Імовірність зменшення для них дорівнює нулеві. З додатною ймовірністю вони долучають до свого парку ще одну машину. В той же час існує ненульова ймовірність щодо скорочення наявних фірм, які мають від'ємний прибуток. Вони, безумовно, не розширюються. Фірми — потенційні конкуренти, котрі мають ненульовий постійний капітал і додатну ймовірність увійти в галузь тільки з однією машиною, а пара «рутин», які вони планують впровадити у практику, може принести їм додатний прибуток за ціни P_t.

Потенційні конкуренти, що планують пару «рутин», які принесуть нульовий чи від'ємний прибуток, у галузь не вступають. Перелічені альтернативи формально можна подати таким чином:

в існуючих фірмах, які залишаться зі своїм капіталом:

$$k_{t+1} = k_t\,;$$

в існуючих фірмах, які вилучають додатний прибуток:

$$k_{t+1} = k_t + \delta \quad \text{з імовірністю} \; = \begin{Bmatrix} 0 \\ >0 \\ \geq 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{за} \quad \begin{cases} \delta < 0; \\ \delta = 0{,}1; \\ 1 < \delta \leq \Delta; \\ \delta > \Delta; \end{cases}$$

в існуючих фірмах, які мають від'ємний прибуток (збитки):

$$k_{t+1} = k_t - \delta,$$

де характеристики розподілу випадкової величини δ вважаються відомими ($\Delta = k_t$);

у потенційних конкурентів, які планують «рутини», котрі принесуть їм додатний прибуток: $k_{t+1} = 0$ або 1, де ці обидва випадки (0 чи 1) мають ненульову ймовірність;

у потенційних конкурентів, які планують «рутини», за котрих вони у кращому разі залишаться зі своїм капіталом: $k_{t+1} = 0$.

Гранню, котра різко відмежовує еволюційні моделі від ортодоксальних, є те, що фірмам не нав'язується здатність одночасно й одномоментно розглядати велику кількість альтернативних рішень. Пошук провадиться навмання. Обираються такі гіпотези щодо пошуку. *По-перше,* результат пошуку за умови, що фірма веде його активно, визначається в термінах імовірнісного розподілу «рутин», які будуть знайдені в процесі пошуку чи на підставі, можливо, вже існуючих у фірми «рутин». *По-друге*, віддаючи перевагу цим, уже існуючим «рутинам», визнаємо ненульову ймовірність того, що в процесі пошуку буде віднайдена будь-яка інша пара «технологія — правило прийняття рішень». *По-третє*, існує ненульова ймовірність того, що фірма не відшукає нових «рутин» і тим самим за необхідності збереже свої вже існуючі «рутини».

У яких випадках існує пошук? Тут здійснюються такі міркування. Якщо система має прийти до рівноваги, схожої з ортодоксальним підходом, то фірми повинні досить активно займатися пошуком. З іншого боку, пошук не має бути настільки активним, щоб він міг змусити систему відійти від того стану, котрий у простому (ортодоксальному) випадку був би рівноважним. Припускається, що фірми, які мають додатні потужності, взагалі не займаються пошуком, якщо вони вилучають невід'ємний прибуток. Потенційні конкуренти, що прагнуть увійти в галузь (фірми з нульовими виробничими потужностями), вважаються такими, що перебувають завжди у стані пошуку, але коли входять у галузь, то повинні мати такі «рутини», що вже пройшли тест на рентабельність.

Селекційна рівновага

У контексті описаної вище модельної концепції в еволюційній теорії визначають статичну селекційну рівновагу як ситуацію, в якій стан усіх наявних у галузі фірм залишається незмінним, а перелік наявних фірм також не змінюється.

Припущення щодо пошуку гарантують, що рано чи пізно якась із фірм — якщо не існуюча, то потенційний конкурент — відшукає дещо ліпшу технологію та краще правило використання виробничих потужностей, щоб вилучити невід'ємний прибуток. Якщо ця пара «рутин» буде знайдена, а ця фірма вже діяла в галузі, то вона розшириться, а якщо це потенційний конкурент, то він увійде в ринок. А за ціни $\hat{c}+r$ зі своїм інтересом залишаться лише фірми з відносно кращими технологіями й правилами прийняття рішень, що вимагає повного використання потужностей за цієї ціни; жодна з фірм не зможе здійснити нічого ліпшого.

Підкреслимо: якщо фірми діють згідно з означеними вище правилами, що забезпечують повне використання потужностей за рівноважної ціни P^*, $P^* = \hat{c}+r$, то процес пошуку не порушує рівноваги. Не має значення, яку реакцію викликає це правило за інших цін.

Залишається питання: чи приведе процес відбору до рівноважного стану галузь, якщо до цього його не було?

З допущень еволюційної теорії випливає, що приведе. Для доведення цього потрібно дати точну характеристику рівноважних станів. Під «станом галузі» мають на увазі перелік станів M фірм, де стан кожної з них характеризується змінними c_{it}, α_{it}, k_{it}, відповідно питомими витратами, правилами використання потужностей і обсягами цих потужностей.

Назвемо правило використання потужностей «прийнятним», якщо воно приводить до повного використання їх за ціни $\hat{c}+r$, тобто якщо $\alpha[(\hat{c}+r)/\hat{c}]=1$. «Рівноважний стан» — це такий стан, за якого сукупність потужностей галузі (k^*) дорівнює такому випуску q^*, що $h(q^*)=\hat{c}+r$, і у всіх фірм, що мають невід'ємні потужності, є наявними прийнятні правила використання потужностей і прийнятні обсяги витрат $\hat{c}$. Легко побачити, що в рівноважному стані ціна дорівнює $\hat{c}+r$ і єдиним видом змін є пошук рентабельних «рутин» потенційними конкурентами, а отже, панує селекційна рівновага. Мовою теорії марківських процесів множина E рівноважних станів є «замкнутою множиною».

Оскільки множина «рутин» є скінченною, то постає питання — чи може нескінченно зростати капітал галузі? Не може. Зазначимо, що для будь-якої пари «рутин» (c, α) існує деякий граничний рівень потужностей $K(c, \alpha)$, що є найбільшим значенням k, за якого можуть одночасно виконуватись умови:

$$(P-c)\alpha\left(\frac{P}{c}\right)-r\geq 0,$$

$$P=h\left[\alpha\left(\frac{P}{c}\right)k\right].$$

З першого співвідношення випливає, що $\alpha\left(\frac{P}{c}\right)$ — додатне. Із гіпотези, що за досить високого рівня випуску всі «рутини» нерентабельні, маємо, що існує максимальне k, яке задовольняє одночасно обидва співвідношення.

Розгляньмо тепер випадок, коли $K=\max[\overline{K}(c,\alpha)]$. Жодна з фірм у цьому разі не спроможна збільшити свій капітал до рівня, який перевищує $\overline{K}+\Delta$, почавши з будь-якого нижчого рівня. Оскільки Δ обмежує можливий приріст капіталу ($k_{t+1}-k_t$) впродовж одного періоду, то за такого переходу потрібно, щоб початкове значення k_t перевищувало б $\overline{K}$. Проте оскільки фірма повинна мати деяку технологію (c, α) і $k_t > \overline{K} \geq K(c,\alpha)$, то ця фірма має бути нерентабельною, отже, її розширення неможливе.

Жодна з фірм не може збільшити свій капітал до обсягу, який перевищує $\overline{K} + \Delta$, і тому за будь-якого конкретного процесу функціонування капітал i-ї фірми обмежений зверху $(\max(k_{i1}, \overline{K} + \Delta))$, де k_{i1} — капітал i-ї фірми за початкового стану галузі. Отже, з будь-якого початкового стану галузі можна досягнути лише скінченної множини станів.

Потрібно уточнити, що означає «досить велика кількість фірм»: число M фактичних і потенційних фірм перевищує $\overline{K}$. Таким чином, коли сукупні потужності галузі не перевищують $\overline{K}$, обов'язково повинні бути фірми з нульовими потужностями, тобто потенційні конкуренти. З іншого боку, якщо сукупні потужності перевищують $\overline{K}$, то хоча б одна з фірм, очевидно, має збитки й змушена займатися пошуком. У будь-якому випадку існує ненульова ймовірність того, що будуть прийняті нові «рутини» з витратами $\hat{c}$ та відповідне правило використання потужностей.

Усі фірми (наявні чи потенційні), що демонструють такі пари «рутин», — назвемо такі фірми «прийнятними» фірмами — можуть з ненульовою ймовірністю зберігати ці «рутини» впродовж деякого періоду.

Якщо задано стан, за якого є хоча б одна прийнятна фірма, то завжди можна з більшою від нуля ймовірністю «зробити крок у бік» множини E рівноважних станів. Кількість «кроків», що відокремлюють даний стан від E, можна оцінити як $k_n + |k_l - k^*|$ — сукупні потужності неприйнятних фірм плюс абсолютні значення розходження між потужностями k_l прийнятних фірм і k^*. Ясно, що на скінченній множині станів галузі ця кількість кроків є обмеженою. Припустимо, що поточний стан є таким, що ціна продукції фірми перевищує $\hat{c} + r$. Тоді, очевидно, $k_l < k^*$ і збільшення обсягів потужностей прийнятної фірми на одну машину за незмінного стану інших фірм є кроком з відмінною від нуля перехідною ймовірністю, що зменшує відстань до E. З іншого боку, припустимо, що стан є таким, за якого ціна продукції є меншою чи дорівнює $\hat{c} + r$. Неприйнятні фірми обов'язково зазнаватимуть збитків, і якщо серед них є фірма з позитивними потужностями, то зменшення потужностей на одну машину — крок з додатною ймовірністю, що скорочує відстань до E. Якщо $k_n = 0$, то здійснення кроку такого роду не є можливим, але в цьому випадку маємо, що $k_l \geq k^*$. Якщо виконується строга нерівність, то на відповідному кроці з позитивною перехідною ймовірністю відбудеться скорочення потужності прийнятної фірми на одну машину, а якщо має місце рівність, то даний стан уже належить до E. Повторне застосування наведених вище міркувань показує, що за вказаних припущень щодо перехідних імовірностей множина E досягається за скінченну кількість кроків.

Неортодоксальна рівновага. Щоб наголосити на важливості класу обраних правил, розглянемо, що відбудеться, якщо множина можливих правил щодо використання потужностей не міститиме ні ортодоксального, ні будь-якого іншого прийнятного правила. Тоді, очевидно, ортодоксальна рівновага за умови повного використання потужностей буде неможливою, бо ціна є досить великою і буде стимулювати фірми до нарощування потужностей. Селекційна рівновага, однак, залишається можливою.

Збережемо всі припущення попереднього аналізу, окрім припущення, що хоча б одне правило щодо використання виробничих потужностей є прийнятним. Для будь-якого правила α існує найнижча ціна, сумісна з тим, щоб залишитися зі своїми інтересами, коли змінні витрати дорівнюють $\hat{c}$, тобто найнижча ціна, що задовольняє умову

$$(P-\hat{c})\alpha\left(\frac{P}{\hat{c}}\right)-r \geq 0.$$

Позначимо через P^{**} найнижчу з таких цін згідно з усіма можливими правилами α, а через $\hat{a}$ — коефіцієнт використання потужностей, за котрих досягається ця мінімальна ціна. Щоб адаптувати зроблене задля зручності припущення, що пов'язане з неподільністю капіталу, припустимо, що існує ціле число (обсяг капіталу k^{**}), що задовольняє умову:

$$P^{**} = h(\hat{a}k^{**}).$$

Назвемо правило використання виробничих потужностей «псевдоприйнятним», якщо воно породжує коефіцієнт використання потужностей, котрий дорівнює $\hat{a}$, якщо $P^{**}/\hat{c}$ — домінуюче відношення ціни до витрат. Доведення є можливим, якщо просто йти шляхом попереднього аналізу лише із заміною «прийнятного» правила на «псевдоприйнятне»: P^*, k^*, q^8 відповідно на P^{**}, k^{**}, $\hat{a}k^{**}$.

У результаті доходимо висновку, що селекційна рівновага з коефіцієнтом використання потужностей $\hat{a}$ у кінцевому підсумку буде досягнута.

17.3. МАРКІВСЬКА МОДЕЛЬ ЗАМІЩЕННЯ ЧИННИКІВ ВИРОБНИЦТВА

Зосередьмось тут на аспекті, пов'язаному з реакцією фірми та галузі на зміну ринкової кон'юнктури. А власне, на заміщенні чинників виробництва, викликаному зміною їхніх цін.

Модель ґрунтується на досить абстрактному положенні: фірми здійснюють пошук більш дешевих технологій виробництва.

У заданий період часу кожна фірма характеризується певним обсягом основного капіталу й функціонує за однією технологією виробництва (коефіцієнти постійні). Вважатимемо, що правило прийняття рішень щодо випуску є негнучким; отже, технологія та обсяг капіталу фірми однозначно визначають її випуск і змінні витрати в певний період часу. Галузі відповідає спадна крива попиту на її продукцію. Від періоду до періоду фірми розширюються чи скорочуються згідно зі своєю рентабельністю, здійснюючи пошук кращих технологій. Коли фірма шляхом пошуку знаходить нову технологію й застосовує її, весь вільний капітал фірми переміщується на застосування цієї технології. Випуск, витрати й середнє співвідношення витрат у галузі еволюціонують у часі залежно від того, як у фірм змінюються капітали і технології.

Для спрощення вважатимемо, що для всіх технологій має місце однакова капіталоємність, зосередившись на змінних чинниках виробництва. Порівняймо вплив двох режимів постійних цін на змінні чинники виробництва за відмінних відносних цін. Формальний аналіз обмежимо випадком двох видів уживаних чинників, хоча це можна поширити й на більш загальний випадок.

У центрі цілей моделі — процес пошуку ефективної технології індивідуальною фірмою.

Нехай q, k, x_1, x_2 — відповідно рівень випуску, основний капітал та обсяги двох видів змінних витрат. Вважатимемо, що k/q постійні для всіх можливих технологій. Технології різняться, зокрема, коефіцієнтами витрат $a_1 = \frac{x_1}{q}$; $a_2 = \frac{x_2}{q}$. Пошук фірми полягає в дослідженні деякої альтернативної технології з розподілу множини альтернативних технологій $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ в околі її переважаючої технології. Якщо знайдено технологію дешевшу за переважаючих цін w_1 і w_2, ніж поточна, тобто якщо $w_1\tilde{a}_1 + w_2\tilde{a}_2 < w_1 a_1 + w_2 a_2$, то фірма переходить до альтернативної технології $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$; у протилежному випадку вона залишається з технологією (a_1, a_2).

Друге припущення полягає в тому, що пропорційні зміни коефіцієнтів витрат розподілені незалежно від переважаючих коефіцієнтів. Тому зручно описувати процес у просторі логарифмів коефіцієнтів витрат. Оскільки особливий інтерес становить еволюція співвідношень чинників виробництва, то зручно характеризувати технологію логарифмом відношення її коефіцієнтів:

$$U = \log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) = \log(a_2) - \log(a_1).$$

Щоб задати положення технологій у двовимірному просторі логарифмів коефіцієнтів витрат, то окрім координат *U* задають другу координату — перпендикулярну першій, тобто:

$$V = \log(a_1 a_2) = \log(a_1) + \log(a_2).$$

Очевидно, що за заданого значення на координатній осі *U* технологія з меншим значенням по координаті *V* є кращою, ніж технологія з більшим значенням по цій координаті. Геометричне місце точок у просторі (a_1, a_2), на котрому $V = \text{const}$ можна трактувати як ізокванту виробничої функції Кобба—Дугласа з рівними значеннями показників степеня (еластичності) за умови наявності двох чинників виробництва.

Розглядатимемо злічену впорядковану множину можливих технологій, що включає скінченну сукупність значень *U*, перенумерованих від 1 до *N*, і нескінченну множину значень *V*, від $-\infty$ до $+\infty$.

Технології розрізнятимемо згідно зі значеннями *U* та *V* на ціле, кратне константі Δ (Δ — довільна), її роль можна було б з таким самим успіхом подати й відповідним обранням основи логарифму. Нехай u_1, u_2, …, u_N і …ν_{-2}, ν_{-1}, ν_0, ν_1, ν_2, … є різними можливими значеннями *U* та *V*. Під технологією (*i*, *j*) матимемо на увазі технологію, що характеризується парою:

$$U = u_i = u_0 + i\Delta,$$
$$V = V_j = j\Delta.$$

Тут u_0 — константа, відносно котрої оцінюється діапазон змін розглядуваних співвідношень чинників виробництва, а щодо Δ, то, по суті, це відповідає пропорційній різниці між суміжними в даній упорядкованій множині коефіцієнтами витрат. Бачимо, що:

$$a_1 = \exp[(v_j - u_i)/2],$$
$$a_2 = \exp[(u_i + v_j)/2].$$

Тепер можна описати схему пошуку. Нехай (i, j) — технологія деякої фірми в момент часу t, тобто:

$$U = u_i,$$
$$V = V_j.$$

Результат пошуку визначається парою випадкових цілих чисел (G_t, H_t), котра, по суті, є кількістю кроків, зроблених фірмою в просторі U та V за обмеження, що U може варіювати лише між u_1 та u_N:

$$U'_{t+1} = u_{i+G} = u_0 + (i + G_t)\Delta, \quad \text{якщо } 1 < i + G_t < N;$$
$$U'_{t+1} = u_1 = u_0 + \Delta, \quad \text{якщо } i + G_t \le 1;$$
$$U'_{t+1} = u_n = u_0 + N\Delta, \quad \text{якщо } N \le i + G_t,$$

та

$$V'_{t+1} = V_{j+H} = (j + H_t)\Delta.$$

Випадкові змінні (G_t, H_t) вважатимемо незалежними від (U_t, V_t) та від усіх попередніх значень (U, V), вони спільно розподілені в обмеженій області $-B \le (G, H) \le B$. Вважатимемо їх індексованими як за номерами фірм, так і за періодами часу. Вони також однаково розподілені й незалежні як за фірмами, так і в часі. Якщо технологія (U'_{t+1}, V'_{t+1}), отримана в результаті пошуку, витримує описаний вище тест на зниження витрат, то:

$$U_{t+1} = U'_{t+1}, V_{t+1} = V'_{t+1}.$$

У протилежному разі:

$$U_{t+1} = U_t, V_{t+1} = V_t.$$

Зазначимо, що розподіл альтернатив, віднайдених пошуком, вважається не залежним від цін чинників виробництва, але ціни впливають на розподіл імовірностей прийнятих до застосування альтернативних технологій через тест на скорочення витрат.

Ця схема пошуку й тестування визначає розподіл умовних імовірностей технологій на період (t + 1) за умови, що технології в період t та цей розподіл залежать від розподілу (G, H) і від цін чинників виробництва (припускається, що ймовірність «накопичується» на граничних значеннях u_1 і u_N).

Зі зроблених припущень випливає, що послідовність технологій, які фірма застосовує в часі, утворюють марківський ланцюг. Суттєвою властивістю цього ланцюга є, зокрема, те, що послідовність співвідношень чинників виробництва фірми exp (U_t) сама є марківським ланцюгом (фактично скінченним марківським ланцюгом з постійними в часі перехідними ймовірностями). Це випливає з того, що $\exp(V_t)$ у нерівності порівняння витрат скорочується.

Співвідношення чинників виробництва фірми можна описати матрицею F перехідних імовірностей розмірністю $(N \times N)$:

$$F = [f_{ik}], \;\; i, k = 1, ..., N,$$

де стан i асоціюється зі співвідношенням чинників виробництва $\exp(u_i)$, а f_{ik} — імовірність того, що стан i настає після стану k. Ця матриця постійна в часі, але залежить від цін чинників.

Важливими є, зокрема, дві властивості матриці F. Перша полягає в тому, що зі зростанням співвідношення цін w_1/w_2 зростає й умовна ймовірність станів з більшими номерами (більше a_1/a_2) за умови будь-яких (без винятку) початкових значень a_1/a_2. Конкретно, якщо $\hat{f}_{ik}$ — коефіцієнти, що виникають у результаті збільшення відносної ціни змінного чинника 1, маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{f}_{ik} \le \sum_{i=1}^{n} f_{ik}, \quad \text{якщо } n = 1,...,N-1; \; k = 1,...,N. \qquad (11.1)$$

Якщо матриці F та $\hat{F}$ формуються в результаті застосування описаної вище схеми пошуку й тестування, то в такій формі ця властивість має місце також у загальному випадку. В цьому можна переконатися, порівнюючи за заданої початкової пари (a_1, a_2) область у просторі коефіцієнтів витрат, які задовольняють тест на порівняння витрат за умови двох різних співвідношень цін чинників виробництва. Коректність щодо такого порівняння випливає з припущення про те, що породжений пошуком розподіл альтернатив не залежить від цін.

Друга властивість полягає в тому, що стовпчики матриці F впорядковані згідно зі співвідношеннями, наведеними вище:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ik} \le \sum_{i=1}^{n} f_{iK}, \quad \text{якщо } n, k = 1, ..., N-1; \; K = 1, ..., N; \, K > k. \quad (11.2)$$

Тобто умовна ймовірність переходу до стану з меншим номером зі стану з більшим номером менша, ніж та сама імовірність за умови переходу зі стану з меншим номером. Ця математична властивість відповідає економічній ідеї про те, що пошук є «локальним», тобто охоплює прирощувані модифікації існуючих технологій. Локальний пошук навряд чи дуже змінює співвідношення чинників виробництва, і найбільш імовірними є співвідношення, відносно близькі до початкового. Імовірність завершити пошук співвідношенням нижчим, ніж будь-яке конкретне значення, буде, таким чином, вищою, якщо в початковому стані це співвідношення відносно невелике. Тобто вважатимемо, що (11.2) виконуватиметься для матриці *F*. Уважатимемо також, що нерівності (11.1) та (11.2) виконуються строго.

Під час зростання відносної ціни чинника 1 фірму можна характеризувати за допомогою конкретного співвідношення:

$$a_1 / a_2 = \exp(u_i).$$

Розподіл імовірностей на *N* станах марківського ланцюга в цій точці описується одиничним вектором δ_i, в якого на *i*-му місці знаходиться одиниця, а решта значень координат дорівнює нулеві. Починаючи з часу τ й далі еволюція співвідношення чинників виробництва фірми управляється не матрицею перехідних імовірностей $\hat{F}$, а матрицею *F*. Вважають, що $\hat{F} > F$; це означає, що кожен стовпчик $\hat{F}$ показує деяке зміщення ймовірностей у напрямку станів з більшими номерами щодо відповідного стовпчика матриці *F*. Очевидно, що за умови $t > \tau$:

$$\hat{F}^{t-\tau}\delta_i > F^{t-\tau}\delta_i,$$

тобто зміна співвідношення цін зсуває розподіл імовірностей співвідношення чинників виробництва в кожен період часу після τ у напрямку більш високих значень a_2 / a_1. Такий самий зсув матиме місце й у граничному переході, коли розподіл імовірностей стану збігається до стаціонарного розподілу, котрий не залежить від початкових умов.

Розгляньмо тепер, що відбувається із середнім співвідношенням чинників у галузі. Попередній аналіз застосовується до кожної індивідуальної фірми з тим застереженням, що в загальному випадку в різних фірм у період τ спостерігаються різні співвідношення чинників виробництва $\exp(U_\tau)$ і різні значення V_τ. Зміна ціни чинників виробництва зміщує розподіл імовірностей після часу τ у напрямку більш високих значень a_1 / a_2 для всіх без винятку фірм. Дивлячись з моменту часу *t* у віддалене майбуття, можна припустити, що в усіх фірм розподіл імовірностей сходиться до стаціонарного розподілу, що асоціюється з матрицею ймовірностей переходу $\hat{F}$. Звідси ясно, що розподіл імовірностей незваженого середнього у кожен період $t > \tau$ зміщується зі зміною ціни в стандартному напрямку та що сподіване (середнє) співвідношення за великих значень t зростає від $\sum_{i=1}^{N} S_i \exp(u_i)$ до $\sum_{i=1}^{N} \hat{S}_i \exp(u_i)$, де S та $\hat{S}$ — вектори стаціонарних імовірностей, асоційовані з матрицями F та $\hat{F}$ відповідно.

Зазначимо, що дійсний агрегований стан співвідношення x_1/x_2 у галузі є середньозваженим згідно з питомою вагою капіталу фірми, співвідношенням індивідуальних фірм. Це означає, що у зміні співвідношення для галузі беруть участь поряд з уже проаналізованими пошуковими ефектами також селекційні ефекти, що й створює деякі ускладнення. Формально нехай $I_{im}(t) = 1$, якщо за час t у фірми (m) $U_t = u_i$; у протилежному разі $I_{im}(t) = 0$. Тобто $I_{im}(t)$ для кожного m — N-мірний вектор, котрий показує, у якому стані марківського процесу співвідношень чинників виробництва перебуває фірма в час t.

Припустімо, що $Z_m(t)$ — частка капіталу фірми m:

$$Z_m(t) = \frac{K_m(t)}{\sum_{j=1}^{M} K_j(t)}, \quad m = 1, ..., M.$$

Тоді співвідношення чинників виробництва у галузі загалом можна записати як:

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} Z_m(t) I_{im}(t) \exp(u_i).$$

Обчислимо математичне сподівання $\alpha(t)$:

$$E(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \exp(u_i) \left[E(Z_m(t)) E(I_{im}(t)) + \operatorname{cov}(Z_m(t), I_{im}(t)) \right].$$

З наведеного вище аналізу випливає, що для великих t (та для усіх m) $E(I_{im}(t))$ приблизно дорівнює $\hat{S}_i$ (порівняно зі значеннями S_i за відсутності зміни ціни чинника виробництва). Оскільки сума часток (питома вага) капіталу дорівнює одиниці — це означає, що $E(\alpha(t))$ відрізняється від незваженого середнього, котре було розглянуто дещо вище, сумою коваріаційних складових.

Суттєві запитання, що виникають у зв'язку з наявністю цих коваріаційних складових: чи може зміна цін чинників виробництва привести до деякої неочевидної зміни коваріації та чи суттєво це вплине на поведінку агрегованого співвідношення чинників виробництва у галузі? На них поки що немає чіткої відповіді. Припущення щодо локального характеру пошуку означає, що стан фірм у діапазоні можливих чинникоінтенсивностей може, зокрема, бути приблизно постійним у часі.

Якщо це так, то ця зміна цін чинників виробництва, задаючи імпульс конкретному станові галузі в момент $t = \tau$, у наступні періоди, ймовірно, спричинить прояв селекційного впливу в стандартному напрямку. За великих змін цін можливою є тривала перехідна фаза, протягом якої пошукові ефекти поступово перемістять співвідношення чинників виробництва в зовсім іншу область. Якщо за конкретної реалізації процесу деяка фірма випереджає решту в розумінні руху співвідношення чинників виробництва в правильному напрямку, то у неї настане момент, коли її досвід щодо скорочення витрат буде кращим, ніж у інших і, отже, вона відносно більше зростатиме. Таким чином, можна припустити, що коваріації між частками капіталу й співвідношенням чинників виробництва частково відображають роль механізму відбору в галузі як реакцію на зміну цін.

Якщо намагатися зазирнути в більш віддалене майбутнє, то можна припустити, що всі індивідуальні фірми деякої галузі будуть розподілені за своїм співвідношенням чинників виробництва відповідно до стаціонарних імовірностей $\hat{S}_i$. Досвід скорочення витрат пов'язаний зі співвідношенням чинників виробництва, а співвідношення чинників виробництва змінюється від періоду до періоду, частка капіталу фірми в галузі відображає її історію, в якій більш віддалені в часі періоди відіграють суттєво малу роль. Тому виглядає досить правдоподібним припущення, що коваріація між співвідношеннями чинників виробництва й частками (питомою вагою) капіталу в граничному переході прямує до нуля, коли час прямує до нескінченності. Доведення цього припущення вимагає побудови більш деталізованих та складних економіко-математичних моделей щодо процесу зростання фірм. Заслуговує на увагу також формалізоване дослідження тенденцій структури галузі в довготерміновій перспективі.

Взагалі кажучи, у межах еволюційної теорії економічних змін робляться лише перші кроки до розбудови адекватних математичних моделей, які, використовуючи сучасний математичний апарат та комп'ютерні технології, можуть стати суттєвим доробком у розвитку економічної науки.

17.4. Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Охарактеризуйте основні концептуальні засади еволюційної теорії економічних змін.
2. Роль інформації та процесу формування очікувань суб'єктами економіки.
3. Неповнота інформації та недосконалість конкуренції й способи врахування цих аспектів у еволюційній економіці.
4. Поясніть сутність понять пошуку і відбору як одночасно наявних взаємодіючих компонент еволюційного процесу.
5. Сутність селекційної рівноваги. Наведіть приклади.
6. Поясніть сутність марківської моделі заміщення чинників виробництва.

17.5. Теми рефератів

1. Потенційні можливості та поведінка організації.
2. Моделі економічного відбору.
3. Шумпетерівська конструкція змін.
4. Нормативна економічна теорія з еволюційного погляду.

17.6. Завдання для самостійної роботи

1. Технологія та правила використання виробничих потужностей в еволюційній економіці.
2. Імовірнісний характер розширення підприємств (фірм).
3. Процес відбору фірм та конкуренція в теорії еволюційної економіки.
4. Неортодоксальна рівновага.
5. Марківська модель заміщення чинників виробництва.
6. Еволюційна модель економічного зростання.
7. Розвиток і відставання в еволюційній моделі економічного зростання.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Богатов О. И., Лысенко Ю. Г., Петренко В. Л., Скобелев В. Г.* Рейтинговое управление экономическими системами. — Донецк: Юго-Восток, 1999. — 110 с.

2. *Брігхем Е.* Основи фінансового менеджменту / Пер. з англ. — К.: Молодь, 1997. — 1000 с.

3. *Бурда М., Виплош Ч.* Макроекономіка: Європейський контекст / Пер. з англ. — К.: Основи, 1998. — 682 с.

4. *Варфоломеев В. И.* Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем: Практикум. — М.: Финансы и статистика, 2000. — 208 с.

5. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика: Время и перемены в нелинейной економической теории / Пер. с англ. — М.: Мир, 1999. — 335 с.

6. *Колемаев В. А.* Математическая экономика: Учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ, 1998. — 240 с.

7. *Костіна Н. І., Алексєєв А. А., Василик О. Д.* Фінанси: системи моделей і прогнозів: Навч. посібник. — К.: Четверта хвиля, 1998. — 304 с.

8. *Малыхин В. И.* Математическое моделирование экономики: Учеб.-практ. пособие. — М.: УРАО, 1998. — 160 с.

9. *Наливайко А. П.* Теорія стратегії підприємства: Сучасний стан та напрямки розвитку. — К.: КНЕУ, 2001. — 227 с.

10. *Нельсон Р., Уинтер С.* Эволюционная теория экономических изменений. — М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000. — 474 с.

11. *Трояновский В. М.* Математическое моделирование в менеджменте: Учеб. пособие. — М.: Русская деловая литература, 1999. — 240 с.

12. Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие / Н. И. Холод и др.; Под общ. ред. А. В. Кузнецова. — Минск: БГЭУ, 1999. — 413 с.

13. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / В. В. Федосеев и др.; Под ред. В. В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 1999. — 391 с.

14. *Шелобаев С. И.* Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ: ДАНА, 2000. — 367 с.

15. *Шикин Е. В., Чхартишвили А. Г.* Математические методы и модели в управлении: Учеб. пособие. — М.: Дело, 2000. — 440 с.

16. *Ястремський О. І., Гриценко О. Г.* Основи мікроекономіки: Підручник. — К.: Знання, 1998. — 784 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

К

Л

М

Н

О

П